MATEMATIKA

OBSAH:

1 ZÁKLADNÍ POZNATKY Z MATEMATICKÉ LOGIKY A TEORIE MNOŽIN

Výrok (p): Každé sdělení, o kterém můžeme rozhodnout, zda je či není pravdivé. Je-li výrok pravdivý, přiřazujeme mu 1. Není-li pravdivý, přiřazujeme mu 0.

Negace výroku (p'): tvoříme ji pomocí „není pravda, že“ nebo „neplatí, že“.

1.1 LOGICKÉ SPOJKY

Konjunkce ($p \wedge q$): „a“, „i“, „a zároveň“ – je pravdivá, když jsou pravdivé oba výroky

Disjunkce (alternativa) ($p \vee q$)**:** „nebo“ – je pravdivá, je-li pravdivý alespoň 1 výrok

Implikace ($p \Rightarrow q$)**:** „jestliže …, pak“ – není pravdivá jen tehdy, vyplývá-li z pravdy nepravda

Ekvivalence (oboustranná implikace) ($p \Leftrightarrow q$)**:** „…právě tehdy, když …“ – je pravdivá, mají-li oba výroky stejnou pravdivostní hodnotu

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	**1**	1	1	**1**
1	0	0	1	**0**	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	**0**	1	**1**

1.2 KVANTIFIKOVANÉ VÝROKY

Obecný kvantifikátor ($\forall$)**:** „V každém…“, „Pro každé…“ – např. $\forall x \in R; (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

Existenční kvantifikátor ($\exists$ **):** „Existuje…“ – např. $\exists x \in R; x < 0$

1.3 DEFINICE, VĚTY

Definice: zavádí základní matematické pojmy

Věty: musíme je na rozdíl od definic dokázat. Skládají se z **předpokladu** a **tvrzení**. Např. $\forall a \in Z^+$; $a =$ liché č. $\Rightarrow a^2 =$ liché č. – předpoklad: celé kladné liché č. – tvrzení: a^2 je liché č.

$q' \Rightarrow p'$ věta obměněná $p \Rightarrow q$

1.4 MNOŽINY

Množina (A,B,…)**:** soubor určitých prvků – konečná (žáci), nekonečná (R), prázdná ({})

Určení množin: výčtem ($A = \{a, b, c, d\}$), symbolicky ($A = \{x \in N; 10 < x \le 20\}$)

1.5 VZTAHY MEZI MNOŽINAMI

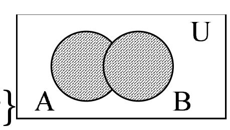
Podmnožina ($A \subset B$ **):** „A je podmnožinou B“ – inkluze – def. $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A; x \in B$

Rovnost ($A = B$)**:** def. $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

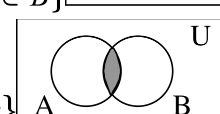
1.6 OPERACE MEZI MNOŽINAMI

Vennovy diagramy: U – základní (universální) množina

Sjednocení ($A \cup B$)**:** def. $C = A \cup B = \{x \in U; x \in A \vee x \in B\}$



Průnik ($A \cap B$ **):** def. $C = A \cap B = \{x \in U; x \in A \wedge x \in B\}$



zákon komutativní (o záměně): $A \cup B = B \cup A$

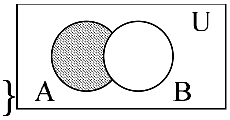
$A \cap B = B \cap A$

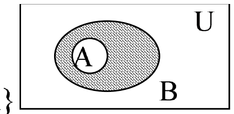
zákon asociativní (o sdružování): $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

zákon distributivní (o roznásobení): $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Rozdíl ($A-B$)**:** def. $C = A - B = \{x \in U; x \in A \wedge x \notin B\}$ 

Doplněk (A'_B **):** def. $A \subset B \Rightarrow A'_B = \{x \in U; x \in B \wedge x \notin A\}$ 

de Morganova pravidla: $(A \cup B)' = A \cap B$

$(A \cap B)' = A \cup B$

1.7 ČÍSELNÉ INTERVALY

Otevřený: $(\quad) = \{x \in \quad ; \quad < x < \quad\}$

Uzavřený: $\langle \quad \rangle = \{x \in \quad ; \quad \leq x \leq \quad\}$

Polouzavřený: zleva uzavřený: $\langle \quad) = \{x \in \quad ; \quad \leq x < \quad\}$

zprava uzavřený: $(\quad \rangle = \{x \in \quad ; \quad < x \leq \quad\}$

S intervaly pracujeme stejně jako s množinami, a proto pro ně platí stejné operace.

1.8 SPOLEČNÝ NÁSOBEK A DĚLITEL

Nejmenší spol. násobek: $(\quad) = \cdot \cdot \cdot =$, v prvočíselném rozkladu má každé prvočíslo obsažené v nejvyšší mocnině.

Největší spol. dělitel: $(\quad) =$, v prvočíselném rozkladu má pouze spol. prvočíslo.

2 MATEMATICKÉ DŮKAZY

Přímý důkaz ($A \Rightarrow B$)**:** vycházíme z předpokladu dané věty a musíme se dopracovat k jejímu tvrzení

Např. $\forall \in {}^{+}; \quad = \quad \Rightarrow {}^{2} =$

liché č.: $2k+1$, potom $(\quad + \quad)^2 = (\quad {}^2 + \quad) + \quad$, kde $(\quad {}^2 + \quad)$ je sudé.

Nepřímý důkaz ($A \Rightarrow B \Leftrightarrow B' \Rightarrow A'$)**:** dokazujeme větu obměněnou pomocí přímého důkazu.

Např. $\forall \in {}^{+}; \; {}^{2}$ ě $\Rightarrow$ ě

nedělitelné 3: $3k+1 \vee 3k+2$, potom $(\quad + \quad)^2 = (\quad {}^2 + \quad) + \quad$ nebo $(\quad + \quad)^2 = (\quad {}^2 + \quad) + \quad$, kde $(\quad {}^2 + \quad)$ a $(\quad {}^2 + \quad)$ jsou dělitelná 3.

Důkaz sporem ($(A \Rightarrow B)' \Leftrightarrow A \wedge B'$)**:**

Např. $\forall \in {}^{+}; \frac{+}{} \geq \sqrt{\quad}$

předpokládáme $\exists \in {}^{+}; \frac{+}{} < \sqrt{\quad}$, po úpravách rovnice: $(\quad - \quad)^2 < \quad$, protože x^2 nemůže být <0 – spor s předpokladem a daná věta platí.

Matematická indukce: Dokážeme, že platí $V(1)$, potom že pro $k \geq 1; V(k) \Rightarrow V(k+1)$.

Např. $\forall n \in N; \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

1) ověření $n=1$; $L=P$
2) předpoklad $k \geq 1$; $L = 1^2 + 2^2 + \ldots n^2 \quad P = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1)$

   máme dokázat $k+1$; $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

   $L = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] =$

   $= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$
3) platí pro $\forall k \in N$

3 MOCNINY A ODMOCNINY, MOCNINNÉ FUNKCE

3.1 MOCNINY S CELOČÍSELNÝM EXPONENTEM

$$a^r a^s = a^{r+s} \quad \forall a,b \in R, \forall r,s \in Z$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad a \neq 0$$

$$\left(a^r\right)^s = a^{rs}$$

$$(ab)^r = a^r b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \quad b \neq 0$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} \quad a \neq 0,\; r > 0$$

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \pm a$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \forall a,b \in R_0^+, \forall m,n,p \in N$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad b \neq 0$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Slučovat lze pouze souhlasné odmocniny, odmocnit součet a rozdíl nelze.

Částečné odmocňování: $\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^2 \cdot \sqrt[3]{2} = 4 \cdot \sqrt[3]{2}$

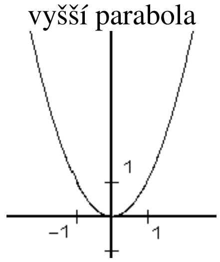
Usměrňování zlomků: $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Mocniny s reálným exponentem: $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \quad \forall m \in Z, \forall n \in N, \forall a \in R^+$

3.2 MOCNINNÉ FUNKCE

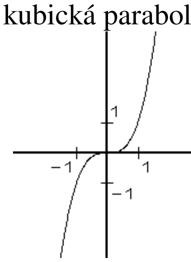
$y = x^2$

vyšší parabola

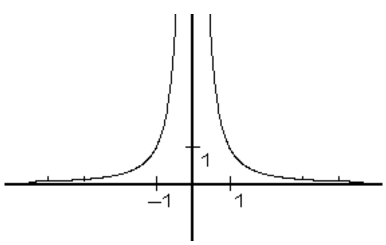


$y = x^3$

kubická parabola

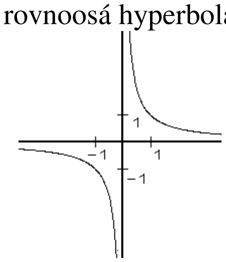


$y = x^{-2}$



$y = x^{-1}$

rovnoosá hyperbola



4 ÚPRAVY ALGEBRAICKÝCH VÝRAZŮ

4.1 MNOHOČLENY

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

4.2 LOMENÉ VÝRAZY

Definiční obor – obor proměnnosti – (D) je množina, ve které má daný výraz řešení.

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} \qquad D = R - \{1\}$$

4.3 DĚLENÍ MNOHOČLENU MNOHOČLENEM

$$(x^2 - 2x - 1) : (x - 1) = x - 1 - \frac{2}{x-1}$$

$$\underline{-(x^2 - x)}$$

$$-x - 1$$

$$\underline{-(-x + 1)}$$

$$-2$$

zbytek

5 FUNKCE A JEJICH ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

Funkce: předpis, který každé hodnotě nezávislé proměnné *x* z def. oboru přiřadí **právě jednu** hodnotu závislé proměnné *y*.

Graf funkce: množina všech bodů o souřadnicích $[x, f(x)]$.

Obor hodnot (H)**:** množina řešení (*y*) dané funkce.

5.1 VLASTNOSTI FUNKCÍ

Rostoucí: $\forall x \in D; \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ – např. $y = x$

Klesající: $\forall x \in D; \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ – např. $y = -x$

Konstantní: $\forall x \in D; \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ – např. $y = 0$

Sudá: $\forall x \in D; \quad f(-x) = f(x)$ – např. $y = \cos(x)$

Lichá: $\forall x \in D; \quad f(-x) = -f(x)$ – např. $y = \sin(x)$

Periodická: průběh funkce se v určitých cyklech opakuje – např. $y = \sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$

Prostá (monotónní): $\forall x \in D; \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ – např. $y = x$

Inverzní: graf funkce (*f*) a funkce inverzní (f^{-1}) je souměrný podle osy I. a III. kvadrantu. Např.

$f : y = x^2 \Rightarrow f^{-1} : x = y^2$ (zaměníme *x* a *y*). Pro $D = R_0^+$ platí $y = \sqrt{x}$

5.2 TYPY FUNKCÍ

Jednouchá: $y = f(x)$ – např. $y = \sin(x)$

Složená: $y = g[f(x)]$ – např. $y = \sin^2 x$

6 LINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ FUNKCE

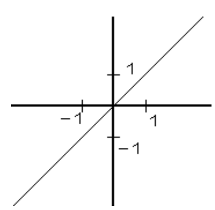
6.1 LINEÁRNÍ

$y = ax + b \qquad a \neq 0 \qquad D = R \qquad H = R$

pro $a = 0 \Rightarrow y = b$ – funkce konstantní

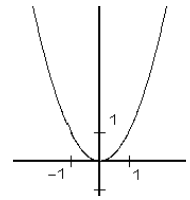
pro $a > 0$ – funkce rostoucí

pro $a < 0$ – funkce klesající



$y = x$

6.2 KVADRATICKÁ



$y = x^2$

$y = ax^2 + bx + c$

$|a| > 1$ – sevřená

$|a| < 1$ – rozevřená

$a > 0$ – v horní polorovině (konvexní)

$a < 0$ – v dolní polorovině (konkávní)

7 LINEÁRNÍ FUNKCE, ROVNICE A NEROVNICE S ABSOLUTNÍ HODNOTOU

7.1 ROVNICE

Obor proměnnosti: obor, v němž chceme danou rovnici řešit.
Definiční obor (D)**:** obor, v němž má rovnice smysl.
Obor pravdivosti (P=K)**:** množina kořenů.
Řešit rovnici znamená najít takové *x*, které dané rovnici vyhovuje.
Nutno provést zkoušku.
Ekvivalentní úpravy rovnic:

1) Rovnice lze převádět z jedné strany na druhou, ale s opačným znaménkem.
2) Rovnice se nezmění, když k oběma jejím stranám přičteme nebo odečteme stejný výraz.
3) Rovnice se nezmění, když obě její strany vynásobíme nebo vydělíme stejným výrazem.

7.2 NEROVNICE

ostré znaky nerovnosti:	$<$	menší než
	$>$	větší než
neostré znaky nerovnosti:	$\leq$	menší nebo rovno než
	$\geq$	větší nebo rovno než

Ekvivalentní úpravy nerovnic:

1) Nerovnice se nezmění, když k oběma jejím stranám přičteme nebo odečteme stejný výraz.
2) V nerovnici lze převádět z jedné strany na druhou, ale s opačným znaménkem.
3) Nerovnice se nezmění, jestliže její obě strany vynásobíme stejným výrazem, který je kladný na celém definičním oboru.
4) Násobíme-li nerovnici výrazem, který je záporný na celém def. oboru, pak musíme převrátit znak nerovnosti.

7.3 ROVNICE A NEROVNICE V SOUČINOVÉM TVARU

Rovnice: $(x-2)(3-x) = 0$ – Součin je nulový, je-li nulový alespoň 1 činitel – $x = 2 \vee x = 3$.

$\frac{x-2}{3-x} = 0$ – Podíl je nulový, je-li čitatel roven nule – $x = 2$

Nerovnice: $(x-2)(3-x) < 0$ nebo $\frac{x-2}{3-x} < 0$ $(x \neq 3)$ – pomocí **nulových bodů**

$x - 2 = 0$ $\qquad$ $3 - x = 0$

$x = 2$ $\qquad$ $x = 3$

	-∞ 2		3 +∞
$x-2$	–	+	+
$3-x$	+	+	–

Pozn.: V nulových bodech mění dvojčlen znaménko. Je-li u *x* koeficient kladný, pak od nulového bodu nalevo je dvojčlen záporný a napravo kladný.

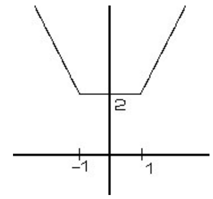
$x \in (-\infty;2) \cup (3;+\infty)$ – při neostrém znaku nerovnosti by byl interval uzavřený.

7.4 ABSOLUTNÍ HODNOTA

Absolutní hodnota: vzdálenost bodu od počátku na číselné ose.
Funkce, rovnice a nerovnice řešíme pomocí **nulových bodů**.

Např. $y = |x+1| + |1-x|$

$$x+1=0 \qquad 1-x=0$$
$$x=-1 \qquad x=1$$



	-1		1	
$x+1$	$-$	$+$		$+$
$1-x$	$+$	$+$		$-$

$x \in (-\infty;-1)$	$x \in \langle -1;1)$	$x \in \langle 1;\infty)$
$y = -(x+1)+(1-x)$	$y = (x+1)+(1-x)$	$y = (x+1)-(1-x)$
$y = -2x$	$y = 2$	$y = 2x$

Pozor u rovnic a nerovnic musíme vždy výsledek porovnat s intervalem – např. $x \in \langle 1;3)$ a výsledek je $x = 4$, proto rovnice nemá v tomto intervalu řešení.

8 Kvadratické rovnice a nerovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + px + q = 0$$

Neúplná kvadratická rovnice: $b, c = 0 \vee c = 0$

Ryze kvadratická rovnice: $b = 0$

$$x^2 = a$$

$$x = |\sqrt{a}| = \pm\sqrt{a}$$

Řešení kvadratické rovnice:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

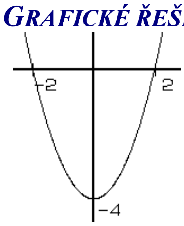
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$D > 0$ 2 reálná řešení

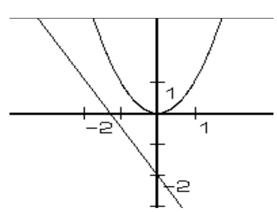
$D = 0$ 1 reálné řešení

$D < 0$ 2 komplexní řešení

8.1 Grafické řešení kvadratické rovnice



$$x^2 - 4 = 0$$
$$y = x^2 - 4$$
$$K = \{\pm 2\}$$



$$2x^2 + 3x + 4 = 0$$
$$y = x^2 \wedge y = -1{,}5x - 2$$
$$K = \{\ \}$$

9 Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice

$$x_1 + x_2 = -p = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = q = \frac{c}{a}$$

Rozklad kvadratického dvojčlenu: $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) = 0$
Diskuse kvadratické rovnice s parametrem: viz. otázka č. 13

10 IRACIONÁLNÍ ROVNICE

tzn. neznámá je pod odmocninou
provádíme zkoušku

$$\sqrt{6-x} + \sqrt{3x-2} = 4 \qquad /(\ )^2$$
$$(6-x) + 2\sqrt{6-x}\sqrt{3x-2} + (3x-2) = 16$$
$$2\sqrt{(6-x)(3x-2)} = 12 - 2x$$
$$\sqrt{(6-x)(3x-2)} = 6 - x \qquad /(\ )^2$$
$$(6-x)(3x-2) = (6-x)^2 \qquad /(6-x)$$

$$6 - x_1 = 0 \qquad \vee \qquad 3x_2 - 2 = 6 - x_2$$
$$x_1 = 6 \qquad\qquad 4x_2 = 8$$
$$x_2 = 2$$

$$L_1 = \sqrt{0} + \sqrt{16} = 4 \qquad L_2 = \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$$
$$P_1 = 4 \qquad P_2 = 4$$
$$L_1 = P_1 \Rightarrow K_1 = \{6\} \qquad L_2 = P_2 \Rightarrow K_2 = \{2\}$$

11 KOMPLEXNÍČÍSLA

Komplexní – složené, *imaginární* – neskutečné, vymyšlené
$a = [a_1 + a_2]$ – Gausova rovina, $|a|$ – vzdálenost v G. rovinně od počátku

Absolutní hodnota: $|a| = \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}}$ – reálné číslo
Komplexní jednotka: číslo, jehož absolutní hodnota se rovná 1
Algebraický tvar: $a = a_1 + a_2 i$
Komplexně sdružené č.: $\overline{a} = a_1 - a_2 i$,
Goniometrický tvar: $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$
Exponenciální tvar: $a = |a| \cdot e^{i\alpha}$ – α v radiánech

Opačné číslo: $-a = -a_1 - a_2 i$
Převrácené číslo: $\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1 + a_2 i}$

11.1 OPERACE S KOMPLEXNÍMI ČÍSLY

$i^2 = -1$
Sčítání: $a + b = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i$
Násobení: $a \cdot b = (a_1 + a_2 i)(b_1 + b_2 i)$
$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot [\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)] = |a| \cdot |b| \cdot e^{i(\alpha+\beta)}$$
Dělení: $\frac{a}{b} = \frac{a_1 + a_2 i}{b_1 + b_2 i} \cdot \frac{b_1 - b_2 i}{b_1 - b_2 i}$
$$\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)] = \frac{|a|}{|b|} \cdot e^{i(\alpha-\beta)}$$

11.2 MOIVREOVA VĚTA

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$
Mocniny: $a^n = |a|^n \cdot (\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$

Odmocniny: $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{|a|}\cdot\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$

12 ŘEŠENÍ ROVNIC V OBORU KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

12.1 KVADRATICKÉ ROVNICE S DISKRIMINANTEM MENŠÍM 0

$x=\pm\sqrt{-m}=\pm i\sqrt{m}$

$$ax^2+bx+c=0 \quad (D<0) \Rightarrow \quad x=\frac{-b\pm i\sqrt{|D|}}{2a}$$

12.2 BINOMICKÉ ROVNICE

$x^n=m \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt[n]{m}=\sqrt[n]{|m|}\cdot\left(\cos\frac{0+2k\pi}{n}+i\sin\frac{0+2k\pi}{n}\right)$

Je-li binomická rovnice s reálnými kořeny stupně sudého, pak má 2 reálné kořeny (čísla opačná) a komplexní kořeny jsou vždy 2 a 2 komplexně sdružené.

Je-li stupně lichého, pak má jeden reálný kořen a 2 a 2 komplexně sdružené.

13 ROVNICE S PARAMETREM

Lineární rovnice s parametrem:

$$x(t^2-1)=t-1$$
$$x(t-1)(t+1)=t-1$$

$t\neq 1 \quad \vee \quad t=1$

$x(t+1)=1 \qquad 0=0\Rightarrow K=R$

$t\neq -1 \quad \vee \quad t=-1$

$x=\frac{1}{t+1} \qquad 0\neq 1$

$K=\left\{\frac{1}{t+1}\right\} \qquad K=\{\ \}$

Diskuse:

pro $t\neq 1,-1$ má $K=\left\{\frac{1}{t+1}\right\}$

pro $t=1$ má $K=R$

pro $t=-1$ má $K=\{\ \}$

Kvadratická rovnice s parametrem: $px^2+bx+c=0 \quad \Rightarrow \quad D=b^2-4pc$

$D>0\Rightarrow p<\frac{b^2}{4c}$ x má 2 řešení

$D=0 \Rightarrow p=\frac{b^2}{4c}$ x má 1 řešení

$D<0\Rightarrow p>\frac{b^2}{4c}$ x nemá řešení v R

U parametrických rovnic s neznámou ve jmenovateli nebo u rovnic, kde umocníme či odmocníme, děláme zkoušku.

14 SOUSTAVY ROVNIC A NEROVNIC

14.1 SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC O DVOU A VÍCE NEZNÁMÝCH

Metody: *sčítací, dosazovací*

$$\frac{2}{x+z}+\frac{3}{x+y}=13$$
$$\frac{1}{x+z}-\frac{2}{y+z}=-16$$
$$\frac{3}{x+y}+\frac{1}{y+z}=15$$

$x,y,z\in R$

$x\neq -y,-z$

$y\neq -z$

substituce: $\frac{1}{x+z}=a$, $\frac{1}{x+y}=b$, $\frac{1}{y+z}=c$

$$2a+3b=13$$
$$a-2c=-16$$
$$3b+c=15 \quad /\cdot 2$$

$$c=\frac{a}{2}+8=\frac{4}{2}+8=10$$

$$2a+3b=13$$
$$a+6b=14 \quad /(-2)$$

$$a=14-6b=14-10=4$$

$$-9b=-15$$
$$b=\tfrac{5}{3}$$

$$\frac{1}{x+z}=4$$
$$\frac{1}{x+y}=\frac{5}{3}$$
$$\frac{1}{y+z}=10$$

$$x+z=\tfrac{1}{4} \quad /(-1)$$
$$x+y=\tfrac{3}{5}$$
$$y+z=\tfrac{1}{10}$$

$$x=\tfrac{2}{8}-z=\tfrac{3}{8}$$

$$y-z=\tfrac{7}{20}$$
$$y+z=\tfrac{1}{10}$$

$$z=\tfrac{4}{40}-y=-\tfrac{1}{8}$$

$$2y=\tfrac{9}{20}$$
$$y=\tfrac{9}{40}$$

Soustavy lineárních nerovnic o jedné neznámé
Vyřešíme každou zvlášť, potom uděláme průnik výsledků.

14.2 Grafické řešení lineárních rovnic a nerovnic o dvou neznámých

Nakreslíme graf funkcí. Výsledkem je průnik grafů.

14.3 Soustavy lineární a kvadratické rovnice

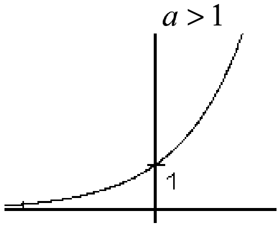
Řešíme dosazovací metodou – z lineární vyjádříme a dosadíme do kvadratické.

15 Exponenciální a logaritmické funkce

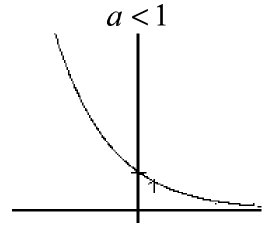
15.1 Grafy funkcí

Exponenciální funkce: $y=a^x \qquad a>0,\ a\neq 1$

$a>1$

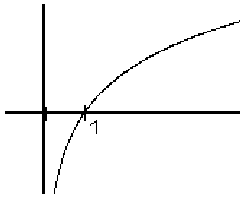


$a<1$

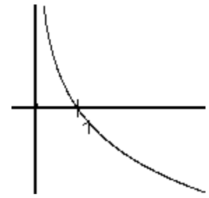


Logaritmická funkce: $y=\log_a x \qquad a>0,\ a\neq 1 \qquad D=R^+$

$a>1$



$a<1$



15.2 Věty o logaritmech

$a^x=b \quad\Rightarrow\quad x=\log_a b \qquad b>0$

nejde logaritmovat součet ani rozdíl

$\log_a(r\cdot s)=\log_a r+\log_a s$

$\log_a \frac{r}{s}=\log_a r-\log_a s$

$\log_a r^s = s\cdot\log_a r$

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$\log_a a=1$

$\log_a 1=0$

$a^{\log_a x}=x$

Pokud je základ $e=2{,}71828\ldots$, jedná se o přirozený logaritmus a značí se $\ln x$

Při základu rovnému 10 se jedná o dekadický logaritmus – $\log x$

16 Exponenciální rovnice a nerovnice

rovnice

$$3^{x+2}-5^x=3^{x+4}-5^{x+2}$$
$$3^x\cdot 3^2-5^x=3^x\cdot 3^4-5^x\cdot 5^2$$
$$3^x\left(3^2-3^4\right)=5^x\left(1-5^2\right)$$
$$72\cdot 3^x=24\cdot 5^x$$
$$3\cdot 3^x=5^x$$
$$3^{x+1}=5^x$$
$$(x+1)\log 3=x\cdot\log 5$$
$$x(\log 3-\log 5)=-\log 3$$
$$x=\frac{\log 3}{\log 5-\log 3}$$

nerovnice

$$\left(\tfrac{1}{4}\right)^{2x+3}\le\left(\tfrac{1}{8}\right)^{x+2}$$
$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{4x+6}\le\left(\tfrac{1}{2}\right)^{3x+6}$$
$$4x+6\ge 3x+6$$
$$x\ge 0$$

Základ < 1
převrací se nerovnost

$$2^x\ge 3^{x+1}$$
$$x\cdot\log 2\ge x\cdot\log 3+\log 3$$
$$x(\log 2-\log 3)\ge\log 3$$
$$x\le\frac{\log 3}{\log 2-\log 3}$$

$\log 2-\log 3<0$
převrací se nerovnost

$\sqrt[x]{\ }1+\frac{}{\sqrt[x]{\ }1}=1$ – substitucí $a=\sqrt[x]{81}$

$a^2-12a+27=0\Rightarrow\sqrt[x]{81}=9\vee\sqrt[x]{81}=3$

$3^{\frac{4}{x}}=3^2\vee 3^{\frac{4}{x}}=3^1\Rightarrow x=2\vee x=4$

17 Logaritmické rovnice a nerovnice

Podmínky pro logaritmus i pro jmenovatele.
Odlogaritmovat mohu pouze tehdy, pokud mají logaritmy stejný základ.

rovnice:

$$\frac{\log x}{\log(3x+5)} = 1$$

$$\log x = \log(3x+5)$$

$$x = 3x+5$$

$$x = -2{,}5 \qquad K = \{\ \}$$

podmínky:

$$x > 0 \quad \wedge \quad 3x+5>0 \quad \wedge \quad \log(3x+5) \neq 0$$

$$x > -\tfrac{5}{3} \qquad \log(3x+5) \neq \log 1$$

$$x \neq -\tfrac{4}{3}$$

nerovnice: při $0 < a < 1$ se u exponenciálních a logaritmických nerovnic převrací nerovnost

$$\log_2(x+2) > 3$$

$$\log_2(x+2) > \log_2 8$$

$$x > 6$$

$$\log_{0,5}(x+2) > 3$$

$$\log_{0,5}(x+2) > \log_{0,5}\tfrac{1}{8}$$

$$x < -\tfrac{15}{8}$$

Základ < 1
převrací se nerovnost

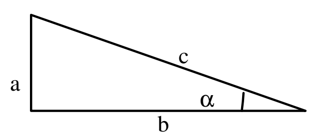
Podmínky:

$$x+2>0$$

$$x > -2$$

18 Goniometrické funkce

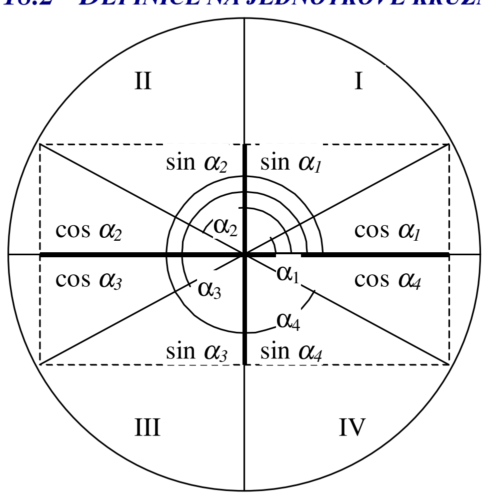
18.1 Definice na pravoúhlém trojúhelníku



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} \qquad \sec\alpha = \frac{c}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cot g\alpha = \frac{b}{a} \qquad \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{c}{a}$$

18.2 Definice na jednotkové kružnici



$$\alpha_2 = 180° - \alpha_1$$

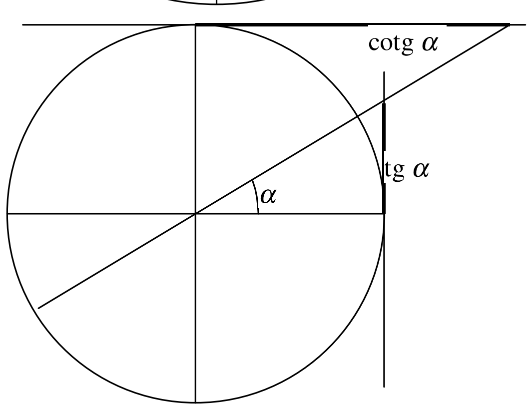
$$\alpha_3 = 180° + \alpha_1$$

$$\alpha_4 = 360° - \alpha_1$$

II. kvadrant: $\sin\alpha_2 = \sin\alpha_1$
$\cos\alpha_2 = -\cos\alpha_1$

III. kvadrant: $\sin\alpha_3 = -\sin\alpha_1$
$\cos\alpha_3 = -\cos\alpha_1$

IV. kvadrant: $\sin\alpha_4 = -\sin\alpha_1$
$\cos\alpha_4 = \cos\alpha$



$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ lichá funkce
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ sudá funkce
perioda je 2π

$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$ funkce lichá
$\cot g(-\alpha) = -\cot g\,\alpha$ funkce lichá
perioda je π

18.3 ZÁKLADNÍ ÚHLY

α	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	E
cotg α	E	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Doplňkový úhel: $\alpha' = 90° - \alpha$

$\sin\alpha = \cos\alpha'$

$\cos\alpha = \sin\alpha'$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{cotg}\,\alpha'$

$\mathrm{cotg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha'$

18.4 OBLOUKOVÁ MÍRA

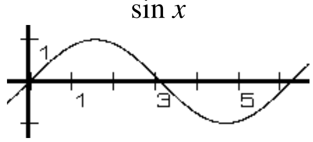
1 rad je středový úhel, který přísluší oblouku jednotkové kružnice, jehož délka je 1.

1 rad = 57° 17' 44,81''

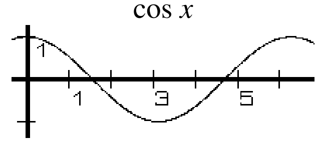
360°=2π

18.5 GRAFY FUNKCÍ

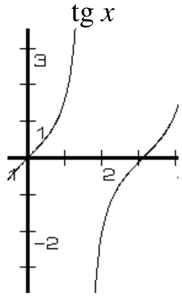
$\sin x$



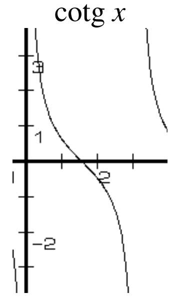
$\cos x$



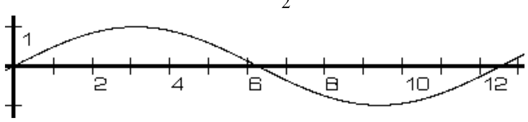
$\mathrm{tg}\, x$



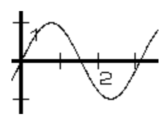
$\mathrm{cotg}\, x$



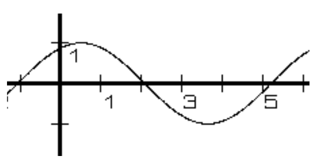
$\sin \frac{x}{2}$



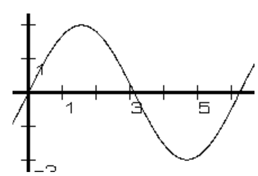
$\sin 2x$



$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$



$2 \sin x$



19 VZTAHY MEZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI

$\mathrm{tg}\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\mathrm{cotg}\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{cotg}\, x = 1$

Součtové vzorce: $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mu \sin x \cdot \sin y$

$$\mathrm{tg}(x \pm y) = \frac{\mathrm{tg}\, x \pm \mathrm{tg}\, y}{1 \mu \mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{tg}\, y}$$

$$\cot g(x \pm y) = \frac{\pm \mathrm{cotg}\, x \cdot \mathrm{cotg}\, y - 1}{\mathrm{cotg}\, x \mu \mathrm{cotg}\, y}$$

Dvojnásobný úhel: $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$$

Poloviční úhel: $\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ znaménko se určí podle kvadrantu

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

Součtové věty: $\sin x + \sin y = 2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$$\sin x - \sin y = 2\cdot\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cdot\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$$

Převody přes liché násobky π/2: $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{cotg}\alpha$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$$

20 GONIOMETRICKÉ ROVNICE A NEROVNICE

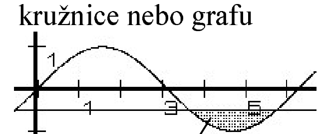
20.1 ZÁKLADNÍ GONIOMETRICKÉ ROVNICE A NEROVNICE

$\sin x = a,\ \cos x = a \qquad a \in \langle -1,1\rangle \qquad x \in R$

$\operatorname{tg} x = a \qquad a \in R \qquad x \in R - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$

$\operatorname{cotg} x = a \qquad a \in R \qquad x \in R - \{k\pi\}$

interval se určí podle jednotkové kružnice nebo grafu



Př. **rovnice**

$\sin x = -0{,}5$

$x_1 = 210°, \quad x_2 = 330°$

$K = k \in Z \cup \{210° + 2k\pi, 330° + 2k\pi\}$

nerovnice

$\sin x \le -0{,}5$

$x_1 = 210°, \quad x_2 = 330°$

$K = k \in Z \cup \langle 210° + 2k\pi\ , 330° + 2k\pi\rangle$

20.2 SLOŽITĚJŠÍ GONIOMETRICKÉ ROVNICE

Pokud je v rovnici více goniometrických funkcí, převedeme je na jednu goniometrickou funkci.
Pokud odmocňujeme, musíme provést zkoušku.

$$\sin 3x = \cos 2x$$

$$\sin 3x - \sin(90° - 2x) = 0$$

$$2\cdot\cos\frac{3x + 90° - 2x}{2}\cdot\sin\frac{3x - 90° + 2x}{2} = 0$$

$$\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2} = 0 \qquad \vee \qquad \sin\frac{5x-\frac{\pi}{2}}{2} = 0$$

$$\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad\qquad \frac{5x-\frac{\pi}{2}}{2} = k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad\qquad x = \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi$$

21 Trigonometrie

21.1 Pravoúhlý trojúhelník

Goniometrické funkce

21.2 Obecný trojúhelník

Sinova věta: $2r = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ – poměr strany a protilehlého vnitřního úhlu je konstantní a je roven průměru kružnice opsané. **Použití:** známe stranu a 2 úhly nebo 2 strany a úhel jedné z nich.

Kosinova věta:
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$$
– **Použití:** známe 3 strany nebo 2 strany a úhel jimi sevřený.

22 Shodná zobrazení v rovině

Samodružný bod – bod X je totožný se svým obrazem X'=X
Samodružný útvar – útvar U, jehož obrazem U' je U
Osová souměrnost: osa souměrnosti
Středová souměrnost: střed souměrnosti
Posunutí (translace): vektor posunutí
Otočení (rotace): střed otočení, úhel otočení
Totožnost (identita)

23 Podobnost a stejnolehlost

23.1 Podobnost

Pro každé body X,Y a jejich obrazy X',Y' platí: $|X'Y'| = k|XY|$

$k>1$ zvětšení
$k=1$ shodnost
$k<1$ zmenšení

V podobném trojúhelníku platí, že ve stejném poměru jsou i výšky, těžnice, střední příčky, poloměry kružnice opsané i vepsané, …

2 trojúhelníky jsou si podobné shodují-li se ve dvou úhlech nebo v 1 úhlu a poměru stran svírajících tento úhel.

23.2 Stejnolehlost $H(S;\kappa)$

Pro každé X platí: $|X'S| = |\kappa|\cdot|XS|$, kde S je *střed stejnolehlosti* a κ je *koeficient stejnolehlosti*.

Přímka se zobrazí na přímku rovnoběžnou.

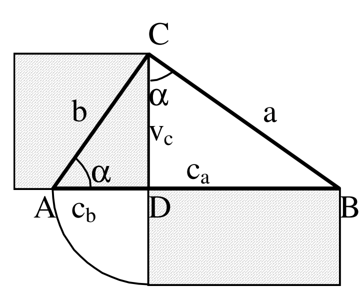
24 Pythagorova věta, Euklidovy věty

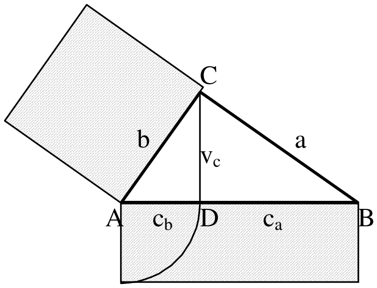
Platí pro pravoúhlý trojúhelník *ACB*.

I. Euklidova věta: $v_c^2 = c_a\cdot c_b$ – obsah čtverce sestrojeného nad výškou trojúhelníka se rovná obsahu obdélníka sestrojeného z obou úseků na přeponě.

Odvození:

$$R\Delta\ ACB \Rightarrow \angle DAC = \angle DCB \Rightarrow \frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|BD|}{|CD|} \Rightarrow \frac{v_c}{c_b} = \frac{c_a}{v_c}$$





II. Euklidova věta: $b^2 = c \cdot c_b$, $a^2 = c \cdot c_a$ – obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou se rovná obsahu obdélníka sestrojeného z celé přepony a úseku přilehlého k dané odvěsně.

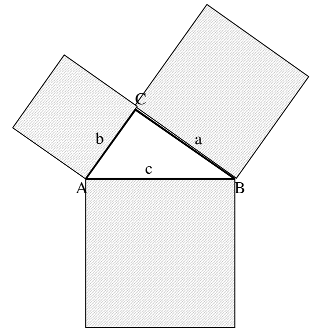
Odvození:

$$R\Delta\ ACB \text{ a } R\Delta\ ADC \Rightarrow \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow \frac{c_b}{b} = \frac{b}{c}$$

Pythagorova věta: $a^2 + b^2 = c^2$ – součet obsahů čtverců nad odvěsnami se rovná obsahu čtverce nad přeponou.

Odvození: sečtením Euklidových vět.

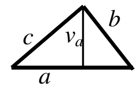
$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$c \cdot c_a + c \cdot c_b = c^2$$
$$c_a + c_b = c$$



25 ROVINNÉ ÚTVARY

Trojúhelník: $O = a + b + c$

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

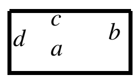


Heronův vzorec: $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

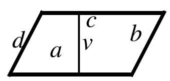
Obdélník: $O = 2(a+b)$

$S = ab$



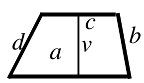
Rovnoběžník: $O = 2(a+b)$

$S = a \cdot v_a$



Lichoběžník: $O = a + b + c + d$

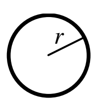
$$S = \frac{(a+c)v}{2}$$



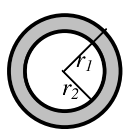
Pravidelný *n*-úhelník: $S = n \cdot S\Delta ABS$ – n-krát obsah jednoho trojúhelníka

Kruh: $O = 2\pi\ r$

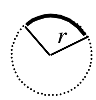
$S = \pi\ r^2$



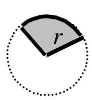
Mezikruží: $S = \left|\pi\ r_1^2 - \pi\ r_2^2\right|$



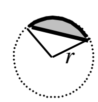
Oblouk: $O = r\varphi$ – úhel v radiánech



Výseč: $S = \frac{r^2}{2}\varphi$



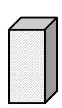
Úseč: $S = \frac{r^2}{2}\varphi - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\varphi$ – obsah výseče mínus obsah trojúhelníka



26 NEROTAČNÍT ĚLESA

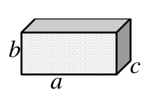
Hranol: $V = S_p \cdot v$

$S = 2S_p + S_{pl}$

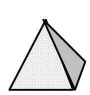


Kvádr: $V = abc$

$S = 2(ab + bc + ac)$



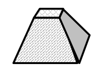
Jehlan: $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$



$$S = S_p + S_{pl}$$

Komolý jehlan: $V = \frac{1}{3} v \left(S_{p1} + S_{p2} + \sqrt{S_{p1} \cdot S_{p2}} \right)$

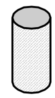
$$S = S_{p1} + S_{p2} + S_{pl}$$



27 ROTAČNÍT ĚLESA

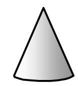
Válec: $V = \pi r^2 v$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$$



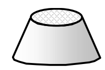
Kužel: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$

$S = \pi r^2 + \pi r s$, kde $s = \sqrt{r^2 + v^2}$ – délka pláště



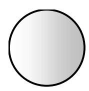
Komolý kužel: $V = \frac{1}{3} \pi v \left(r_1^{\,2} + r_2^{\,2} + r_1 r_2 \right)$

$$S = \pi r_1^{\,2} + \pi r_2^{\,2} + (\pi r_1 + \pi r_2) s$$



Koule: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

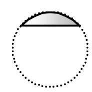
$$S = 4\pi r^2$$

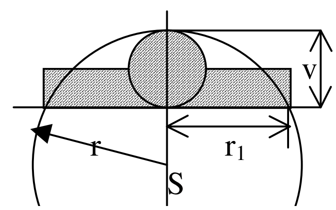


Kulová úseč: $V = \pi r_1^{\,2} \cdot \frac{v}{2} + \frac{4}{3} \pi \left(\frac{v}{2} \right)^3$

objem válce plus objem koule

$$r_1 = \sqrt{r^2 - (r - v)^2}$$

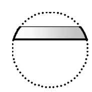


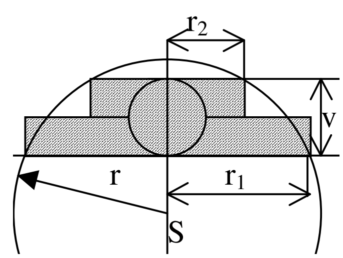


$S = \pi r_1^{\,2} + 2\pi r v$ – obsah podstavy plus obsah kulového vrchlíku

Kulová vrstva: $V = \pi r_1^{\,2} \cdot \frac{v}{2} + \pi r_2^{\,2} \cdot \frac{v}{2} + \frac{4}{3} \pi \left(\frac{v}{2} \right)^3$

objem dvou válců a objem koule





28 MATICE A DETERMINANTY

$$a_{ij} \quad \dots \quad \begin{matrix} i = 1,2,3 \dots m \\ j = 1,2,3 \dots n \end{matrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Společný název pro řádek a sloupec je **řada**.

Typ matice: Obdélníková, čtvercová (m=n), sloupcová (m,1) a řádková (1,n), diagonální (samé nuly, jen na hlavní diagonále ne), jednotková (samé nuly, na diagonále jedničky)

Hlavní diagonála: z LH do PD rohu, **vedlejší diagonála:** z PH do LD rohu

Transponovaná matice: zaměněné sloupce a řádky

Symetrická matice: matice je stejná jako transponovaná

Hodnost matice: počet lineárně nezávislých řádků v matici (maximálně rovna menšímu z m a n)

28.1 OPERACE S MATICEMI

Hodnost matice se nemění, když

1) matici transponujeme
2) nějakou řadu vynásobíme nenulovým číslem
3) k některé řadě přičteme lineární kombinaci (násobek) jiné řady s ní rovnoběžné
4) v matici vynecháme nebo přidáme řadu, která je lineární kombinací jiné řady s ní rovnoběžné

Matice téhož typu se stejnou hodností jsou ekvivalentní $A \cong B$

Hodnost matice:

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 11 \\ -3 & -8 & 5 \\ 1 & -12 & 21 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -12 & 21 \\ -3 & -8 & 5 \\ 7 & 4 & 11 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -12 & 21 \\ 0 & -44 & 68 \\ 0 & 88 & -136 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -12 & 21 \\ 0 & -11 & 17 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h=2$$

Násobení matice: $4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$

Součet matic: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

28.2 DETERMINANT

Determinant 2. stupně: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Determinant 3. stupně:

$$\begin{array}{|ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \quad \begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

29 LINEÁRNÍ ALGEBRA

soustava *m* rovnic o *n* neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

h je hodnost matice (a_{ij})

h_r je hodnost matice $(a_{ij}b_i)$

pokud $b_i = 0 \quad i = 1,2,\ldots m$ je soustava **homogenní**, jinak je **nehomogenní**

podmínka řešitelnosti

1) $h \neq h_r$ – nemá řešení
2) $h = h_r$
   - $h = n$ – jedno řešení
   - $h < n$ – nekonečně mnoho řešení ($n - h$ neznámých volíme a ostatní dosadíme – např. $x_4 = t_1$, $x_3 = t_2$, $x_2 = t_1 + t_2$, $x_1 = 2t_2$)

Příklad:

$$\begin{aligned} -x_1 \qquad\qquad &+ x_3 = -1 \\ 2x_1 + 7x_2 \qquad &= 1 \\ x_1 - x_2 \quad 3x_3 &= 2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 30 & 6 \end{array}\right) \qquad h = h_r = n$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 & & x_1 = 1\tfrac{1}{5} \\ -x_2 + 4x_3 &= 1 & \Rightarrow\ & x_2 = -\tfrac{1}{5} \\ 30x_3 &= 6 & & x_3 = \tfrac{1}{5} \end{aligned}$$

Cramerovo pravidlo: *m*=*n*, pokud determinant $|A| \neq 0$ – 1 řešení $x_k = \dfrac{|A_k|}{|A|}$, kde A_k je matice, ve které jsme *k*. sloupec nahradil sloupcem pravé strany.

Příklad:

$$\begin{array}{llll} -x_1 & & +x_3 & =-1 \\ 2x_1 & +7x_2 & & =1 \\ x_1 & -x_2 & 3x_3 & =2 \end{array} \qquad A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad |A|=-30$$

$$A_1=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad |A_1|=-36 \qquad x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{-36}{-30}=1\frac{1}{5}$$

$$A_2=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad |A_2|=6 \qquad x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{6}{-30}=\frac{-1}{5}$$

$$A_3=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad |A_3|=-6 \qquad x_3=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{-6}{-30}=\frac{1}{5}$$

30 VEKTORY

Vektor je množina všech souhlasně orientovaných úseček, které mají stejnou velikost.
Vektory rovnoběžné jsou **kolineární**. (souhlasně, nesouhlasně kolineární)

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}=(X_B-X_A, Y_B-Y_A)$$

$$|AB|=\sqrt{(X_B-X_A)^2+(Y_B-Y_A)^2}$$

$$|\vec{\mathbf{u}}|=\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}}$$

Vektor opačný: $-\vec{\mathbf{u}}=(-u_1,-u_2)$

Součet vektorů: $\vec{\mathbf{u}}\pm\vec{\mathbf{v}}=(u_1\pm v_1, u_2\pm v_2)$

Násobení vektoru skalárem: $k\cdot\vec{\mathbf{u}}=(k\cdot u_1, k\cdot u_2)$

Dva vektory jsou **lineárně závislé**, jestliže jeden z nich je lineárním násobkem druhého.
Tři vektory jsou **lineárně závislé**, je-li alespoň jeden z nich lineární kombinací ostatních dvou.
Tři vektory jsou **lineárně nezávislé**, pokud ani jeden není lineární kombinací zbývajících dvou.

Skalární součin: $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}=|\vec{\mathbf{u}}|\cdot|\vec{\mathbf{v}}|\cdot\cos\alpha=u_1v_1+u_2v_2$ – výsledkem je skalár

Úhel dvou vektorů: $\cos\alpha=\dfrac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{u}}|\cdot|\vec{\mathbf{v}}|}$

Rovnoběžné vektory: $\vec{\mathbf{u}}\parallel\vec{\mathbf{v}}\Rightarrow\vec{\mathbf{u}}=k\cdot\vec{\mathbf{v}}$, **kolmé vektory:** $\vec{\mathbf{u}}\perp\vec{\mathbf{v}}\Rightarrow\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}=0$

Vektorový součin: $|\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}}|=|\vec{\mathbf{u}}|\cdot|\vec{\mathbf{v}}|\cdot\sin\varphi$ – velikost. Směr: kolmo k oběma vektorům, pravotočivá báze (prsty – **u**,**v**, palec ukazuje směr).

$\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}}=-\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{u}}$ **–** opačná orientace

$$k(\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}})=(k\cdot\vec{\mathbf{u}})\times\vec{\mathbf{v}}$$

$$\vec{\mathbf{w}}\times(\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}})=(\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{u}})+(\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{v}})$$

$\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{u}}=\mathbf{0}$ – nulový vektor

31 ANALYTICKÁ GEOMETRIE LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ V ROVINĚ

Přímka:

- parametrické vyjádření:

  $x = X_1 + t \cdot u_1$

  $y = Y_1 + t \cdot u_2$

  pro přímku – $t \in R$

  pro úsečku – $t \in \langle 0,1 \rangle$

  pro polopřímku – $t \in \langle 0, \infty)$
- obecná rovnice přímky:

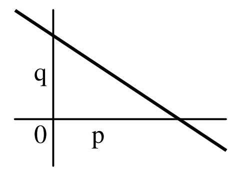
  $ax + by + c = 0$

  $\vec{\mathbf{n}} = (a, b)$ – **normálový** (kolmý) vektor

  $\vec{\mathbf{s}} = (-b, a)$ – **směrový** vektor

  $p \| O_x \Rightarrow by + c = 0$

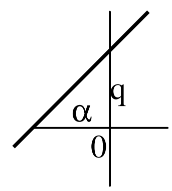
  $p \| O_y \Rightarrow ax + c = 0$
- úsekový tvar rovnice přímky:

  $$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

  $$p = -\frac{c}{a}$$

  $$q = -\frac{c}{b}$$
- směrový tvar:

  $y = kx + q$

  $$k = -\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$$

Polorovina: $ax + by + c \geq 0$

32 ANALYTICKÁ GEOMETRIE LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ V PROSTORU

Přímka definována pouze parametricky.

Rovina:

- parametrická rovnice:

  $x = X_1 + t \cdot u_1 + s \cdot v_1$

  $y = Y_1 + t \cdot u_2 + s \cdot v_2$

  $z = Z_1 + t \cdot u_3 + s \cdot v_3$

  kde $A = [X_1, Y_1, Z_1]$ je bod roviny a **u**,**v** jsou nekolineární vektory vycházející z bodu A a náležející do roviny.
- obecná rovnice roviny:

  $ax + by + cz + d = 0$

  získáme ji:

  1) pomocí dvou vektorů náležejících rovině – přes normálový vektor

  $$\vec{\mathbf{n}} = (a, b, c) = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$ – normálový vektor

  2) z parametrické rovnice – vyloučením *t, s*
  3) pomocí 3 bodů náležejících do roviny – dosazením bodů za *x, y, z* a dopočítáním *a, b, c, d*, přičemž za jednu neznámou volíme

  zvláštní případy rovnice:

$$\rho \| O_x \Rightarrow a = 0, b \neq 0, c \neq 0$$

$$\rho \| O_y \Rightarrow a \neq 0, b = 0, c \neq 0$$

$$\rho \| O_z \Rightarrow a \neq 0, b \neq 0, c = 0$$

$$\rho \| O_x \wedge \rho \| O_y \Rightarrow a = 0, b = 0, c \neq 0$$

33 POLOHOVÉ A METRICKÉ VZTAHY ÚTVARŮ V ROVINĚ

Vzájemná poloha dvou přímek:

- rovnoběžné
  - různé – žádný společný bod
  - shodné – nekonečně mnoho společných bodů
- různoběžné – jeden společný bod

Odchylka dvou přímek: $\cos\alpha = \dfrac{\left|\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}\right|}{\left|\vec{\mathbf{u}}\right| \cdot \left|\vec{\mathbf{v}}\right|} = \dfrac{\left|u_1 v_1 + u_2 v_2\right|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$$

Vzdálenost bodu od přímky: $|Ap| = \dfrac{\left|aX_0 + bY_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\qquad A = [X_0, Y_0]$

34 POLOHOVÉ A METRICKÉ VLASTNOSTI ÚTVARŮ V PROSTORU

Vzájemná poloha dvou přímek:

- rovnoběžné
  - různé – žádný společný bod
  - shodné – nekonečně mnoho společných bodů
- různoběžné – jeden společný bod
- mimoběžné – žádný společný bod, neleží v jedné rovině

Vzájemná poloha dvou rovin:

- rovnoběžné
  - různé – žádný společný bod
  - shodné – nekonečně mnoho společných bodů
- různoběžné – jedna společná přímka – průsečnice

Příklad: $\rho: 2x - y - z - 1 = 0$

$\sigma: x + y + 2z - 3 = 0$

p: $3x + z - 4 = 0$

$x = t$ ← Jednu neznámou nahradíme parametrem

$z = 4 - 3x = 4 - 3t$

$y = 3 - x - 2z = -5 + 5t$

Odchylka dvou přímek: stejné jako v rovině

Odchylka přímky od roviny: $\sin\alpha = \dfrac{\left|\vec{\mathbf{s}_\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{n}_\rho}\right|}{\left|\vec{\mathbf{s}_\mathbf{p}}\right| \cdot \left|\vec{\mathbf{n}_\rho}\right|}$

Odchylka dvou rovin: $\cos\alpha = \dfrac{\left|\vec{\mathbf{n}_\rho} \cdot \vec{\mathbf{n}_\tau}\right|}{\left|\vec{\mathbf{n}_\rho}\right| \cdot \left|\vec{\mathbf{n}_\tau}\right|}$

Vzdálenost bodu a roviny: $v = \dfrac{|aX_0 + bY_0 + cZ_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ $\qquad A = [X_0, Y_0, Z_0]$

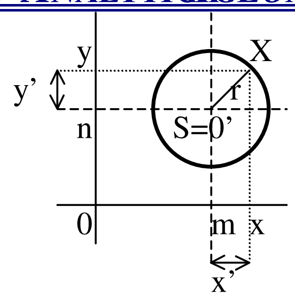
Vzdálenost bodu od přímky: vytvoříme rovinu kolmou k přímce tak, aby procházela bodem A a spočítáme vzdálenost mezi A a průsečíkem přímky a roviny. $\overrightarrow{\mathbf{s}_p} = \overrightarrow{\mathbf{n}_\rho}$, $v = |A \quad \rho \cap p|$

Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek: $v(p,q) = v(A,q)$; $A \in p$

Vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné: $v(p,\rho) = v(A,\rho)$; $A \in p$

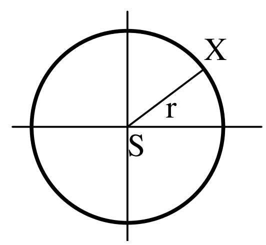
Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin: $v(\rho,\tau) = v(A,\tau)$; $A \in \rho$

35 ANALYTICKÁ GEOMETRIE KRUŽNICE A ELIPSY



Transformační rovnice: $\begin{aligned} x' &= x - m \\ y' &= y - n \end{aligned}$

35.1 KRUŽNICE



Množina všech bodů, které mají od středu (S) stejnou vzdálenost r.

$S = [m, n]$

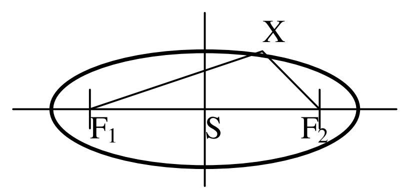
Středová rovnice: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$

Vnitřek kružnice: $x^2 + y^2 < r^2$

Obecná rovnice: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$a = -2m, \quad b = -2n, \quad c = m^2 + n^2 - r^2$

35.2 ELIPSA



Množina bodů, které mají od dvou daných pevných bodů (ohnisek) stálý součet vzdáleností, který se rovná $2a$ ($|F_1X| + |F_2X| = 2a$).

A,B – hlavní vrcholy

C,D – vedlejší vrcholy

S – střed

F_1, F_2 – ohniska

$a = |AS| = |CF|$ – hlavní poloosa

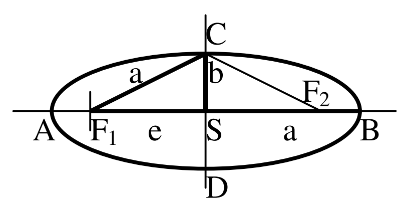
$2a = |AB|$ – hlavní osa

$a^2 = e^2 + b^2$

$b = |CS| = |DS|$ – vedlejší poloosa (vždy menší než hlavní poloosa)

$2b = |CD|$ – vedlejší osa

$|SF_1| = |SF_2| = e$ – excentricita



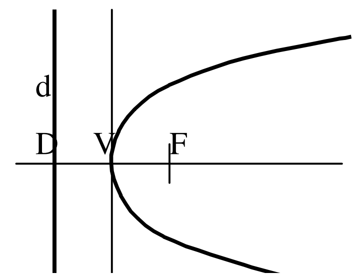
Osová rovnice elipsy: Pro $2a \| O_x$: $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} + \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

Pro $2a \| O_y$: $\dfrac{(x-m)^2}{b^2} + \dfrac{(y-n)^2}{a^2} = 1$

Obecná rovnice elipsy: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

36 ANALYTICKÁ GEOMETRIE PARABOLY

Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od pevného bodu (ohniska) a dané přímky (řídící přímka), která daným bodem neprochází.



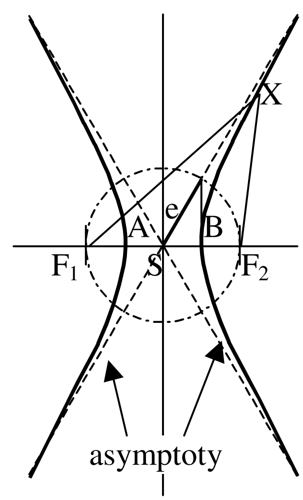
F – ohnisko
d – řídící přímka
V – vrchol
VF – osa paraboly
p – parametr: $\frac{p}{2} = |DV| = |FV|$

Vrcholová rovnice: $O \equiv O_x,\ F \in O^+$	$(y-n)^2 = 2p(x-m)$	inverzní kvadratická fce
$O \equiv O_x,\ F \in O^-$	$(y-n)^2 = -2p(x-m)$	
$O \equiv O_y,\ F \in O^+$	$(x-m)^2 = 2p(y-n)$	graf kvadratické funkce
$O \equiv O_y,\ F \in O^-$	$(x-m)^2 = -2p(y-n)$	graf záporné kvadr. fce

37 ANALYTICKÁ GEOMETRIE HYPERBOLY

Množina všech bodů, které mají tu vlastnost, že absolutní hodnota rozdílu jejich vzdáleností od 2 daných pevných bodu (ohnisek) je konstantní ($\big||XF_1| - |XF_2|\big| = 2a$).

A,B – vrcholy paraboly
$|AB| = 2a$ – hlavní osa ($|AS| = a$)
b – vedlejší poloosa
F_1,F_2 – ohniska
e – excentricita $= |SF|,\ e^2 = a^2 + b^2$
nemusí platit $a>b$



Osové rovnice: Pro $2a \equiv O_x$: $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} - \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

Pro $2a \equiv O_y$: $\dfrac{(y-n)^2}{a^2} - \dfrac{(x-m)^2}{b^2} = 1$

Obecná rovnice: $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$

Rovnice asymptot:

$y = \pm kx + q$ každá hyperbola má 2 asymptoty

$k = \operatorname{tg}\alpha$ pro $2a \equiv O_x$: $\dfrac{b}{a}$, pro $2a \equiv O_y$: $\dfrac{a}{b}$

Rovnoosá hyperbola: $a=b$

Větve leží v I. a III. kvadrantu: $xy = \frac{1}{2}a^2$ – graf lomené funkce

Větve leží v II. a IV. kvadrantu: $xy = -\frac{1}{2}a^2$ – graf záporné lomené fce

38 VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMKY A KUŽELOSEČKY

Počet průsečíků kuželosečky s přímkou:

kružnice a elipsa:
- 2 body **sečna**
- 1 bod **tečna**
- 0 bodů **vnější přímka**

parabola:
- 2 body **sečna**
- 1 bod
  - rovnoběžná s osou **protíná v 1 bodě**

protíná osu **tečna**

0 bodů **vnější přímka**

hyperbola:

2 body **sečna**

1 bod

rovnoběžná s asymptotou **protíná v 1 bodě**

protíná asymptotu **tečna**

0 bodů **vnější přímka**

38.1 TEČNA KUŽELOSEČKY V JEJÍM BODĚ

Bod dotyku: $[X_1, Y_1]$

Kružnice: $(x-m)(X_1-m)+(y-n)(Y_1-n)=r^2$

Elipsa: $\dfrac{(x-m)(X_1-m)}{a^2}+\dfrac{(y-n)(Y_1-n)}{b^2}=1$

Parabola: $(y-n)(Y_1-n)=p(x-m)+p(X_1-m)$

Hyperbola: $\dfrac{(x-m)(X_1-m)}{a^2}-\dfrac{(y-n)(Y_1-n)}{b^2}=1$

39 VARIACE A PERMUTACE

$n! = 1\cdot 2\cdot ...(n-1)\cdot n$ – faktoriál

Kombinatorické pravidlo součinu: počet všech uspořádaných dvojic, u nichž pro volbu prvního prvku máme n_1 možností a druhého n_2 možností, je roven součinu $n_1 \cdot n_2$.

Variace: $V_k(n)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$ je k-tice vytvořená z n prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou. Záleží na pořadí ($'123' \neq '321'$).

Permutace: $P(n)=n!$ je zvláštní případ variace, kdy se $k=n$.

Variace s opakováním: $V'_k(n)=n^k$ je k-tice vytvořená z n prvků tak, že každý se v ní může vyskytovat nejvýše k-krát.

Permutace s opakováním: $P'_{n_1,n_2,...n_p}(n)=\dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot ...n_p!}$, kde n_1 je počet prvků 1. druhu, n_2 2. druhu a … n_p p. druhu, přičemž platí, že $n_1+n_2+\ldots n_p=n$. Všechny prvky téhož druhu jsou stejné a žádné 2 prvky různých druhů nejsou stejné.

40 KOMBINACE

Kombinace: $C_k(n)=\dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$ je k-tice vytvořená z n prvků tak, že každý z prvků se v ní vyskytuje nejvýše jednou. Nezáleží na pořadí ($'123' \equiv '321'$). Vztah mezi kombinacemi a variacemi: $C_k(n)=\dfrac{V_k(n)}{k!}$

Kombinační číslo: $\dbinom{n}{k}=C_k(n)$

Kombinace s opakováním: $C'_k(n)=\dbinom{n+k-1}{k}=\dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!\cdot k!}$ je k-tice vytvořená z n prvků tak, že každý prvek se v ní může opakovat maximálně k-krát.

40.1 VLASTNOSTI KOMBINAČNÍCH ČÍSEL

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$$

$$\binom{n}{1}=n$$

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

40.2 PASCALŮV TROJÚHELNÍK

$n=0$	$\binom{0}{0}$	1
$n=1$	$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$	1 1
$n=2$	$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$	1 2 1
$n=3$	$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$	1 3 3 1
$n=4$	$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$	1 4 6 4 1

40.3 BINOMICKÁ VĚTA

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n}b^n$$

k-tý člen binomického rozvoje: $c_k=\binom{n}{k-1}\cdot a^{n-k+1}\cdot b^{k-1}$

Pro výpočet mnohočlenu n-tého stupně.

Příklad: V mnohočlenu $\left(\frac{1}{3x}-x^3\right)^{11}$ vypočítej koeficient u x^{25}.

$$c\cdot x^{25}=\binom{11}{k-1}\cdot(3x)^{-(12-k)}\cdot(-x)^{3(k-1)}$$

$$c\cdot x^{25}=\binom{11}{k-1}\cdot 3^{k-12}\cdot x^{k-12}\cdot(-1)^{3k-3}\cdot x^{3k-3}$$

$$x^{25}=x^{4k-15}\Rightarrow k=10$$

$$c=\binom{11}{9}\cdot 3^{-2}\cdot(-1)^{27}=-\tfrac{55}{9}$$

41 ZÁKLADY PRAVDĚPODOBNOSTI

Náhodný pokus: ovlivněn náhodnými činiteli.
Náhodný jev: výsledek náhodného pokusu, o kterém můžeme rozhodnout zda je či není pravdivý.
Deterministický pokus: při dodržování daných podmínek vede vždy ke stejnému výsledku.

Pravděpodobnost náhodného jevu: $P(A)=\dfrac{m_A}{n}$, kde m_A je počet výsledků příznivých jevu A a n je počet všech možných výsledků daného pokusu.

Statistická definice pravděpodobnosti: $P(A)=\frac{n_A}{n}$, kde n_A je absolutní četnost a n je celkový počet (z n provedených pokusů je n_A příznivých).

Pravděpodobnost sjednocení jevů: jevy musejí být neslučitelné $A \cap B = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$A \cap A' = 0 \Rightarrow P(A \cup A') = 1 \Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$$

Pravděpodobnost průniku jevů: Pokud jsou jevy *A, B, C* nezávislé, platí $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Binomická rozdělení: mějme n **nezávislých** pokusů, z nichž každý skončí buď zdarem s pravděpodobností p nebo nezdarem s pravděpodobností q, potom pravděpodobnost, že k jevů skončí zdárně vypočítáme: $P(A_k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$.

42 ZÁKLADY STATISTIKY

Jednotka: každá musí být přesně určena místně, časově, věcně

Soubor: tvořen všemi jednotkami

Rozsah souboru: počet všech jednotek

Znak: vlastnosti, které u dané jednotky sledujeme (**kvalitativní** – odpovídáme slovně, **kvantitativní** – odpovídáme číslem)

Absolutní četnost: počet všech jednotek v souboru, u nichž byl daný jev zjištěn

Relativní četnost: $P(A)=\frac{n_A}{n}$

42.1 CHARAKTERISTIKY POLOHY

Aritmetický průměr: $\overline{x_a} = \frac{\sum x_i}{n}$

Vážený aritmetický průměr: $\overline{x_a} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i}$

Modus $\hat{x}$**:** je střední hodnota, která odpovídá hodnotě údaje nejčastěji se vyskytujícího v daném souboru.

Medián $\tilde{x}$ **:** hodnota prostředního členu **seřazeného** statistického souboru.

42.2 CHARAKTERISTIKY VARIABILITY

Průměrná odchylka: průměrná odchylka od průměru: $\overline{d} = \frac{\sum |x_i - \overline{x}|}{n}$

Vážená průměrná odchylka: $\overline{d} = \frac{\sum |x_i - \overline{x}| \cdot n_i}{\sum n_i}$

Rozptyl: $\operatorname{var} x = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n}$

Vážený rozptyl: $\operatorname{var} x = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i}{\sum n_i}$

Směrodatná odchylka: $\sigma = \sqrt{\operatorname{var} x}$

43 Aritmetická posloupnost

43.1 Posloupnost

Posloupnost je zobrazení všech přirozených čísel do množiny všech reálných čísel (**nekonečná** posloupnost reálných čísel) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$.

Posloupnost je zobrazení prvních n přirozených čísel do R (**konečná** posloupnost R) $\{a_n\}_{n=1}^{k} = a_1, a_2, \ldots a_k$.

Posloupnost rostoucí: $r < s \Leftrightarrow a_r < a_s \qquad r, s \in N$

Posloupnost klesající: $r < s \Leftrightarrow a_r > a_s \qquad r, s \in N$

43.2 Aritmetická posloupnost

$a_{n+1} = a_n + d$, ***d*** diferenciál

$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ – jakýkoliv člen posloupnosti je aritmetickým průměrem členu předcházejícího a následujícího

N-tý člen posloupnosti: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Součet prvních *n* členů: $s_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$

44 Geometrická posloupnost

$a_{n+1} = a_n \cdot q \qquad q \neq 0$

$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

N-tý člen posloupnosti: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Součet prvních *n* členů: $s_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \qquad q \neq 1$

44.1 Využití posloupnosti

Úročitel: $r = 1 + p$, p přírůstek (%)

Pravidelný růst: $a_n = ar^n$, a počátek

Růst s příspěvky: $a_n = ar^n + b \cdot \dfrac{r^n - 1}{r - 1}$, b příspěvky

Jednoduché úrokování (vkládáme po měsíci): $a_n = n \cdot a + a \cdot p \cdot \frac{1}{12} \cdot \dfrac{n(1+n)}{2}$

Složité úrokování (roční): $a_n = a \cdot \dfrac{r^n - 1}{r - 1}$

45 Řady

Nekonečná geometrická řada: geometrická posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Součet geometrické řady: $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \dfrac{a_1}{1 - q} \qquad |q| < 1$, existuje-li tato limita je **konvergentní**, jinak je **divergentní**.

46 LIMITA, SPOJITOST A DERIVACE FUNKCE

46.1 LIMITA

Limita posloupnosti: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má konečnou (vlastní) limitu a právě tehdy, když ke každému libovolně zvolenému kladnému ε existuje číslo n_0 takové, že pro každé $n>n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$. Zápis: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \quad a \in R$. Je-li konečné číslo reálné, tedy jedná se o vlastní limitu, je posloupnost **konvergentní**. Nemá-li konečnou limitu je **divergentní**.

Limita funkce: Funkce f má v bodě a limitu L, jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu L existuje okolí bodu a takové $\forall x \in U(a) - \{a\};\ f(x) \in U(L)$. Zápis: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

Limita zleva: $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{x} = 1$, **zprava:** $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$

Nevlastní limita: $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{x} = 1 \wedge \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$

Limita v nevlastním bodě: $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0,\ \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Věty o limitách:
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$
$$\lim_{n\to\infty}(\text{konst.} \cdot a_n) = \text{konst.} \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$
$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} = 0$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(kx)}{kx} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Neurčité výroky: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, 0^0, \infty^0, \infty - \infty$

46.2 SPOJITOST FUNKCE

Okolí bodu: $(a-\delta, a+\delta) \qquad \delta > 0$ nebo $|x-a| < \delta$, zápis $U(a,\delta)$

Levé okolí bodu: $\langle a-\delta, a\rangle \qquad \delta > 0$

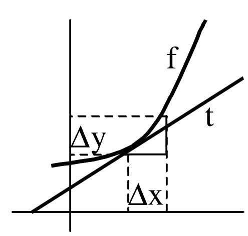
Funkce f je spojitá v bodě a, jestliže k libovolně zvolenému okolí $f(a)$ existuje okolí bodu a takové, že $\forall x \in U(a);\ f(x) \in U(f(a))$.

Funkce f je spojitá v intervalu (a,b), je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

Funkce f je spojitá na $\langle a,b\rangle$, je-li spojitá na (a,b) a v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Funkce f je spojitá v bodě a, má-li v tomto bodě limitu.

46.3 DERIVACE FUNKCE



$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$y'(x_0) = \frac{dy}{dx}$$

y' …1. derivace
y'' … 2. derivace
$y^{(6)}$ … 6. derivace
Jestliže má funkce f v bodě x_0 derivaci je v bodě x_0 spojitá. Obrácená věta neplatí
Funkce f má derivaci v $\langle a,b \rangle$, má-li derivaci v každém bodě (a,b), v bodě a má derivaci zprava a v bodě b zleva.

Je-li funkce f definována v nějakém okolí bodu x_0 a existuje-li $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, má funkce f v bodě x_0 derivaci zleva. (Obdobně platí pro derivaci zprava).

Derivace: $c' = 0$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

goniometrické fce: $(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad x \in R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

$(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} \qquad x \in R - \{k\pi\}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

s konstantou: $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$

sčítání: $(u \pm v)' = u' \pm v'$

násobení: $(uvz)' = u'vz + uv'z + uvz'$

dělení: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

složená fce: $(f[g(x)])' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

exponenciální fce: $(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

logaritmické fce: $(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad x > 0$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \qquad x > 0, a > 0, a \neq 1$

implicitní funkce: $y = x^{\sin x}$

$\ln y = \sin x \cdot \ln x$

$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$

$y' = \left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot y$

$y' = \left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot x^{\sin x}$

Derivujeme tak, že členy obsahující x derivujeme normálně a členy obsahující y derivujeme podle y a násobíme y'.

vyšší derivace: $y'' = (y')'$

47 Geometrický a fyzikální význam derivace

Fyzikální: derivace dráhy podle času je okamžitá rychlost, 2. derivace dráhy podle času je okamžité zrychlení

Geometrický: 1. derivace funkce v bodě dotyku je směrnice tečny $y'(x_0) = k_t$

$y - y_0 = k(x - x_0)$

$k_t k_n = -1$

48 Vyšetřovánípr ůběhufunkce

48.1 Monotónnost funkce

Rostoucí: jestliže je v každém bodě intervalu první derivace kladná ($f(x)' > 0$)

Klesající: je-li v každém bodě 1.derivace záporná ($f(x)' < 0$)

Příklad: $y = x^3 - 3x$

$y' = 3x^2 - 3$

rostoucí: $3x^2 - 3 > 0 \Rightarrow (-\infty, -1), (1, +\infty)$

klesající: $3x^2 - 3 < 0 \Rightarrow (-1, 1)$

48.2 Extrémy funkce

Funkce má v x_0 maximum právě tehdy, existuje-li okolí bodu x_0 takové, že pro každé x náležející do tohoto okolí platí, že funkční hodnota je menší nebo rovna funkční hodnotě funkce v x_0. Obdobně platí i pro minimum funkce.

Stacionární body: $f(x)' = 0$ – v těchto bodech má funkce lokální minimum (pokud je $f''(x) > 0$) nebo maximum ($f''(x) < 0$). Pokud je druhá derivace ve stacionárním bodě rovna nule, nejedná se o extrém.

Inflexní bod: $f(x)'' = 0$ – nelze udělat tečnu, funkce konkávní přechází na konvexní.

konkávní funkce: $f(x)'' < 0$ – celý graf leží pod tečnou

konvexní funkce: $f(x)'' > 0$ – celý graf leží nad tečnou

48.3 Vyšetření průběhu funkce

1) Určit definiční obor funkce
   funkce sudá, lichá, periodická
2) Body, v nichž není definována, ale má v nich limitu zprava a zleva
   Limita v nevlastních bodech
3) Průsečíky s osami *x,y*
   Znaménka funkčních hodnot
4) Výpočet I. derivace
   Nulové body I. derivace – stacionární body
   Body, v nichž není derivace definována
5) Intervaly monotónnosti
6) Výpočet II. derivace
   Nulové body II. derivace – inflexní body
   Body, v nichž není derivace definována
7) Lokální extrémy
   Intervaly konvexnosti a konkávnosti
8) Asymptoty

$$y = ax + b$$

$$a = k_{as} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax]$$

9) Obor hodnot funkce
10) Graf funkce

Příklad: $f : y = x^3 - 6x^2 + 9x$

1) D=R

$f(-x) = -x^3 - 6x^2 - 9x = -(x^3 + 6x^2 + 9x)$ – ani sudá, ani lichá

2) $\lim\limits_{x \to \infty}(x^3 - 6x^2 + 9x) = \lim\limits_{x \to \infty} x^3\left(1 - \dfrac{6}{x} + \dfrac{9}{x^2}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty}(x^3 - 6x^2 + 9x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3\left(1 - \dfrac{6}{x} + \dfrac{9}{x^2}\right) = -\infty$

3) průsečík s x: $y = 0$

$x^3 - 6x^2 + 9x = 0$

$x = 0 \vee x = 3$ $\quad [0,0], [3,0]$

průsečík s y: $x = 0$

$y = 0$

$[0,0]$

4) $y' = 3x^2 - 12x + 9$

stacionární body: $y' = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$

5) rostoucí: $y' > 0 \Rightarrow (-\infty,1), (3,+\infty)$ klesající: $y' < 0 \Rightarrow (1,3)$

6) $y'' = 6x - 12$

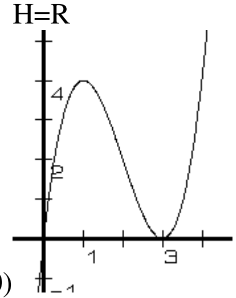
inflexní body: $y'' = 0 \Rightarrow x = 2$

7) $y''_{(1)} = -6$ – lokální maximum [1,4] $y''_{(3)} = 6$ – lokální minimum [3,0]

konvexní: $y'' > 0 \Rightarrow (2,+\infty)$ konkávní: $y'' < 0 \Rightarrow (-\infty,2)$

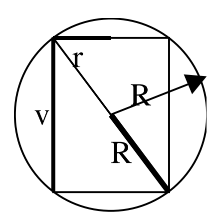
8) $k_{as} = \lim\limits_{x \to \infty} b = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} x^2 = +\infty$

9) H=R

10) 

48.4 GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Příklad: Do koule o poloměru R vepište válec největšího objemu.



$V = \pi r^2 v$

$r^2 + v^2 = 4R^2 \Rightarrow r^2 = 4R^2 - v^2$

$V = \pi(4R^2 - v^2)v$

$V' = 4\pi R^2 - 3\pi v^2$

$4\pi R^2 - 3\pi v^2 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot R$

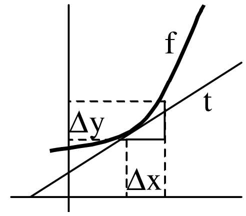
$r^2 = 4R^2 - v^2 \Rightarrow r = \sqrt{4R^2 - \frac{4}{3}R^2} = R\sqrt{\frac{8}{3}}$

$V'' = -6\pi v$

$V''\left(R\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\pi R\sqrt{48} < 0 \Rightarrow$ v tomto bodě je maximum funkce

49 PRIMITIVNÍ FUNKCE, URČITÝ INTEGRÁL

49.1 DIFERENCIÁL FUNKCE



dx – diferenciál argumentu

dy – diferenciál funkce

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$dy = f'(x_0) \cdot dx$$

Výpočet absolutních chyb: dy

Výpočet relativních chyb: $\frac{dy}{y}$

Příklad: Válec má průměr i výšku $80 \pm 0{,}5$ cm. Jaká bude relativní chyba při výpočtu objemu?

$D=80, \quad dD = \pm 0{,}5$

$$V = \pi\left(\tfrac{D}{2}\right)^2 \cdot D = \frac{\pi D^3}{4}$$

$$dV = \tfrac{\pi}{4} 3D^2 \cdot dD$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{3dD}{D} = \frac{1{,}5}{80} = 1{,}87\%$$

49.2 NEURČITÝ INTEGRÁL

Primitivní funkce: $F'(x) = f(x)$, *F(x)* je funkce primitivní k *f(x)*

Neurčitý integrál: $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$, kde $\int f(x) \cdot dx$ je neurčitý integrál, $f(x) \cdot dx$ je integrant a $F(x) + C$ je primitivní funkce. Integrál je opak derivace.

49.3 ZÁKLADNÍ INTEGRÁLY

$$\int 0 \cdot dx = C$$

$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \tfrac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + C$$

$$\int x \cdot dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int c \cdot dx = c \cdot \int dx = cx + C$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int e^x \cdot dx = e^x + C$$

$$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] \cdot dx = \int f(x) \cdot dx \pm \int g(x) \cdot dx + C$$

$$\int c \cdot f(x) \cdot dx = c \cdot \int f(x) \cdot dx$$

49.4 INTEGRAČNÍ METODY

Substituční metody:

$$\int f(ax+b) \cdot dx = \tfrac{1}{a} \int f(t) \cdot dx = \tfrac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C$$

$$t = ax + b$$

$$dt = t' \cdot dx = a \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{a}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \int \tfrac{1}{t} \cdot dt = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C$$

$$t = f(x)$$

$$dt = f'(x) \cdot dx$$

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x) \cdot dx = \int f(t) \cdot dt = F[g(x)] + C$$

$$t = g(x)$$

$$dt = g'(x) \cdot dx$$

Metoda per partes: (po částech)

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\int (uv)' \cdot dx = \int u'v \cdot dx + \int uv' \cdot dx$$

$$uv = \int u'v \cdot dx + \int uv' \cdot dx$$

$$\int u'v \cdot dx = uv - \int uv' \cdot dx$$

Příklad: $\int x \cdot \cos x \cdot dx = \begin{vmatrix} u' = \cos x & u = \sin x \\ v = x & v' = 1 \end{vmatrix} = x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 1 \cdot dx =$

$= x \cdot \sin x + \cos x + C$

Příklad: $\int \ln x \cdot dx = \int 1 \cdot \ln x \cdot dx = \begin{vmatrix} u' = 1 & u = x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{vmatrix} = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$

$= x \cdot \ln x - x + C$

Příklad: $\int e^x \cdot \sin x \cdot dx = \begin{vmatrix} u' = e^x & u = e^x \\ v = \sin x & v' = \cos x \end{vmatrix} = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \cdot dx =$

$= \begin{vmatrix} u' = e^x & u = e^x \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{vmatrix} = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x \cdot dx$

$$\int e^x \cdot \sin x \cdot dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x \cdot dx$$

$$\int e^x \cdot \sin x \cdot dx = \frac{e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x}{2} + C$$

49.5 VÝPOČET URČITÉHO INTEGRÁLU

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Funkce *f(x)* musí být v intervalu <*a,b*> spojitá.

$$\forall c \in \langle a,b \rangle; a < c < b \Rightarrow \int_a^b f(x)\cdot dx = \int_a^c f(x)\cdot dx + \int_c^b f(x)\cdot dx$$

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = -\int_b^a f(x)\cdot dx$$

Při **substituci** musíme přepočítat meze pro *t*:

Příklad: $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx = \begin{vmatrix} t = \sin x & t_1 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ dt = \cos x \cdot dx & t_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{vmatrix} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} t^2 \cdot dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{7}{24}$$

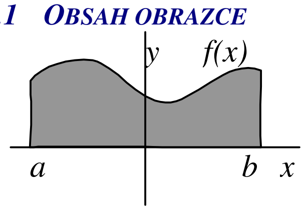
Při metodě **per partes**:

Příklad: $$\int_0^{\pi} x \cdot \sin x \cdot dx = \begin{vmatrix} u' = \sin x & u = -\cos x \\ v = x & v' = 1 \end{vmatrix} = [-x \cdot \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \cdot dx =$$

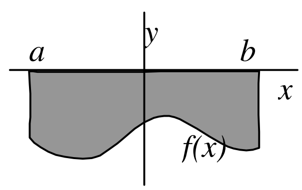
$$= [-x \cdot \cos x + \sin x]_0^{\pi} = \pi$$

50 UŽITÍ INTEGRÁLNÍHO POČTU K VÝPOČTU OBSAHŮ ROVINNÝCH OBRAZCŮ A OBJEMŮ ROTAČNÍCH TĚLES

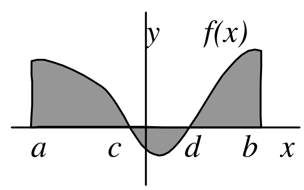
50.1 OBSAH OBRAZCE



$$S = \int_a^b f(x)\cdot dx$$

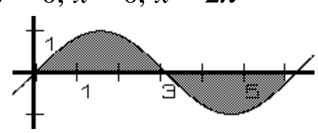


$$S = -\int_a^b f(x)\cdot dx$$

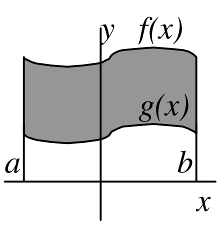


$$S = \int_a^c f(x)\cdot dx - \int_c^d f(x)\cdot dx + \int_d^b f(x)\cdot dx$$

Příklad: Vypočti obsah obrazce vymezeného křivkami: $y = \sin x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2\pi$



$$S = \int_0^{\pi} \sin x - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x = [-\cos x]_0^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 4$$

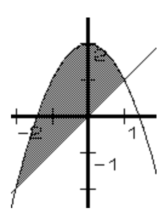


Pro plochu obrazce vymezeného **dvěma křivkami** platí vztah: $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\cdot dx$, tento vzorec platí i v případě, že část plochy leží pod osou *x*.

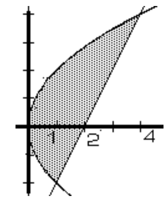
Příklad: $f : y = 2 - x^2,\ g : y = x$

$$2 - x^2 = x \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1$$

$$S = \int_{-2}^{1} \left(2 - x^2 - x\right)\cdot dx = 4{,}5$$



Příklad: $f: y^2 = 4x,\ p: 2x - y - 4 = 0$



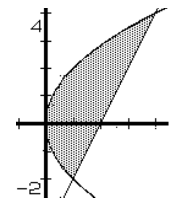
1) Derivujeme podle x

$f: y = \pm 2\sqrt{x},\ p: y = 2x - 4$

Průsečíky: $y^2 = 4x \Rightarrow 4x^2 - 16x + 16 = 4x \Rightarrow x = 1 \vee x = 4$

$$S = 2\int_0^1 2x^{\frac{1}{2}} \cdot dx + \int_1^4 \left(2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 4\right) \cdot dx = 9$$

2) Derivujeme podle y

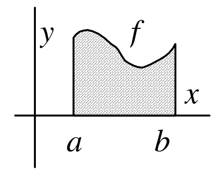


$f: x = \dfrac{y^2}{4},\ p: x = 2 + \dfrac{y}{2}$

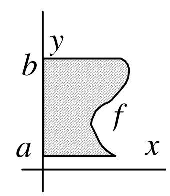
Průsečíky: $x = x \Rightarrow \dfrac{y^2}{4} = 2 + \dfrac{y}{2} \Rightarrow y = -2 \vee y = 4$

$$S = \int_{-2}^{4} \left(2 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{4}\right) \cdot dy = 9$$

50.2 Objemy rotačních těles

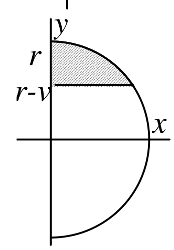


Pro tělesa rotovaná kolem osy x: $V = \pi \int_a^b f^2(x) \cdot dx = \pi \int_a^b y^2 \cdot dx$



Pro tělesa rotovaná kolem osy y: $V = \pi \int_a^b f^2(y) \cdot dy = \pi \int_a^b x^2 \cdot dy$

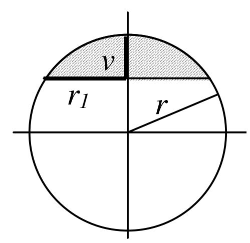
Příklad: Vypočti objem kulové úseče o výšce v, která je částí koule o poloměru r.



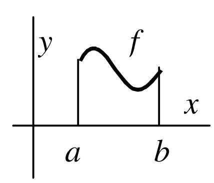
Kružnice: $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2$

$$V = \pi \int_{r-v}^{r} \left(r^2 - x^2\right) \cdot dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{r-v}^{r} = \pi r v^2 - \pi \frac{v^3}{3}$$

Vzorec pro objem kulové úseče: $V = \pi r_1^2 \cdot \frac{v}{2} + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{v}{2}\right)^3$, kde $r_1 = \sqrt{r^2 - (r - v)^2}$. Po dosazení a úpravách: $V = \pi r v^2 - \pi \dfrac{v^3}{3}$



50.3 Délka oblouku rovinné křivky



$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$$

Příklad: Vypočti obvod kruhu o poloměru r.

kruh: $y^2 + x^2 = r^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $\quad y' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{-2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

$$s = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx = 4r \cdot \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx = 4 \cdot \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} \cdot dx =$$

$$= \begin{vmatrix} t = \frac{x}{r} & t_1 = 1 \\ dt = \frac{1}{r} \cdot dx & t_2 = 0 \end{vmatrix} = 4r \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \cdot dx = 4r \cdot [\arcsin t]_0^1 = 2\pi r$$