

9. Určitý integrál

Petr Gurka

katedra matematiky
Technická fakulta ČZU

e-mail: gurka@tf.czu.cz

web: <http://tf.czu.cz/~gurka/index2.html>

30. 11. 2006

1 Riemannův určitý integrál

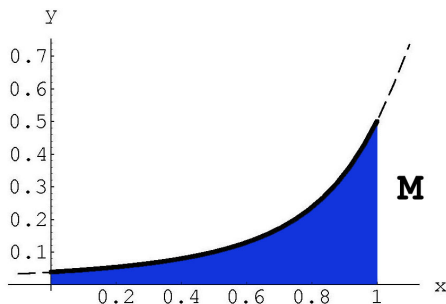
- Motivace
- Definice Riemannova určitého integrálu

2 Výpočet určitého integrálu

- Newtonova-Leibnizova formule
- Základní vzorce pro výpočet určitého integrálu
- Metoda per partes pro určitý integrál
- Substituční metoda pro určitý integrál

Obsah rovinného útvaru

Uvažujme funkci f , která je nezáporná a spojitá na uzavřeném intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Chceme určit **obsah rovinného útvaru M** ohraničeného shora **grafem funkce f** (tj. **křivkou o rovnici $y = f(x)$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$**), zdola **osou x** , zleva **osou y** a zprava **přímku o rovnici $x = 1$** .



Myšlenka výpočtu obsahu.

Rovinný útvar M nahradit jednodušším útvarem, jehož obsah umíme vypočítat, a navíc takovým, že se jeho obsah příliš neliší od obsahu $P(M)$ útvaru M .

Rozdělme interval $\langle 0, 1 \rangle$ na několik dílků dělicími body $x_0, x_1, \dots, x_n \in \langle 0, 1 \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, přičemž klademe $x_0 = 0$ a $x_n = 1$, tj.

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1,$$

a uvažujme rovinný útvar Q , který je sjednocením obdélníků se základnami $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a s výškami délky $f(c_i)$, kde c_i jsou vhodně vybrané body z příslušných intervalů $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 0, 1, \dots, n$. Obsah $P(Q)$ útvaru Q jsme schopni díky znalosti obsahu obdélníka vypočítat přesně, je totiž

$$P(Q) = f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(c_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Volíme-li c_i tak, že

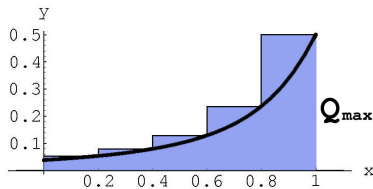
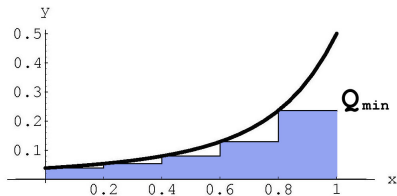
$$f(c_i) = \min_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x), \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

je příslušný útvar $Q_{\min}$ **vepsaný** množině M . Volíme-li c_i tak, že

$$f(c_i) = \max_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x), \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

je příslušný útvar $Q_{\max}$ **opsaný** množině M , **přičemž pro obsahy platí**

$$P(Q_{\min}) \leq P(M) \leq P(Q_{\max})$$



Nahradíme-li přesný obsah $P(M)$ číslem $P(Q_{\min})$ nebo $P(Q_{\max})$, dopouštíme se **chyby**, která je **nejvýše** $P(Q_{\max}) - P(Q_{\min})$.

Definice.

Dán uzavřený interval $\langle \alpha, \beta \rangle$. Množinu bodů

$$D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset \langle \alpha, \beta \rangle$$

splňující podmínku

$$\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = \beta$$

nazveme **dělením intervalu** $\langle \alpha, \beta \rangle$. **Norma dělení** D je číslo $\nu(D)$, které je rovno největší vzdálenosti dvou sousedních bodů dělení D , tj.

$$\nu(D) = \max_{i \in \{0, 1, \dots, n\}} (x_i - x_{i-1}).$$

Definice. (Riemannův integrál)

Nechť f je omezená funkce na uzavřeném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Řekneme, že funkce f je **riemannovsky integrovatelná** na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, existuje-li takové číslo R , že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro libovolné dělení D intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ s normou $\nu(D) < \delta$ a pro libovolná čísla $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$, platí

$$|R - P(Q)| < \varepsilon,$$

kde

$$P(Q) = f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(c_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Číslo R nazveme **Riemannovým určitým integrálem** funkce f na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Píšeme

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = R.$$

Pokud žádné číslo R uvedených vlastností **neexistuje**, říkáme, že funkce f **nemá** na $\langle \alpha, \beta \rangle$ Riemannův integrál.

Existence a výpočet Riemannova integrálu

Věta. (Riemannovská integrovatelnost)

Je-li funkce f **spojitá** na uzavřeném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, pak je také **riemannovsky integrovatelná** na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Věta. (Newtonova-Leibnizova formule)

Nechť funkce f je **riemannovsky integrovatelná** na uzavřeném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a necht' **existuje** funkce F , která je **primitivní funkcí** k f na $\langle \alpha, \beta \rangle$.
Potom platí rovnost

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha). \quad (1)$$

(Rovnost (1) se nazývá **Newtonova-Leibnizova formule**.)

Poznámka.

Určitý integrál je možno také definovat pomocí (1). Takový integrál se nazývá **Newtonův určitý integrál**.

Definice.

Nechť $\alpha > \beta$, pak vzhledem k (1) klademe

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx,$$

dále klademe

$$\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0.$$

Základní vzorce pro výpočet určitého integrálu

Věta.

Nechť $\alpha < \gamma < \beta$, $c \in \mathbb{R}$. Potom platí rovnosti

$$\int_{\alpha}^{\beta} c f(x) dx = c \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) \pm g(x)) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \pm \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx,$$

pokud určité integrály na obou stranách rovností existují.

Označení

Pro číslo $F(\beta) - F(\alpha)$ na pravé straně rovnosti Newtonovy-Leibnizovy formule (1) budeme používat následující značení

$$F(\beta) - F(\alpha) = [F(x)]_{\alpha}^{\beta}.$$

Věta. (Metoda per partes pro určitý integrál)

Nechť funkce u , v mají spojité derivace u' , v' na uzavřeném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Potom platí rovnost

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} u'(x) v(x) dx.$$

Věta. (Substituční metoda pro určitý integrál)

Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle A, B \rangle$. Nechť g je funkce, která má spojitou první derivaci g' na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a platí

$$g(x) \in \langle A, B \rangle \quad \text{pro všechny body } x \in \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Potom platí rovnost

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(t) dt.$$

Pozor!

Při substituci v určitém integrálu a při záměně mezí se nevracíme k původní proměnné jako u neurčitého integrálu.