

3. Matice a determinanty

Teorie matic a determinantů představuje úvod do lineární algebry. Nejrozsáhlejší aplikace mají matice a determinanty při řešení systémů lineárních rovnic. Pojem determinantu zavedl již v roce 1693 německý matematik W. G. Leibniz (1646–1716), ale jeho objev upadl v zapomenutí. V roce 1750 dospěl znovu k pojmu determinantu švýcarský matematik G. Cramer (1704–1752). Všeobecně se začalo v matematice používat determinantů až koncem 18. století. Zasloužili se o to zejména matematici A.-T. Vandermonde (1735–1796) a A. L. Cauchy (1789–1857). Současně s teorií determinantů se rozvíjela teorie matic, jejímž zakladatelem je anglický matematik A. Cayley (1821–1895). Na dalším rozvoji teorie matic se podíleli zejména G. Frobenius (1849–1917), J. J. Sylvester (1814–1897) a K. Weierstrass (1815–1897).

A. ZÁKLADNÍ MATICOVÉ POJMY

Definice 3.1. **Matice** $A = (a_{ij})$ **typu** m/n nad množinou $X \neq \emptyset$ je schema složené z $m \cdot n$ prvků množiny X zapsaných do m řádků a n sloupců. Přesněji matice A typu m/n nad X je zobrazení množiny $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ do množiny X .

Množina X bývá často číselná, tj. $X \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Prvky matic mohou být ale i komplikovanější objekty, například algebraické výrazy, nebo funkce.

Poznámka 3.2. Matici A typu m/n budeme zapisovat ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

nebo jen krátce $A = (a_{ij})$, kde i je řádkový index a j sloupcový index.

Příklad 3.3. Matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

je příkladem matice typu $2/3$ nad množinou $\mathbb{N}$. Platí například, že $a_{23} = 4$, protože prvek a_{23} leží ve druhém řádku a třetím sloupci matice A .

Definice 3.4.

- Je-li $m = n$, nazývá se matice **čtvercová**;
- V obecném případě $m \neq n$ **obdélníková**;
- Množina všech prvků se stejným řádkovým a sloupcovým indexem se nazývá **hlavní diagonála** matice;
- Nulová matice** O je matice, jejíž všechny prvky jsou nuly;
- Jednotková matice** E je čtvercová matice, jejíž prvky mimo hlavní diagonálu jsou nuly a prvky na hlavní diagonále jsou rovny jedné;
- Matice A se nazývá **trojúhelníková matice**, (přesněji **horní trojúhelníková**), pokud pro libovolné dva indexy i, j platí $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$. Horní trojúhelníková matice má nuly pod hlavní diagonálou;
- Analogicky definujeme **dolní trojúhelníkovou matici**;
- Dvě matice A, B se rovnají, když mají stejný typ a pro libovolné indexy i, j platí $a_{ij} = b_{ij}$. Pak píšeme $A = B$.

B. OPERACE S MATICEMI

Maticová algebra je jednoduchá.

Definice 3.5. (Sčítání matic) Matice A, B lze sečíst, když mají stejný typ m/n . Pak výsledek $A + B$ je matice $C = (c_{ij})$ typu m/n , kde

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \quad (3.1)$$

Definice 3.6. (Násobení matice číslem) Každou matici A typu m/n lze vynásobit prvkem $c \in X$. Výsledkem cA je matice $C = (C_{ij})$ typu m/n , kde

$$c_{ij} = c \cdot a_{ij}. \quad (3.2)$$

Definice 3.7. (Odečítání matic) Odečítání matic A, B lze pak formálně definovat vztahem

$$A - B = A + (-1)B. \quad (3.3)$$

Definice 3.8. (Násobení matic) Pro násobení matic platí komplikovanější vztahy. Předně dvě matice A, B lze vynásobit v tomto pořadí, tj. vytvořit součin $A \cdot B$, když typy matic na sebe navazují v následujícím smyslu: pokud typ A je m/k , typ B je k/n , pak typ $A \cdot B$ je m/n . Výsledkem násobení je tedy matice $C = (c_{ij})$ typu m/n , přičemž pro c_{ij} platí

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^k a_{is}b_{sj}. \quad (3.4)$$

Prvek ležící v i -tém řádku a j -tém sloupci výsledné matice tedy získáme tak, že procházíme i -tý řádek v matici A a jeho prvky postupně násobíme prvky ležícími v j -tém sloupci matice B a vytvořené součiny posčítáme.

Definice 3.9. (Transponování matice) Libovolnou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n lze transponovat. Výsledkem transpozice je matice $A^T = (a_{ji})$ typu n/m .

Pro operace s maticemi platí všechny typy asociativních zákonů, distributivní zákony $A(B+C) = AB+AC$ a $(A+B)C = AC+BC$ a pro sčítání matic platí i zákon komutativní. Násobení matic ale komutativní není. Jednotková matice E má podobnou vlastnost jako jednička: $A \cdot E = E \cdot A = A$. Analogicky pro nulovou matici platí: $A \cdot O = O \cdot A = O$. Chování součinu vzhledem k transpozici popisuje vztah $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Nyní demonstrujme algoritmus násobení matic podle vztahu (3.4) na příkladu.

Příklad 3.10. Nechť jsou dány dvě matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Určete součin $A \cdot B$ a $B \cdot A$. Zamyslete se nad tím, zda pro násobení matic platí, nebo neplatí komutativní zákon.

Řešení.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+3 & 3+0+6 \\ 2+2+1 & 6+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 0+3 & 3+3 \\ 2+0 & 0+0 & 6+0 \\ 1+4 & 0+2 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 6 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Z uvedeného příkladu je ihned patrné, že pro násobení matic obecně neplatí komutativní zákon, tj. $A \cdot B \neq B \cdot A$. Výsledné matice mají dokonce úplně odlišné typy.

C. DETERMINANTY

Definice 3.11. Buď X množina, $f : X \rightarrow X$ bijekce. Pak f se nazývá **permutace množiny X** . Je-li $X = \{1, \dots, n\}$, zapisujeme permutaci symbolicky $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$, přičemž $f(s) = i_s$, $s = 1, \dots, n$. Buďte $i, j \in X$, $i \neq j$. Řekneme, že dvojice $[i, j]$ je inverze v f , když $i < j \wedge f(i) > f(j)$. Klademe pak

$$\operatorname{sgn}(f) = (-1)^k, \quad (3.5)$$

kde k je počet inverzí v f .

Definice 3.12. **Determinant čtvercové matice $A = (a_{ij})$** typu n/n definujeme vztahem

$$\det A = \sum_f \operatorname{sgn}(f) \cdot a_{1f(1)} \cdot \dots \cdot a_{nf(n)}, \quad (3.6)$$

kde součet probíhá všechny permutace f množiny $\{1, \dots, n\}$.

Poznámka 3.13. Místo $\det A$ někdy píšeme $|A|$.

Sarrusovo pravidlo. Pro $n = 2, 3$ lze definiční vztah snadno rozepsat a upravit na tvar

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (3.7)$$

a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \quad (3.8)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}). \quad (3.9)$$

Výpočet podle vztahu (3.7) resp. (3.8) nazýváme výpočtem podle Sarrusova pravidla (podle francouzského matematika P. F. Sarruse (1798–1858)).

Elementární řádkové úpravy. Řádkovými elementárními transformacemi matice nazýváme následující úpravy:

- záměna dvou řádků;
- vynásobení řádku *nenulovým* číslem;
- přičtení řádku k jinému řádku;
- libovolnou kombinaci úprav a), b), c).

Analogicky definujeme sloupcové elementární transformace. Kombinujeme-li řádkové i sloupcové transformace, nazýváme tyto úpravy elementární transformace matice.

Následující věta popisuje vlastnosti determinantu, které jsou důležité pro jeho výpočet. Zejména popisuje, jaký vliv má provedení jednotlivých transformací na hodnotu determinantu.

Věta 3.14. (základní vlastnosti determinantů)

1. Transpozicí matice se hodnota determinantu nezmění.
Důsledek: Libovolné tvrzení platící pro řádky, platí i pro sloupce a naopak.
2. Existuje-li v matici nulový řádek nebo nulový sloupec, pak je její determinant roven nule.
3. Existují-li v matici dva stejné řádky, nebo dva stejné sloupce, pak determinant této matice je roven nule.
4. Nechť matice B vznikla z matice A záměnou dvou řádků, nebo sloupců. Pak $\det(B) = -\det(A)$.
5. Nechť matice B vznikla z matice A vynásobením jednoho řádku, nebo sloupce číslem c . Pak $\det(B) = c \cdot \det(A)$.
6. Determinant matice se nezmění, pokud k nějakému jejímu řádku, (nebo sloupci), přičteme nenulový násobek jiného jejího řádku, (nebo sloupce).
7. Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na hlavní diagonále.
8. Každou matici lze pomocí konečného počtu řádkových transformací převést na trojúhelníkový tvar.

Tvrzení obsažená ve Větě 3.14 nám poskytují jednoduchý návod, jak hodnotu determinantu určit. Pomocí elementárních transformací převedeme matici na horní trojúhelníkovou matici. Jednotlivé transformace sice mohou měnit hodnotu determinantu, ale podle Věty 3.14 víme k jakým změnám dojde. Hodnota determinantu je pak podle vlastnosti 7 Věty 3.14 rovna součinu prvků na hlavní diagonále. Výpočet determinantu lze provést i pomocí následující metody.

Definice 3.15.

1. Buď $A = (a_{ij})$ matice typu m/n . Každá matice B , která vznikne z A vynecháním některých řádků a některých sloupců se nazývá **submatice** matice A .
2. Determinant čtvercové submatice se nazývá **subdeterminant**, nebo též **minor** matice A . Buď A čtvercová matice typu n/n .
3. Subdeterminant matice vzniklé vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce v matici A označme A_{ij} . Číslo $D_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$ nazýváme **algebraický doplněk prvku** a_{ij} .

Věta 3.16. (Laplaceova věta) Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice typu n/n , kde $n \geq 2$. Pak

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{ik} D_{ik} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} A_{ik} \quad (3.10)$$

a

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{kj} D_{kj} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} A_{kj}. \quad (3.11)$$

Vztah (3.10) se nazývá rozvoj podle i -tého řádku, vztah (3.11) rozvoj podle j -tého sloupce.

Příklad 3.17. Vypočítejte determinant matice A následujícími metodami:

- a) pomocí Sarrusova pravidla;
- b) převodem na trojúhelníkovou matici;
- c) rozvojem podle druhého řádku.

Matice A je dána vztahem

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \\ -5 & 4 & -9 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

- a) Podle Sarrusova pravidla je

$$\begin{aligned} \det(A) &= [2 \cdot 6 \cdot (-9) + (-3)(-7)(-5) + 4 \cdot 4 \cdot 8] - [8 \cdot 6 \cdot (-5) + 4(-3)(-9) + 4(-7)3] = \\ &= (-108 - 105 + 128) - (-240 - 56 + 108) = -85 + 188 = 103. \end{aligned}$$

- b) Pomocí elementárních transformací a Věty ?? platí

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \\ -5 & 4 & -9 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 2 & 12 & -23 \\ 0 & -7 & -22 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 0 & 12 & -23 \\ 0 & 0 & 103 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{24} (2 \cdot 12 \cdot 103) = 103. \end{aligned}$$

- c) Podle Laplaceovy věty 3.16 platí

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \\ -5 & 4 & -9 \end{vmatrix} = (-4) \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -5 & -9 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= (-4)(27 - 32) + 6(-18 + 40) + 7(8 - 15) = 20 + 132 - 49 = 103. \end{aligned}$$

D. INVERZNÍ MATICE

Definice 3.18. Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice typu n/n . Čtvercová matice B typu n/n se nazývá **inverzní** k matici A , když $A \cdot B = B \cdot A = E$.

Na první pohled není z uvedené definice zřejmé, zda matice B inverzní k A existuje vždy, zda je určena jednoznačně a jak tuto matici vypočítat. K formulaci odpovědi nám pomůže teorie determinantů.

Definice 3.19. K matici $A = (a_{ij})$ typu n/n vždy existuje matice $A^* = (D_{ij})^T$, tzv. **adjungovaná matice** k matici A . Vznikne tak, že každý prvek v matici A nahradíme jeho algebraickým doplňkem a matici transponujeme.

Věta 3.20. (O inverzní matici) Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice typu n/n . Pak platí

- a) **Inverzní matice k A existuje právě tehdy, když $\det(A) \neq 0$.**
- b) V případě, že inverzní matice existuje, je určena jednoznačně a označuje se A^{-1} .
- c) Inverzní matici lze pak vypočítat podle vzorce

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* \tag{3.12}$$

Pro inverzní matici platí řada zákonitostí. Uvedme aspoň dvě nejpoužívanější.

Poznámka 3.21. Platí

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad \text{a} \quad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Rovněž existuje alternativní možnost výpočtu inverzní matice. Je založena na teorii elementárních transformací matic.

Věta 3.22. Nechť $[A|E]$ je matice typu $n/2n$ vzniklá tak, že za matici A napíšeme jednotkovou matici E , viz Příklad 3.23. Pak existuje posloupnost řádkových elementárních transformací, která převede matici $[A|E]$ na matici $[E|B]$ a platí $B = A^{-1}$.

Příklad 3.23. Vypočtěte inverzní matici A^{-1} k matici A , kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Předně zjistíme, zda je matice A regulární. Některou z metod pro výpočet determinantu vypočteme, že $\det A = -5$. Podle Věty 3.20 existuje k matici A matice inverzní. Tuto matici můžeme vypočítat dvěma způsoby.

První možnost výpočtu je založena na Větě 3.20. Platí

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \\ &= \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Druhá možnost výpočtu je založena na Větě 3.22. Platí

$$\begin{aligned} [A|E] &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 15 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right) = [E|B]. \end{aligned}$$

Podle Věty 3.22 je $B = A^{-1}$.