

11. Diferenciální rovnice

Petr Gurka

katedra matematiky
Technická fakulta ČZU

e-mail: gurka@tf.czu.cz

web: <http://tf.czu.cz/~gurka/index2.html>

14. 12. 2006

1 Úvod

- Co je to diferenciální rovnice
- Logistická rovnice (biologický model)
- Jak vyřešíme logistickou rovnici
- Rovnice 1. řádu
- Cauchyova úloha

2 Řešení základních typů rovnic

- Řešení separovatelné rovnice $y' = f(x)g(y)$
- Řešení homogenní rovnice $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$

Co je diferenciální rovnice?

Za diferenciální rovnici považujeme rovnici, v níž **neznámou je funkce**. Navíc daná rovnice **obsahuje derivace neznámé funkce** a případně i samotnou neznámou funkci. Je zvykem v takové rovnici **značit neznámou funkci** (proměnné x) symbolem y , **derivace neznámé funkce** pak symboly y' , y'' atd.

My se omezíme na diferenciální rovnice 1. a 2. řádu, což jsou rovnice obsahující 1. derivaci y' , případně 2. derivaci y'' , neznámé funkce y .

Logistická rovnice

Uvažujme biologický **model růstu populace v prostředí s omezenými zdroji potravy**. Předpokládáme, že populace nemá v daném prostředí žádné přirozené nepřátele.

k	konstanta plodnosti
L	množství populace, pro které je potrava (konstanta)
x	čas (proměnná)
y_0	množství populace v čase $x = 0$ (konstanta)
y	množství populace v čase x (hledaná funkce)

Příslušný matematický model je určen **diferenciální rovnicí** s **počáteční podmínkou**:

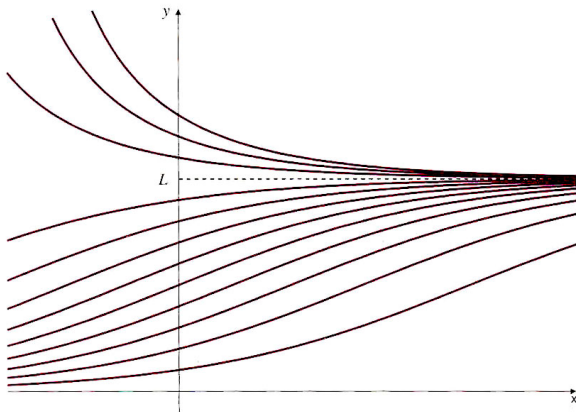
$$y' = k y \left(1 - \frac{y}{L}\right), \quad y(0) = y_0.$$

Řešením je funkce:

$$y = \frac{L y_0}{y_0 + (L - y_0) e^{-k x}}.$$

Graf logistické funkce

$$y = \frac{Ly_0}{y_0 + (L - y_0)e^{-kx}}$$



Máme

$$y'(x) = k y(x) \left(1 - \frac{y(x)}{L}\right) = k \frac{y(x)(L - y(x))}{L},$$

odkud

$$\left(\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{L - y(x)}\right) y'(x) = \frac{L y'(x)}{y(x)(L - y(x))} = k.$$

Nyní integrujeme $\int \dots dx$:

$$\ln\left(\frac{y(x)}{L - y(x)}\right) = \int \left(\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{L - y(x)}\right) y'(x) dx = \int k dx = kx + C$$

substituce: $\left| \begin{array}{l} y(x) = \mathbf{y} \\ y'(x) dx = d\mathbf{y} \\ \text{tj. } y'(x) = \frac{d\mathbf{y}}{dx} \end{array} \right| = \int \left(\frac{1}{\mathbf{y}} + \frac{1}{L - \mathbf{y}}\right) d\mathbf{y} = \ln \mathbf{y} - \ln(L - \mathbf{y}) = \ln\left(\frac{\mathbf{y}}{L - \mathbf{y}}\right)$

Vyjde

$$\frac{y(x)}{L - y(x)} = e^{kx+C} = C_1 e^{kx},$$

tedy

$$y(x) = \frac{C_1 L e^{kx}}{1 + C_1 e^{kx}}.$$

Vyšlo

$$y(x) = \frac{C_1 L e^{kx}}{1 + C_1 e^{kx}}.$$

Dále platí

$$y_0 = y(0) = \frac{C_1 L}{1 + C_1},$$

odkud $y_0(1 + C_1) = C_1 L \Rightarrow C_1(L - y_0) = y_0 \Rightarrow C_1 = \frac{y_0}{L - y_0}$.
Potom

$$y(x) = \frac{\frac{y_0}{L - y_0} L e^{kx}}{1 + \frac{y_0}{L - y_0} e^{kx}} = \frac{L y_0 e^{kx}}{L - y_0 + y_0 e^{kx}} = \frac{L y_0}{y_0 + (L - y_0)e^{-kx}}.$$

Diferenciální rovnice 1. řádu a její řešení

Rovnice 1. řádu.

Jedná se o diferenciální rovnici

$$y' = \mathcal{F}(x, y), \quad (1)$$

kde $\mathcal{F}(x, y)$ je daná funkce dvou proměnných.

Definice. (Řešení diferenciální rovnice)

Řekneme, že funkce φ definovaná na otevřeném intervalu (a, b) , je **řešením diferenciální rovnice (1) na intervalu** (a, b) , jestliže ve všech bodech $x \in (a, b)$ má vlastní derivaci $\varphi'(x)$ a **pro každé $x \in (a, b)$ platí rovnost**
$$\varphi'(x) = \mathcal{F}(x, \varphi(x)).$$

(Pojem řešení je možné zavést na uzavřeném nebo polouzavřeném intervalu, potom v krajních bodech uvažujeme příslušné jednostranné derivace.)

Cauchyova úloha pro diferenciální rovnici 1. řádu

Definice.

Pojem **Cauchyova úloha** (nebo také počáteční úloha) pro diferenciální rovnici (1) označuje úlohu

$$\begin{cases} y' &= \mathcal{F}(x, y), \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

Jejím řešením je řešení φ , které splňuje **počáteční podmínku**

$$\varphi(x_0) = y_0,$$

(nutně $[x_0, y_0] \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$, tj. $\mathcal{F}(x_0, y_0)$ má smysl). Jinými slovy, jedná se o řešení φ , jehož graf prochází bodem $[x_0, y_0]$.

$$y' = f(x) g(y). \quad (2)$$

Řešení separovatelné rovnice

- ① Derivaci y' **zapišeme** ve tvaru $y' = \frac{dy}{dx}$, získanou rovnost formálně **vynásobíme** symbolem dx , **vydělíme** ji výrazem $g(y)$ a k oběma stranám **připíšeme symbol** $\int$.

$$\frac{dy}{dx} = f(x) g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx.$$

- ② Vypočítáme-li neurčité integrály na obou stranách, dostaneme $G(y) = F(x) + C$, odkud pak vyjádříme y pomocí x , tj.
 $\varphi : y = G^{-1}(F(x) + C)$.
- ③ Výslednou funkci φ dosadíme do rovnice (2) a určíme, na kterém intervalu je řešením rovnice (2).
- ④ Má-li funkce g nulový bod x_0 , tj. $g(x_0) = 0$, je konstantní funkce $\varphi_s : y = x_0$ také řešením rovnice (2) na každém $(a, b) \subset \mathcal{D}(f)$

Řešení homogenní rovnice

Při řešení rovnice

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3)$$

použijeme **substituci** $z = \frac{y}{x}$, tj. za y a y' dosazujeme

$$y = xz, \quad y' = z + xz'.$$

Po dosazení do rovnice (3) a jednoduché úpravě vyjde

$$xz' = F(z) - z, \quad \text{tj.} \quad z' = \frac{1}{x} (F(z) - z)$$

což je separovatelná rovnice typu (2).