

13. Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Petr Gurka

katedra matematiky
Technická fakulta ČZU

e-mail: gurka@tf.czu.cz

web: <http://tf.czu.cz/~gurka/index2.html>

4. 1. 2007

1 Lineární diferenciální rovnice 2. řádu — přehled

- Tvar řešení
- Strategie nalezení řešení
- Řešení nehomogenní rovnice s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou

2 Metoda variace konstant

3 Studované typy diferenciálních rovnic

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Uvažujme diferenciální rovnici

$$a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = D(x), \quad (1)$$

kde y'' , y' jsou **derivace** neznámé funkce y (proměnné x), a_0 , a_1 , a_2 , D jsou **dané funkce** (proměnné x) spojité na intervalu $\mathcal{I}$, $a_0 \neq 0$ na $\mathcal{I}$.

Řešení rovnice (1).

Každé **řešení** φ **nehomogenní rovnice** (1) na intervalu $\mathcal{I}$ má tvar

$$\varphi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + \varphi_0,$$

kde ψ_1, ψ_2 jsou **řešení příslušné homogenní rovnice** (**příčemž** ψ_1 **není násobkem** ψ_2), c_1, c_2 jsou libovolné reálné konstanty a φ_0 **je** jedno (pevné) **řešení rovnice** (1).

Při řešení lineární diferenciální rovnice (1) postupujeme ve dvou krocích:

- 1 Vyřešíme příslušnou **homogenní lineární diferenciální rovnici**, tj. nalezneme její obecné řešení $\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$.
- 2 Nalezneme (uhodneme) jedno řešení φ_0 **nehomogenní lineární diferenciální rovnice** (1).

Nehomogenní rovnice s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou

Řešení φ_0 **nehomogenní rovnice** s konstantními koeficienty (tj. $a_0(x) = A$, $a_1(x) = B$, $a_2(x) = C$) a speciální pravou stranou

$$D(x) = e^{ax} (\mathcal{P}_1(x) \cos(bx) + \mathcal{P}_2(x) \sin(bx)), \quad (2)$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ jsou **polynomy stupně nejvýše m** .

Hledáme ve tvaru

$$\varphi_0(x) = x^r e^{ax} (\mathcal{Q}_1(x) \cos(bx) + \mathcal{Q}_2(x) \sin(bx)),$$

kde r je násobnost kořene $k = a + ib$ v příslušné charakteristické rovnici a $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ jsou **polynomy stupně m** .

Tato metoda je založena na pozorování, že je-li řešení rovnice (1) typu (2), potom je levá strana rovnice (1) téhož typu.

Metoda variace konstant

Princip této metody spočívá ve volbě řešení φ nehomogenní rovnice (1),

$$a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = D(x),$$

ve tvaru

$$\varphi(x) = C_1(x) \psi_1(x) + C_2(x) \psi_2(x), \quad (3)$$

kde C_1, C_2 nejsou konstanty, ale funkce proměnné x .

Derivování funkce φ a následné dosazení do nehomogenní rovnice (1) vede na soustavu dvou lineárních rovnic s neznámými $C_1'(x), C_2'(x)$,

$$\begin{aligned} C_1'(x) \psi_1(x) + C_2'(x) \psi_2(x) &= 0, \\ C_1'(x) \psi_1'(x) + C_2'(x) \psi_2'(x) &= D(x)/a_0(x). \end{aligned}$$

Integrováním pak vypočítáme funkce $C_1(x), C_2(x)$, které dosadíme do (3).

Uvažované typy diferenciálních rovnic

1. řádu.

Zabýváme se pouze následujícími typy diferenciálních rovnic 1. řádu:

separovatelná $y' = f(x)g(y),$

homogenní $y' = F\left(\frac{y}{x}\right),$

lineární $y' = a(x)y + b(x).$

2. řádu.

Řešíme pouze lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty:

$$A y'' + B y' + C y = D(x),$$

kde $A, B, C \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, jsou konstanty a D je funkce proměnné x .