

8. Primitivní funkce a neurčitý integrál.

Petr Gurka

katedra matematiky
Technická fakulta ČZU

e-mail: gurka@tf.czu.cz

web: <http://tf.czu.cz/~gurka/index2.html>

23. 11. 2006

1 Primitivní funkce

- Definice primitivní funkce
- Existence primitivní funkce
- Neurčitý integrál

2 Výpočet neurčitého integrálu

- Základní vzorce
- Pravidla pro integrování
- Metoda přímé integrace
- Metoda integrace per partes
- Metoda integrace substitucí

Definice. (Primitivní funkce)

Nechť f a F jsou funkce definované na intervalu $\mathcal{J}$. Funkce F je **primitivní funkcí** k funkci f na intervalu $\mathcal{J}$, jestliže pro každý bod $x \in \mathcal{J}$ tohoto intervalu platí $F'(x) = f(x)$. Pokud k intervalu $\mathcal{J}$ náleží některý z jeho krajních bodů, pak v tomto bodě uvažujeme příslušnou jednostrannou derivaci.

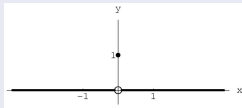
Otázky.

- 1 Existence primitivní funkce, tj. stanovení nutných a postačujících podmínek na funkci f , aby k ní existovala primitivní funkce.
- 2 Jednoznačnost primitivní funkce, tj. kolik primitivních funkcí může k dané funkci na daném intervalu existovat, případně jak se tyto funkce od sebe liší.
- 3 Vyjádření primitivní funkce, tj. zda a jak lze nalézt funkční předpis pro primitivní funkci F k dané funkci f .

Příklad. (Funkce nemající primitivní)

Funkce $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \neq 0, \\ 1 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$ nemá na intervalu $(-\infty, \infty)$ žádnou

primitivní funkci.



Zdůvodnění (sporem)

Ať F je primitivní k f na intervalu $(-\infty, \infty)$. Pak

- 1 F musí mít vlastní derivaci f na intervalu $(-\infty, \infty)$, tedy F je spojitá na $(-\infty, \infty)$.
- 2 $F' = f = 0$ na $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, tedy $F(x) = c$ na $(-\infty, 0)$ a $F(x) = d$ na $(0, \infty)$.
- 3 Ze spojitosti F plyne rovnost $c = d$, takže funkce F je konstantní na $(-\infty, \infty)$.
- 4 Pak ale $F' = 0$ na $(-\infty, \infty)$, tj. $F'(0) = 0$, což je **spor** s tím, že $F'(0) = f(0) = 1$.

Věta.

Je-li f funkce spojitá na intervalu $\mathcal{J}$, pak k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce F .

Tato věta má jednoduchý důsledek.

Věta.

Je-li f elementární funkce definovaná na intervalu $\mathcal{J}$, pak k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce F .

Věta.

Nechť funkce F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu $\mathcal{I}$. Potom funkce G , $G(x) = F(x) + C$, $x \in \mathcal{I}$, kde $C \in \mathbb{R}$ je konstanta, je také primitivní funkcí k f na intervalu $\mathcal{I}$.

Věta.

Nechť funkce F a G jsou primitivní k funkci f na intervalu $\mathcal{I}$. Potom existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{I}$ je $G(x) = F(x) + C$.

Definice.

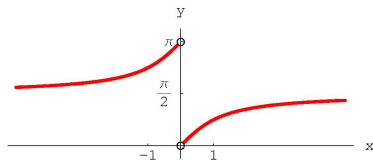
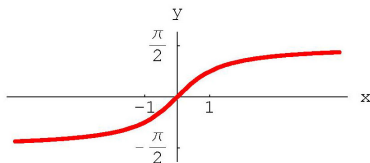
Množina všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu $\mathcal{I}$ se nazývá **neurčitý integrál** funkce f na intervalu $\mathcal{I}$. Pro neurčitý integrál používáme zápis

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

kde dx je **diferenciál integrační proměnné** (označuje, co je proměnná), $F(x)$ je nějaká **primitivní funkce k funkci $f(x)$** (tj. reprezentant množiny všech primitivních funkcí k f) a $C \in \mathbb{R}$ je **integrační konstanta**.

$$f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad g(x) = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g'(x) = \frac{-1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$



$\int 0 dx = C$	na $(-\infty, \infty)$,
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	na $(0, \infty)$ (resp. $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$),
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	na $(-\infty, 0)$ nebo na $(0, \infty)$,
$\int e^x dx = e^x + C$	na $(-\infty, \infty)$,
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$	na $(-\infty, \infty)$,
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	na $(-\infty, \infty)$,
$\int \cos x dx = \sin x + C$	na $(-\infty, \infty)$,
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cotg x + C$	na $(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tg x + C$	na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$	na $(-\infty, \infty)$,
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	na $(-1, 1)$.

Věta.

Nechť funkce f , g mají na intervalu $\mathcal{J}$ primitivní funkce. Potom také funkce $(f + g)$, $(f - g)$ a cf , $c \in \mathbb{R}$, mají na $\mathcal{J}$ primitivní funkce a platí

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$

$$\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx,$$

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx.$$

Důležité!

Neexistují žádné vzorce pro přímé integrování součinu a podílu dvou funkcí.

Metoda přímé integrace

Provádějí se pouze základní algebraické úpravy výrazů a používají se základní integrační vzorce a pravidla.

Příklad.

Vypočítejme neurčitý integrál $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Řešení.

V čitateli zlomku je výraz $dx = 1 \cdot dx$. Použijeme-li známou rovnost

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x, \text{ dostáváme: } \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} =$$
$$\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) dx =$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C.$$



Věta. (Metoda integrace per partes (po částech))

Nechť funkce u , v mají spojité derivace u' a v' na intervalu $\mathcal{I}$. Potom na tomto intervalu platí

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

Příklad.

Vypočítejme $\int x \cos x dx$.

Řešení.

Metoda per partes dává $\int x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad v' = \cos x \\ u' = 1, \quad v = \sin x \end{array} \right| =$
 $x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$



Příklad.

Vypočítejme $\int \ln(x+1) dx$.

Řešení.

Výraz $\ln(x+1)$ můžeme napsat jako $1 \cdot \ln(x+1)$. Pak

$$\begin{aligned}\int \ln(x+1) dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln(x+1), & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x+1}, & v = x+1 \end{array} \right| \\ &= (x+1) \ln(x+1) - \int \frac{1}{x+1} (x+1) dx \\ &= (x+1) \ln(x+1) - \int 1 dx = (x+1) \ln(x+1) - x + C.\end{aligned}$$

Je dobré si uvědomit, že pokud $v' = 1$, platí, že $v = x + c$, kde c je libovolná konstanta. Většinou se volí $c = 0$, zde jsme s výhodou volili $c = 1$. □

Příklad.

Vypočítejme $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

Řešení.

Máme

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx &= \int \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x, & v' = \frac{1}{1+x^2} \\ u' = \frac{1}{1+x^2}, & v = \operatorname{arctg} x \end{array} \right| \\ &= (\operatorname{arctg} x)^2 - \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx. \end{aligned}$$

Odsud po úpravě

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + C.$$



Věta. (Metoda integrace substitucí)

Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\mathcal{I}$ a F je funkce k ní primitivní na $\mathcal{I}$. Dále předpokládejme, že funkce g má první derivaci $g'(x)$ ve všech bodech $x \in \mathcal{J}$ a že $g(x) \in \mathcal{I}$ pro každé $x \in \mathcal{J}$. Pak složená funkce $F(g(x))$ je primitivní funkcí k funkci $f(g(x))g'(x)$ na intervalu $\mathcal{J}$.

$$\begin{aligned}\int f(g(x)) g'(x) dx &= \left| \begin{array}{l} g(x) = t \\ g'(x) dx = dt \end{array} \right| = \int f(t) dt \\ &= F(t) + C = F(g(x)) + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int f(t) dt &= \left| \begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x) dx \end{array} \right| = \int f(g(x)) g'(x) dx \\ &= G(x) + C = \left| \begin{array}{l} g(x) = t \\ x = g^{-1}(t) \end{array} \right| = G(g^{-1}(t)) + C.\end{aligned}$$

Příklad.

Vypočítejme $\int \sin^2 x \cos x \, dx$.

Řešení.

Použijeme 1. metodu :

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right| = \int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$



Příklad.

Vypočítejme integrál $\int e^{\sqrt{t}} dt$.

Řešení.

Použijeme 2. metodu a dále také metodu per partes:

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{t}} dt &= \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ (x = \sqrt{t}) \\ dt = 2x dx \end{array} \right| = \int 2x e^x dx = \left| \begin{array}{ll} u = 2x, & v' = e^x \\ u' = 2, & v = e^x \end{array} \right| \\ &= 2x e^x - \int 2e^x dx = 2e^x(x - 1) + C = 2e^{\sqrt{t}}(\sqrt{t} - 1) + C.\end{aligned}$$

