

Podmíněná pravděpodobnost

$$p_{ij}^m = P\{X_m = j \mid X_{m-1} = i\}$$

– se nazývá pravděpodobností přechodu M. řetězce ze stavu i do stavu j v m -tém kroku.

Matice pravděpodobností přechodu v m -tém kroku

$$T = (p_{ij}), \text{ resp. } T_m = (p_{ij}^m)$$

– **Homogenní řetězec** - nezávisí na umístění v čase

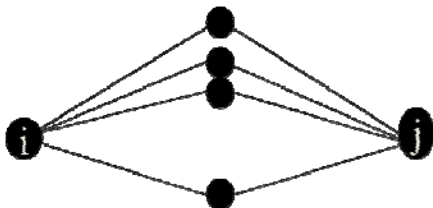
Nehomogenní řetězec - závisí na umístění v čase

Markovská rovnice

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_k p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)}$$

Matricové vyjádření Markovovy rovnice:

$$T^{(n)} = T^n.$$



Definice 1. Necht $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ je konečná množina, $\mathbb{P}$ je matice typu $k \times k$ s nezápornými prvky p_{ij} splňující $\sum_{j=1}^k p_{ij} = 1$ pro každé $i = 1, \dots, k$. Posloupnost náhodných veličin $X = (X_0, X_1, \dots)$ se nazývá homogenní Markovův řetězec s přechodovou maticí $\mathbb{P}$ jestliže pro každé n přirozené a pro každá $i, j, i_{n-1}, \dots, i_0 \in \{1, \dots, k\}$ platí

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = s_j \mid X_n = s_i, X_{n-1} = s_{i_{n-1}}, \dots, X_0 = s_{i_0}) = \\ = P(X_{n+1} = s_j \mid X_n = s_i) = p_{ij}, \end{aligned} \quad (1)$$

kde P značí pravděpodobnost.

Přívlastek homogenní, ze kterého vyplývá, že p_{ij} v (1) nezávisí na n , budeme dále vynechávat. Rovnosti (1) se říká Markovská vlastnost. Lze ji interpretovat tak, že k předpovědi toho, co se stane v čase $n+1$, stačí uvažovat

co se stane v čase n , zatímco časové okamžiky $0, \dots, n-1$ nedávají žádnou doplňující informaci. Toto je vlastnost modelů, kterými se budeme zabývat v této kapitole.

Vedle přechodové matice je další charakteristikou Markovova řetězce počáteční rozdělení $\xi^{(0)}$, píšeme-li

$$\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}),$$

kde $\xi_i^{(n)} = P(X_n = s_i)$.

Věta 1. Platí $\xi^{(n)} = \xi^{(0)} \mathbb{P}^n$ pro každé n přirozené.

Důkaz: Matematickou indukcí. Pro $n = 1$ vyjdeme ze vztahu

$$P(X_1 = s_j) = \sum_{i=1}^k P(X_1 = s_j \mid X_0 = s_i) P(X_0 = s_i),$$

který představuje právě j -tý prvek vektoru $\xi^{(1)} = \xi^{(0)} \mathbb{P}$. Indukční krok užívá stejný argument: je-li $\xi^{(n)} = \xi^{(0)} \mathbb{P}^n$, potom $\xi^{(n+1)} = \xi^{(n)} \mathbb{P} = \xi^{(0)} \mathbb{P}^{n+1}$.

Prvky mocniny $\mathbb{P}^n$ značíme $p_{ij}^{(n)}$, vzhledem k tvrzení věty 1 je lze interpretovat jako pravděpodobnosti přechodu řetězce ze stavu i do stavu j v n krocích.

Definice 2. Řekneme, že stav s_j je dosažitelný ze stavu s_i , jestliže existuje n přirozené tak, že $P(X_n = s_j \mid X_0 = s_i) > 0$. Markovův řetězec je nerozložitelný, je-li libovolný stav dosažitelný z libovolného jiného stavu. Perioda $d(s_i)$ stavu s_i je definována jako největší společný dělitel množiny $\{n \geq 1; p_{ii}^{(n)} > 0\}$. Je-li $d(s_i) = 1$ nazývá se stav s_i aperiodický. Markovův řetězec je aperiodický jsou-li všechny jeho stavy aperiodické. Jinak se nazývá periodický.

Příklad 1. Zjednodušený model počasí se dvěma stavy $s_1 = \text{„deštivo“}$, $s_2 = \text{„slunečno“}$ je založen na předpokladu, že předpověď na zítřejší den se odvíjí od dnešního dne. Uvažme např. přechodovou matici

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

řetězec s touto přechodovou maticí je zřejmě nerozložitelný a aperiodický neboť všechny prvky matice $\mathbb{P}$ jsou nenulové.

Příklad 2. Nezávisle házíte hrací kostkou, výsledky Y_i , $i = 0, 1, \dots$ představují počet bodů. Tedy stavový prostor $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Položme $X_0 = Y_0$, dále $X_{i+1} = \max\{X_i, Y_{i+1}\}$, $i = 0, 1, \dots$. Markovův řetězec $X = (X_0, X_1, \dots)$ na S není nerozložitelný, neboť ze stavu 6 není dosažitelný žádný jiný stav než opět 6. říkáme, že X je rozložitelný.

Příklad 3. Uvažme náhodnou procházku ve vesnici se čtyřmi ulicemi, které tvoří strany čtverce. Chodec ve vrcholu čtverce jde s pravděpodobností $1/2$ vlevo nebo vpravo. Označme vrcholy $S = \{1, 2, 3, 4\}$, matice pravděpodobností přechodu má tvar

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Zřejmě všechny stavy jsou periodické s periodou 2 a Markovův řetězec náhodné procházky je periodický.

Věta 2. *Nechť X je nerozložitelný aperiodický Markovův řetězec, potom existuje N přirozené tak, že $p_{ij}^{(n)} > 0$ pro každé $i, j \in \{1, \dots, k\}$ a každé $n \geq N$.*

Důkaz: Nejdříve ukážeme tvrzení v případě $i = j$. Pro $s_i \in S$ buď $A_i = \{n \geq 1; p_{ii}^{(n)} > 0\}$. Z aperiodicity plyne, že největší společný dělitel A_i je roven jedné. Dále ukážeme, že A_i je uzavřená vůči sčítání. Tyto dvě vlastnosti již podle známého lemmatu z teorie čísel (Brémaud, 1998, Appendix) mají za následek existenci M_i přirozeného tak, že $p_{ii}^{(n)} > 0$ pro každé $n \geq M_i$. Buďte tedy $n, m \in A_i$, je $P(X_n = s_i | X_0 = s_i) > 0$ a $P(X_{n+m} = s_i | X_n = s_i) > 0$. Odsud s využitím Markovské vlastnosti

$$\begin{aligned} P(X_{n+m} = s_i | X_0 = s_i) &\geq P(X_{n+m} = s_i, X_n = s_i | X_0 = s_i) = \\ &= P(X_{n+m} = s_i | X_n = s_i)P(X_n = s_i | X_0 = s_i) > 0, \end{aligned}$$

takže $n + m \in A_i$, což je uzavřenost A_i vůči sčítání. Položme $M = \max\{M_1, \dots, M_k\}$.

Buď nyní $i \neq j$, z nerozložitelnosti plyne existence n_{ij} přirozeného tak, že $p_{ij}^{(n_{ij})} > 0$. Položme $N_{ij} = M + n_{ij}$. Pro každé $m > N_{ij}$ je podobně jako výše

$$\begin{aligned} P(X_m = s_j | X_0 = s_i) &\geq P(X_m = s_j, X_{m-n_{ij}} = s_i | X_0 = s_i) = \\ &= P(X_m = s_j | X_{m-n_{ij}} = s_i)P(X_{m-n_{ij}} = s_i | X_0 = s_i) > 0. \end{aligned}$$

Tvrzení věty nyní plyne pro $N = \max\{N_{ij}; i, j \in \{1, \dots, k\}\}$.