

12. Lineární diferenciální rovnice

Petr Gurka

katedra matematiky
Technická fakulta ČZU

e-mail: gurka@tf.czu.cz

web: <http://tf.czu.cz/~gurka/index2.html>

21. 12. 2006

1 Lineární diferenciální rovnice řádu n

- Finanční model
- Pojem řešení
- Existence a jednoznačnost řešení
- Tvar řešení

2 Lineární rovnice 1. řádu

- Metoda variace konstanty

3 Lineární rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

- Charakteristická rovnice
- Řešení homogenní rovnice
- Řešení nehomogenní rovnice se speciální pravou stranou

Finanční model

Uvažujme finanční model pohybu peněz na účtu:

R	úrok (konstanta)
$C + Dx$	vklad na účet v čase x (C, D konstanty)
x	čas (proměnná)
y_0	množství peněz na účtu v čase $x = 0$ (konstanta)
y	množství peněz na účtu v čase x (hledaná funkce)

Příslušný matematický model je určen **diferenciální rovnicí** s **počáteční podmínkou**:

$$y' = R y + (C + Dx), \quad y(0) = y_0.$$

Řešením je funkce:

$$y = \left(y_0 + \frac{C}{R} + \frac{D}{R^2} \right) e^{Rx} - \frac{C + Dx}{R} - \frac{D}{R^2}.$$

Uvedená rovnice je **lineární diferenciální rovnicí 1. řádu**.

Lineární diferenciální rovnice řádu n

Uvažujme diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = D(x), \quad (1)$$

kde, $n \in \mathbb{N}$, $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y'$ jsou **derivace** neznámé funkce y (proměnné x), $a_1, a_2, \dots, a_n, D$ jsou **dané funkce** (proměnné x).

Řešení rovnice (1).

Funkci φ nazveme **řešením** rovnice (1) na intervalu (α, β) , jestliže **má vlastní derivace** $\varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(n)}$ **ve všech bodech** intervalu (α, β) a

$$\varphi^{(n)}(x) + a_1(x) \varphi^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x) \varphi'(x) + a_n(x) \varphi(x) = D(x) \quad (2)$$

ve všech $x \in (\alpha, \beta)$.

Věta. (O existenci a jednoznačnosti řešení)

Nechť $a_1, a_2, \dots, a_n, D$ jsou *spojité funkce na intervalu* (α, β) . Necht' jsou dána *čísla* $s \in (\alpha, \beta)$, $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Potom Cauchyova úloha pro diferenciální rovnici (1) má *jediné řešení* φ na intervalu (α, β) , *které splňuje počáteční podmínky*

$$\varphi(s) = y_0, \quad \varphi'(s) = y_1, \quad \dots, \quad \varphi^{(n-1)}(s) = y_{n-1}. \quad (3)$$

Důsledek. (Tvar obecného řešení lineární rovnice)

Nechť $a_1, a_2, \dots, a_n, D$ jsou *spojité* funkce na intervalu (α, β) . Každé *řešení* φ *nehomogenní rovnice* (1) má tvar

$$\varphi = \psi + \varphi_0, \quad (4)$$

kde ψ je řešení *homogenní lineární* rovnice

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (5)$$

a φ_0 je (pevné) *řešení rovnice* (1). Obecné řešení ψ *homogenní lineární* rovnice (5) na (α, β) má tvar

$$\psi(x) = c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x) + \dots + c_n \psi_n(x), \quad (6)$$

kde $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ jsou *lineárně nezávislá* řešení rovnice (5) na intervalu (α, β) (tj. pokud $\psi(x) = 0$ ve všech $x \in (\alpha, \beta)$, pak $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$) a $c_1, c_2, \dots, c_n$ jsou libovolné reálné konstanty.

Při řešení lineární diferenciální rovnice postupujeme ve dvou krocích:

- 1 Vyřešíme **homogenní lineární diferenciální rovnici** (5), tj. nalezneme její obecné řešení (6).
- 2 Nalezneme (uhodneme) jedno řešení **nehomogenní lineární diferenciální rovnice** (1).

Lineární rovnice 1. řádu

Budeme uvažovat rovnici (typu (1)) pro $n = 1$ ve tvaru

$$y' = a(x)y + b(x). \quad (7)$$

Příslušná **homogenní rovnice** (typu (5)) pak je

$$y' = a(x)y,$$

což je rovnice řešitelná **separací proměnných**. Jejím **řešením** je funkce

$$\psi(x) = c \psi_1(x)$$

(typu (6)), kde c je libovolná reálná **konstanta**.

Obecné řešení $\varphi = \psi + \varphi_0$ (typu (4)) **nehomogenní rovnice** (7) pak nalezneme metodou **variace konstanty**, která spočívá v tom, že ho hledáme ve tvaru

$$\varphi(x) = c(x) \psi_1(x),$$

kde $c(x)$ je **funkce** proměnné x .

Lineární rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

Jedná se o rovnici:

$$A y'' + B y' + C y = D(x), \quad (8)$$

kde $A, B, C \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, jsou konstanty a D je funkce proměnné x .

Nejdříve určíme řešení $\psi(x) = c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x)$ (typu (6)) příslušné homogenní rovnice

$$A y'' + B y' + C y = 0. \quad (9)$$

Uvažujme kvadratickou rovnici (tzv. charakteristická rovnice)

$$A k^2 + B k + C = 0. \quad (10)$$

Nechť $D = B^2 - 4AC$ je diskriminant rovnice (10).

- ① Je-li $D > 0$, rovnice (10) má dva různé reálné kořeny k_1, k_2 . Pak

$$\psi_1(x) = e^{k_1 x}, \quad \psi_2(x) = e^{k_2 x}.$$

- ② Je-li $D = 0$, rovnice (10) má jeden dvojnásobný reálný kořen k . Pak

$$\psi_1(x) = e^{k x}, \quad \psi_2(x) = x e^{k x}.$$

- ③ Je-li $D < 0$, rovnice (10) má dva různé (komplexně sdružené) kořeny $k_1 = p + i q, k_2 = p - i q$. Pak

$$\psi_1(x) = e^{p x} \cos(q x), \quad \psi_2(x) = e^{p x} \sin(q x).$$

Nehomogenní rovnice se speciální pravou stranou

Obecné řešení $\varphi = \psi + \varphi_0$ (typu (4)) nehomogenní rovnice (8) budeme hledat pouze pro speciální pravou stranu

$$D(x) = e^{ax} (\mathcal{P}_1(x) \cos(bx) + \mathcal{P}_2(x) \sin(bx)), \quad (11)$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ jsou polynomy stupně nejvýše m .

Partikulární řešení φ_0 nehomogenní rovnice (8) s pravou stranou tvaru (11) budeme hledat ve tvaru

$$\varphi_0(x) = x^r e^{ax} (\mathcal{Q}_1(x) \cos(bx) + \mathcal{Q}_2(x) \sin(bx)), \quad (12)$$

kde r je násobnost kořene $k = a + ib$ v charakteristické rovnici (10),

$$A k^2 + B k + C = 0,$$

a $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ jsou polynomy stupně m .

Potom (viz (4))

$$\varphi = \psi + \varphi_0 = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + \varphi_0.$$