

Přiřazovací problém

Přednáška č. 7

Přiřazovací problém je jednou podtřídou logistických úloh.

Typickým problémem může být nejkratší převoz materiálu od dodavatelů ke spotřebitelům.

		spotřebitelé			
a_i	dodavatelé	S_1	S_2	...	S_m
1	D_1	/	/		
1	D_2				
...	...	/	/		
...	...				
1	D_m	/	/		
	b_j	1	1	...	1

M = Nepřípustná vazba
Obsazujeme ji prohibiční
sazbou M.

/ vzájemné přiřazení, vazby mezi dodavateli a spotřebiteli ($D_i \cdot S_j$)

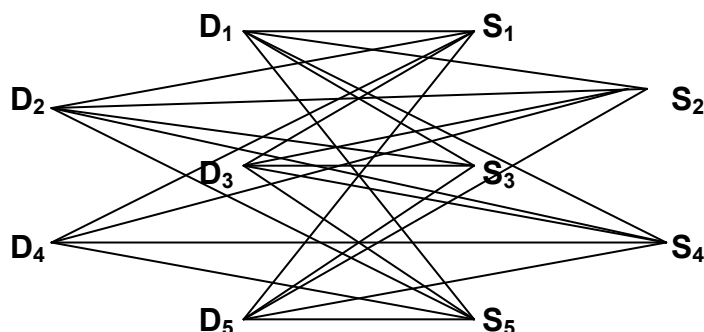
a_i = kapacity dodavatelů = 1

b_j = požadavky spotřebitelů = 1

Předpoklady celého problému nejkratšího přiřazení jsou:

1. kvantifikovatelnost trasy
2. stejný počet dodavatelů a spotřebitelů $\sum D_i = \sum S_j$
3. jednotky kapacit dodavatelů a jednotky požadavků spotřebitelů jsou vzájemně homogenní (v tabulce jsou ohodnoceny 1, tj. jde o celočíselnou úlohu)
4. v rámci dodavatelско-spotřebitelských vazeb existuje nekonečná mezní míra substituce, tj. libovolného spotřebitele S_j můžeme uspokojit libovolnou zakázkou dodavatele D_i

Model může být zobrazen také pomocí **síťového grafu**:



Mezi všemi dodavateli a spotřebiteli existují jednotkové přiřazovací vazby. Počet všech těchto vazeb je právě $D_i \cdot S_j$, neboli $m \cdot n$. V tomto případě tedy 25 vazeb.

Při přiřazovací úloze hledáme právě **m** obsazených polí (nezávislých prvků), jde tedy o silně degenerovanou úlohu.

Příklad: „Leksova matice“

	S	S	S	S	S	a_i
D	1	3	7	15	8	1
D	6	7	19	16	14	1
D	10	18	2	5	10	1
D	13	18	20	16	13	1
D	10	7	4	1	5	1
b_j	1	1	1	1	1	

c_{ij} – sazba

ohodnocení trasy může představovat: - vzdálenost

- čas

- ztrátu

- jiný efekt

minimalizujeme

maximalizujeme

Základním algoritmem, který platí pro jakoukoliv matici, je minimalizace. Maximalizaci získáme minimalizací rozdílů od maxima ($c_{ij}^{\max} - c_{ij}$) pomocí doplňků.

Kühnova matice primárních redukcí (vychází z metod Königa a Egerwarryho):

Přiřazovací úloha je řešena v prosté matici (jako silně degenerovaná dopravní úloha lineárního programování), tj. bez kapacit dodavatelů či spotřebitelů (bez jedniček).

Jelikož matice zobrazuje síťové chování jako celek, jako celistvý systém, můžeme vytvořit redukovanou matici, která má analogické nebo-li identické vlastnosti jako matice původní.

Některé pojmy potřebné znát k této redukční metodě:

- **Nezávislý prvek** (element) – takový prvek, který vybereme jako samotný (nezávislý) prvek pro i-tý řádek nebo j-tý sloupec.
- **Nezávislá nula** - nula, která je sama v řádku.
- **Krycí čára** (Shadow line) – graficky vyjadřuje test optima ($z_j - c_j = \vec{c}_B^T * \alpha_j - c_j$), tj. zamezuje prvkům matice vstup do báze.

Pravidlo – v nezávislé nule se nesmí křížovat 2 krycí čáry.

König-Egerwarryho teorém – minimální počet krycích čar, kterými jsou identifikovány nezávislé nuly tabulky a současně jsou pokryty všechny volné nuly tabulky, je roven maximálnímu počtu nezávislých nul, které lze z tabulky vybrat.

Postup řešení přiřazovacího problému:

1. **Primární redukce** (cílem této redukce je, aby v každém řádku i sloupci byla alespoň jedna nula)
 - a) **Řádková redukce** - od každé řady matice sazeb odečteme minimální prvek této řady
 - b) **Sloupcová redukce** - stejně tak můžeme začít sloupcovou redukcí, tj. od každého sloupce matice sazeb odečteme minimální prvek tohoto sloupce.

Je lhostejné, kterou redukcí začneme. Výsledná matice bude jiná, ale výsledné vlastnosti budou stejné.

Př.: „Leksova matice“

a) řádková redukce

b) sloupcová redukce

1	3	7	15	8
6	7	19	16	14
10	18	2	5	10
13	18	20	16	13
10	7	4	1	5

0	2	6	14	7
0	1	13	10	8
8	16	0	3	8
0	5	7	3	0
9	6	3	0	4

0	1	6	14	7
0	0	13	10	8
8	15	0	3	8
0	4	7	3	0
9	5	3	0	4

Po provedení řádkové redukce (a) není v každém sloupci nula, resp. není ve druhém sloupci, a tudíž musíme provést sloupcovou redukcí (b), po které již v každém řádku i sloupci je alespoň jedna nula.

Nyní provedeme pomocí krycích čar test optima, tj. v každém řádku či sloupci vybereme nezávislou nulu a kolmo na ní provedeme krycí čáru.

0	1	6	14	7
0	0	13	10	8
8	15	0	3	8
0	4	7	3	0
9	5	3	0	4

Pravidlo – v nezávislé nule se nesmí křížovat dvě krycí čáry.

Dle „Leksovy matice“ vyšla úloha hned v 1) kroku optimálně, resp. po provedení řádkové a sloupcové redukce jsme našli **5** nezávislých nul, které vzhledem k původní matici představují hodnoty sazeb matice.

$$z_{\text{opt}} = 1 + 7 + 2 + 1 + 13 = 24$$

Pokud se nám při dodržení pravidel nepodaří nalézt **m** nul, ale **m - 1** nul, tak musíme provést sekundární redukcí.

2. Sekundární redukce

U sazeb c_{ij} , které

- nejsou pokryté krycí čarou – provedeme redukci, tj. snížíme jejich hodnotu o minimální sazbu z nepokrytých prvků větší než 0 ($\min c_{ij} > 0$).
- jsou pokryté 1 krycí čarou - ponecháme jejich hodnotu.
- jsou pokryté 2 krycími čarami – zvýšíme o minimální prvek z prvků nepokrytých.

Poté pomocí krycích čar znovu opakujeme grafický test optima. Celý postup opakujeme tak dlouho, dokud nám nevyjde požadovaný počet nezávislých nul.

Př.:

4	3	7	15	8
6	7	19	16	14
10	6	2	5	10
8	18	9	16	13
10	7	4	1	5

1	0	3	12	5
0	1	13	10	8
8	4	0	3	8
0	10	1	8	5
9	6	3	0	4

1	0	3	12	1
0	1	13	10	4
8	4	0	3	4
0	9	1	8	1
9	6	3	0	0

Po provedení řádkové a sloupcové redukce nám vyšly pouze 4 nezávislé nuly (pozn. - krycích čar je stejný počet jako nul), a proto musíme provést sekundární redukci.

1	0	3	12	1
0	1	13	10	4
8	4	0	3	4
0	9	1	8	1
9	6	3	0	0

2	0	3	12	1
0	0	12	9	3
9	4	0	3	4
0	8	0	7	0
10	6	3	0	0

2	0	3	12	1
0	0	12	9	3
9	4	0	3	4
0	8	0	7	0
10	6	3	0	0

Po sekundární redukci a následném testu optima nám již vyšel potřebný počet nul (v tomto případě je to 5 nul), a tudíž již můžeme určit optimální hodnotu přiřazovací úlohy, tj. nejkratší trasu.

$$z_{\text{opt}} = 3 + 6 + 2 + 13 + 1 = 25$$

**SEMESTRÁLNÍ PRÁCE Z PŘEDMĚTU
SYSTÉMOVÁ ANALÝZA
A MODELOVÁNÍ**

TÉMA:

PŘIŘAZOVACÍ PROBLÉM

Přednáška č. 7

**VYPRACOVALA:
Alena Semerádová
INFO III, 3.kruh**