

10. Aplikace určitého integrálu

Petr Gurka

katedra matematiky
Technická fakulta ČZU

e-mail: gurka@tf.czu.cz

web: <http://tf.czu.cz/~gurka/index2.html>

7. 12. 2006

1 Aplikace určitého integrálu

- Výpočet obsahu elementární oblasti v rovině
- Výpočet obsahu rovinného útvaru
- Objem rotačního tělesa
- Délka křivky
- Plášť rotačního tělesa

Obsah elementární oblasti

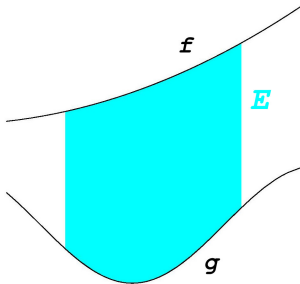
Nechť funkce f , g jsou **spojité** na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a necht' pro všechna $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$ platí $g(x) \leq f(x)$. Rovinný útvar

$$E = \{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \leq x \leq \beta, g(x) \leq y \leq f(x) \}$$

nazveme **elementární oblastí** příslušné funkcím f , g na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Obsah elementární oblasti je roven

$$P(E) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx.$$



Obsah rovinného útvaru, který je konečným sjednocením elementárních oblastí

Při výpočtu využijeme:

Aditivita.

Je-li rovinný útvar A **sjednocením** dvou nepřekrývajících se rovinných útvarů B , C (tj. takových, které nemají společné vnitřní body), potom

$$P(A) = P(B) + P(C).$$

Rovnost.

Jsou-li A , B dva **shodné** rovinné útvary (např. A vznikne z B posunutím), potom

$$P(A) = P(B).$$

Objem rotačního tělesa

Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ kolem osy x

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Příklad.

Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného křivkami $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 3$, kolem osy x . $[8\pi]$

Délka oblouku grafu funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

Příklad.

Určete délku oblouku grafu funkce ohraničeného křivkami $y = \ln x$,
 $x \in \langle \sqrt{3}, \sqrt{8} \rangle$. $\left[1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}\right]$

Plášť rotačního tělesa

Plášť rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ kolem osy x

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Příklad.

Vypočítejte plášť rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného křivkou $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$, kolem osy x .
 $[\pi(e^2 + 4 - e^{-2})]$