

"Queuing with Impatient Customers and Indifferent Clerks"
(The title of Barrer's article in Opns. Res., 5, 1957, 644-649)

Roses are red;
Violets are blue
If λ is big,
Then μ is too!
(Student sayings)

4. SYSTÉMY HROMADNÉ OBSLUHY

1. ÚVODNÍ POZNÁMKA:

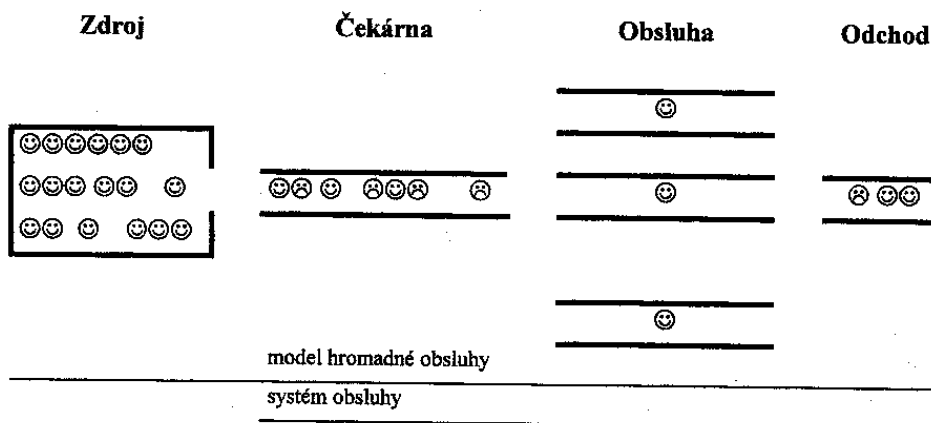
1. Teorie hromadné obsluhy, nebo též tzv. teorie front se zabývá studiem systémů, ve kterých dochází k procesům obsluhy mezi zákazníky a obsluhujícími centry; přitom pojmy "zákazník" a "obsluha" je třeba chápat velmi široce. Zákazníkem může být člověk, výrobek, instituce, plocha půdy, živočich, nebo jakýkoliv prvek, který vyžaduje provedení nějaké operace. Podobně obsluhou může být obchod, stroj, člověk, instituce, servis, zkrátka jakékoliv zařízení, které je schopno požadovanou operaci provést.

2. Teorie hromadné obsluhy využívá počtu pravděpodobnosti, statistiky, matematické analýzy.

3. V tomto textu se uvádějí základní informace o nejjednodušším systému hromadné obsluhy, jehož analýza je založena na aplikaci Markovských procesů.

2. ZÁKLADNÍ POJMY:

1) Na obr. č. 1 je schéma modelu systému hromadné obsluhy



Obr. 1: Základní schéma modelu hromadné obsluhy.

Ze zdroje vstupují zákazníci do systému, který se skládá z fronty a obsluhujících středisek. Zákazník, který v okamžiku vstupu do systému nenalézá volné středisko obsluhy, čeká ve frontě na její uvolnění. Zákazník může být netrpělivý a opustit frontu, aniž se dočkal obsluhy.

2) Cílem analýzy modelu hromadné obsluhy je sladění funkce jeho složek, při kterém se dosahuje maximálního efektu při provozu systému; efekt je zpravidla vyjádřen nějakou funkcí maximalizující zisk, nebo minimalizující ztráty, vzniklé v důsledku čekání zákazníků ve frontě a prostojů obsluhy.

3) Při analýze a optimalizaci systémů hromadné obsluhy se setkáváme s řadou standardních speciálních termínů, pojmů a symbolů, které jsou často používány v různých významech; v následujícím přehledu jsou vyznačeny termíny, které budeme dále v uvedeném smyslu používat:

Zákazník - *jednotka* - prvek - požadavek.

Centrum obsluhy - obsluha - *kanál obsluhy* - místo obsluhy.

Zdroj - množina jednotek - množina požadavků - definiční obor systému.

Obsluha - odbavení - vybavení - vyřazení - obsloužení.

Pořadí při výběru do obsluhy - *priorita* - preference - režim obsluhy.

Chování jednotek ve frontě - *disciplína* - režim fronty.

4) V praxi se vyskytuje značné množství různých typů modelů hromadné obsluhy, jejichž klasifikace je odvislá od vlastností prvků: jednotek, zdroje, kanálů obsluhy, priority, disciplíny. V teorii hromadné obsluhy se užívají následující standardní pojmy:

Otevřený systém: zdroj obsahuje nekonečně mnoho jednotek (v praxi je vhodné někdy považovat za otevřený i systém, jehož zdroj obsahuje velké množství jednotek). Podstatná vlastnost otevřeného systému: jednotky se *nevracejí* po ukončení obsluhy zpět do zdroje.

Uzavřený systém: Zdroj obsahuje konečný počet jednotek. Podstatná vlastnost uzavřeného systému: jednotky se *vracejí* po ukončení obsluhy zpět do zdroje.

Vstupní potok jednotek: Deterministická, nebo náhodná řada okamžiků, ve kterých jednotky vstupují do systému. **Deterministický potok** - vzdálenosti mezi vstupy dvou po sobě vstupujících jednotek jsou pevné, deterministické hodnoty. **Náhodný potok** - vzdálenosti mezi vstupy dvou po sobě vstupujících jednotek jsou náhodně dlouhé; v tom případě je třeba popsat je pomocí funkce rozdělení odpovídající náhodné veličiny s příslušnými charakteristikami (zpravidla průměr a rozptyl).

Míra netrpělivosti jednotky: Je to (zpravidla náhodná) veličina v , popisující disciplínu jednotky; vyjadřuje dobu ochoty čekat ve frontě na obsluhu. Je-li $v = 0$, jednotka je absolutně netrpělivá, není-li v okamžiku jejího vstupu do systému obsluha volná, odpadá ze systému (tzv. Erlangův systém). Je-li $v = \infty$, jednotka čeká na uvolnění kanálu obsluhy neomezeně dlouho. Míru netrpělivosti v je třeba popsat pomocí funkce rozdělení odpovídající náhodné veličiny s příslušnými charakteristikami (zpravidla průměr a rozptyl).

Erlangův systém: Míra netrpělivosti $v = 0$. Typickým příkladem jsou telefonní ústředny - je-li obsazeno, uživatel telefonu zavěsí.

Odpadnutí ze systému: Jednotka odchází neobsloužena, protože se nedočkala uvolnění kanálu obsluhy v důsledku své netrpělivosti.

Priorita: Pravidla, podle kterých jsou čekající jednotky vybírány z fronty do obsluhy:

FIFO - first input, first output - v pořadí příchodu (tedy bez priority).

LIFO - last input, first output - reciproká priorita (např. ve skladech a zásobnících, kde zboží posledně uložené, odchází jako první).

RANDOM - náhodný výběr, např. losem.

Bodová preference - jednotka je vybavena bodovým hodnocením, které vyjadřuje její důležitost, cenu, atp.

Intenzita vstupu: Průměrný počet jednotek, které vstoupí ze zdroje do systému obsluhy za časovou jednotku. U Markovských systémů je standardně označována symbolem λ .

Intenzita obsluhy: Průměrný počet jednotek, které obslouží kanál obsluhy za časovou jednotku. U Markovských systémů je standardně označována symbolem μ .

Výstupní potok: Bodová řada okamžiků, ve kterých jednotky opouštějí systém po skončení obsluhy; zpravidla okamžiky ukončení obsluhy jednotek v kanálech obsluhy.

Kendalova klasifikace: Systém hromadné obsluhy je popsán symboly $X/Y/S/F$, kde

X - Symbol vstupního potoka (M = Markovský (interval mezi vstupy mají exponenciální rozdělení; D = deterministický vstup).

Y - Symbol intenzity obsluhy (M = Markovský (interval mezi výstupy jednotek z obsluhy mají exponenciální rozdělení).

S - Počet kanálů obsluhy.

F - Symbol typu fronty (FIFO, LIFO, ...).

Pravděpodobnost p_n : Pravděpodobnost, že v systému je právě n jednotek (třeba si uvědomit, že je-li např. v systému s jedním kanálem obsluhy právě k jednotek, potom je jedna z nich v obsluze a zbývajících $k - 1$ ve frontě). Pravděpodobnost p_n bývá určována v systémech hromadné obsluhy jako základní charakteristika, pomocí níž se odvozují další charakteristiky efektivity systému; mezi nejdůležitější patří:

p_0 pravděpodobnost, že v systému není žádná jednotka

$\bar{n}$ průměrný počet jednotek v systému

$\bar{n}_f$ průměrný počet jednotek ve frontě (tzv. délka fronty)

$\bar{t}_e$ průměrná doba, kterou jednotka stráví v systému (frontě a obsluze)

$\bar{t}_f$ průměrná doba, kterou jednotka čeká ve frontě

3. OTEVŘENÝ SYSTÉM M/M/1:

3.1. Základní pojmy a symbolika.

Systém M/M/1 má jeden kanál obsluhy, vstup i obsluha jsou markovské. Jednotky vstupují z nekonečného zdroje, míra jejich netrpělivosti je rovna $\nu = \infty$, tj. jednotky čekají na obsluhu libovolně dlouho, neodpadávají ze systému v důsledku netrpělivosti. Po skončení obsluhy se jednotka do zdroje nevrací.

Intenzita vstupu je λ , intenzita obsluhy je μ .

3.2. Matice pravděpodobností přechodu.

Označme E_n stav, ve kterém je v systému (ve frontě a obsluze) právě n jednotek. Zdroj je nekonečný, systém má nekonečně mnoho stavů, tj. $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$.

Označme jako $p_n(t)$ pravděpodobnost, že v okamžiku t je v systému právě n jednotek.

Nechť dt je velmi malý interval času. Potom λdt je pravděpodobnost vstupu a μdt pravděpodobnost obsluhy jednotky během intervalu délky dt .

Stav E_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ může během intervalu dt přejít do stavu E_{i+k} , $k = 0, 1, 2, \dots$; protože je ale okamžik dt velmi malý, přechody mohou existovat jen mezi sousedními stavy, tj. nenulové pravděpodobnosti mohou být pouze u přechodů mezi stavy $E_i \rightarrow E_{i-1}$, $E_i \rightarrow E_{i+1}$.

$E_0 \rightarrow E_0$: V systému není žádná jednotka a po uplynutí doby dt tam má být opět žádná jednotka. Tohoto stavu lze dosáhnout jen tím způsobem, že žádná jednotka nevstoupí, tj. s pravděpodobností $1 - \lambda dt$.

Změna stavu	Pravděpodobnost přechodu
$E_0 \rightarrow E_0$	$1 - \lambda dt$
$E_0 \rightarrow E_1$	λdt
$E_1 \rightarrow E_0$	$(1 - \lambda dt)(\mu dt) = \mu dt$
$E_n \rightarrow E_n$ $n \geq 1$	$(1 - \lambda dt)(1 - \mu dt) + \lambda dt \mu dt = 1 - \lambda dt - \mu dt$
$E_n \rightarrow E_{n-1}$ $n \geq 1$	$(1 - \lambda dt) \mu dt = \mu dt$
$E_n \rightarrow E_{n+1}$ $n \geq 1$	$\lambda dt (1 - \mu dt) = \lambda dt$

$E_0 \rightarrow E_1$: Stav E_1 lze z nulového stavu dosáhnout jedině tak, že do systému vstoupí jedna jednotka, tj. s pravděpodobností λdt .

$E_1 \rightarrow E_0$: Žádná jednotka nevstoupí a zároveň jedna bude během doby dt obsloužena. Oba případy musí nastat zároveň, tedy s pravděpodobností $(1 - \lambda dt)\mu dt = \mu dt - \lambda \mu dt^2$; součin $\lambda \mu dt^2$ je veličina nekonečně malá vzhledem k " dt " a proto ji můžeme zanedbat.

$E_n \rightarrow E_n$, $n \geq 1$: V tomto případě jsou v systému přítomny jednotky a jedna z přítomných je nutně v obsluze. Stav lze dosáhnout dvěma vylučujícími se způsoby: (i) žádná jednotka nevstoupí a žádná nebude obsloužena, nebo (ii) jedna vstoupí a současně jedna bude obsloužena. Výsledná pravděpodobnost bude součtem obou dílčích pravděpodobností $(1 - \lambda dt)(1 - \mu dt) + \lambda dt \mu dt = 1 - \mu dt - \lambda dt + \lambda \mu dt^2 + \lambda \mu dt^2 = 1 - \lambda dt - \mu dt$, když zanedbáme nekonečně malé výrazy se čtvercem dt^2 .

$E_n \rightarrow E_{n-1}$, $n \geq 1$: Jediná možnost - žádná nevstoupí a zároveň jedna bude obsloužena, tj. $(1 - \lambda dt)\mu dt = \mu dt - \lambda \mu dt^2 = \mu dt$.

$E_n \rightarrow E_{n+1}$, $n \geq 1$: Jediná možnost - jedna jednotka vstoupí a žádná zároveň nebude obsloužena, tj. $\lambda dt (1 - \mu dt) = \lambda dt - \lambda \mu dt^2 = \lambda dt$.

Matice pravděpodobností přechodu T má nekonečně mnoho řádků a sloupců:

$T =$	$1 - \lambda dt$	λdt	0	0	0	...
	μdt	$1 - (\lambda + \mu)dt$	λdt	0	0	...
	0	μdt	$1 - (\lambda + \mu)dt$	λdt	0	...
	0	0	μdt	$1 - (\lambda + \mu)dt$	λdt	...
	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...
	0	0	0	0	0	...
	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...

Systém hromadné obsluhy M/M/1 má intenzitu vstupu λ a intenzitu obsluhy μ . Potom podíl

$$\rho = \lambda / \mu$$

nazýváme *intenzitou provozu* systému hromadné obsluhy typu M/M/1.

Charakteristiky systému M/M/1:

Nechť systém hromadné obsluhy M/M/1 má intenzitu vstupu λ a intenzitu obsluhy μ . Nechť intenzita provozu systému je $\rho = \lambda / \mu$ a platí $\rho < 1$, tj. $\lambda < \mu$. Systém má následující charakteristiky (ukazatele efektivnosti):

1. Pravděpodobnost, že v systému (ve frontě a v obsluze) je právě k jednotek
 $P \{n = k\} = p_k = (1 - \rho) \rho^k$
2. Pravděpodobnost, že v systému (ve frontě a obsluze) je alespoň jedna jednotka
 $P \{n > 0\} = 1 - p_0 = \rho$
3. Pravděpodobnost, že v systému (ve frontě a obsluze) je více než N jednotek
 $P \{n > N\} = \rho^{N+1}$
4. Pravděpodobnost, že jednotka bude čekat ve frontě nulovou dobu
 $P \{n = 0\} = p_0 = 1 - \rho$
5. Průměrný počet jednotek v systému (ve frontě a obsluze)
 $E \{n\} = p_0 = \rho / (1 - \rho)$
6. Průměrný počet jednotek ve frontě (průměrná délka fronty)
 $E \{n_f\} = n_f = \rho^2 / (1 - \rho)$
7. Průměrná doba strávená jednotkou v systému (ve frontě a v obsluze)
 $E \{t_c\} = t_c = 1 / (\mu - \lambda)$
8. Průměrná doba strávená jednotkou ve frontě
 $E \{t_f\} = t_f = \lambda / \mu (\mu - \lambda)$
9. Průměrná doba obsluhy
 $E \{t_s\} = t_s = 1 / \mu$