

8. Úvod do lineární algebry

Petr Gurka

katedra matematiky

Technická fakulta ČZU

e-mail: gurka@tf.czu.cz

web: <http://tf.czu.cz/~gurka/index2.html>

23. 11. 2006

1 Témata

2 Vektory, vektorové prostory

- Motivace
- Aritmetický vektorový prostor
- Vektorový prostor
- Lineární kombinace
- Lineární nezávislost a závislost
- Lineární obal

3 Elementární úpravy skupin vektorů, matice

- Skupina vektorů
- Elementární úpravy
- Ekvivalentní matice
- Matice v Gaussově tvaru
- Hodnost matice
- Gaussova eliminace

Budeme probírat tato témata

- 1 Vektorové prostory
- 2 Ortogonalita, homogenní soustavy lineárních rovnic
- 3 Nehomogenní soustavy lineárních rovnic
- 4 Maticový počet
- 5 Determinanty

Uvažujme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rclclcl} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 5y & & & = & 9 \\ 3x & + & 6y & - & 2z & = & 6 \end{array} \quad (1)$$

Vyřešit soustavu (1) znamená najít čísla x , y , z , která vyhovují všem třem rovnicím této soustavy.

Je jasné, že

- ❶ vynásobením kterékoliv z rovnic soustavy libovolným reálným číslem $r \neq 0$ **nebo**
- ❷ záměnou rovnic mezi sebou **nebo**
- ❸ nahrazením libovolné z rovnic soustavy **součtem** této rovnice s jinou rovnicí soustavy

získáme soustavu **s původní soustavou ekvivalentní**.

Pomocí uvedených operací se budeme snažit získat ze soustavy (1) soustavu, která má **v každé následující rovnici zleva alespoň o jednu neznámou méně než v předchozí rovnici**.

Konkrétně soustavu (1):

$$\begin{array}{rclclcl} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 5y & & & = & 9 \\ 3x & + & 6y & - & 2z & = & 6 \end{array} .$$

upravíme takto:

- přičteme (-2) -násobek 1. rovnice ke druhé rovnici,
- přičteme (-3) -násobek 1. rovnice ke třetí rovnici .

Dostaneme tak soustavu

$$\begin{array}{rclclcl} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 7 \\ & & & & z & = & 3 \end{array} .$$

Z poslední rovnice je ihned $z = 3$. Dosazením za z do druhé rovnice vyjde $y = 7 - 2z = 7 - 6 = 1$ a konečně dosazením obou hodnot do první rovnice máme $x = 1 - 2y + z = 1 - 2 + 3 = 2$. Vidíme tedy, že trojice $(x, y, z) = (2, 1, 3)$ je řešením naší soustavy.

Maticový zápis soustavy

Všechny rovnice v soustavě jsou ve tvaru, kdy stejné neznámé jsou zapsány pod sebou, takže **úpravy**, které jsme prováděli s jednotlivými rovnicemi, **stačí provádět pouze s koeficienty v těchto rovnicích**. Soustavu můžeme zapsat do matice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & 6 & -2 & 6 \end{array} \right). \quad (2)$$

Ekvivalentní **úpravy**, které jsme prováděli s rovnicemi soustavy (1) **můžeme** analogicky **provádět s řádky matice(2)**. Předchozí postup je možné maticově zapsat takto:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & 6 & -2 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Symbolem “ $\sim$ ” značíme ekvivalenci soustav (tj. ekvivalenci příslušných matic).

Dále si všimněme, že soustavu (1) je možné zapsat ještě jiným způsobem, totiž jako rovnici

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Využijeme-li toho, že trojice $(x, y, z) = (2, 1, 3)$ je řešením soustavy (1), platí rovnost

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Uspořádané n -tice reálných čísel (např. řádky nebo sloupce matice) můžeme **násobit** reálným číslem a můžeme je **sčítat**.

Definice. (Aritmetický vektorový prostor)

Symbolem $\mathbf{V}_n$, $n \in \mathbb{N}$, budeme značit **aritmetický vektorový prostor**, který je tvořen uspořádanými n -ticemi reálných čísel, tj.

$$\mathbf{V}_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\},$$

přičemž **součet vektorů** a **násobení vektorů reálným číslem** je pro prvky tohoto prostoru **definováno po složkách**, tj.

$$\begin{aligned}(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) &= (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n), \\ r(a_1, \dots, a_n) &= (r a_1, \dots, r a_n).\end{aligned}$$

Prvky prostoru $\mathbf{V}_n$ se nazývají **vektory**. Budeme je značit malými tučnými písmeny, např. **a**, **b**.

Vektor **o** = $(0, \dots, 0)$ se nazývá **nulový vektor** a vektor

-a = $(-a_1, \dots, -a_n)$ se nazývá **opačný vektor** k vektoru **a** = $(a_1, \dots, a_n)$.

Pojem vektorový prostor je možné definovat obecně.

Definice. (Vektorový prostor)

Neprázdnou množinu $\mathbf{V}$, na níž jsou definovány operace **součet prvků** z $\mathbf{V}$, která každým dvěma prvkům $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ přiřazuje prvek $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, a **násobení prvků reálnými čísly**, která každému reálnému číslu r a každému prvků $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ přiřazuje prvek $r \mathbf{u} \in \mathbf{V}$, nazveme **vektorovým prostorem**, jsou-li pro všechny prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ a $r, s \in \mathbb{R}$ splněny následující vlastnosti:

- ① $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;
- ② $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$;
- ③ existuje prvek $\mathbf{o} \in \mathbf{V}$ tak, že $\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}$;
- ④ $r(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r \mathbf{u} + r \mathbf{v}$;
- ⑤ $(r + s)\mathbf{u} = r \mathbf{u} + s \mathbf{u}$;
- ⑥ $r(s \mathbf{u}) = (rs)\mathbf{u}$;
- ⑦ $1 \mathbf{u} = \mathbf{u}, 0 \mathbf{u} = \mathbf{o}$.

Prvky z $\mathbf{V}$ se nazývají **vektory**, prvek $\mathbf{o}$ se nazývá **nulový vektor**.

Definice.

Jsou-li $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ vektory, $r_1, \dots, r_k$ reálná čísla a

$$\mathbf{u} = r_1 \mathbf{u}_1 + \dots + r_k \mathbf{u}_k,$$

řekneme, že vektor $\mathbf{u}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ s koeficienty $r_1, \dots, r_k$.

Definice.

Řekneme, že vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ jsou **lineárně nezávislé**, jestliže platí následující podmínka:

$$\text{kdykoliv } r_1 \mathbf{u}_1 + \dots + r_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}, \quad \text{potom } r_1 = r_2 = \dots = r_k = 0.$$

Vektory, které nejsou lineárně nezávislé se nazývají **lineárně závislé**.

Poznámka.

- Je-li jeden z vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ nulový potom jsou tyto vektory lineárně **závislé**.
- Jeden vektor $\mathbf{u}$ je lineárně **závislý** právě tehdy, když je **nulový**.
- Dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně **závislé**, právě když je jeden z nich násobkem druhého.

Definice.

Množinu **všech lineárních kombinací** daných vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$, tj. množinu **všech vektorů** $\mathbf{u} = r_1 \mathbf{u}_1 + \dots + r_k \mathbf{u}_k$, nazveme **lineárním obalem** vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$. Značíme ho symbolem $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$. Vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ nazveme **generátory lineárního obalu** $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$. Říkáme také, že **vektory** $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ **generují** lineární obal $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$.

Definice.

Pod pojmem **konečná skupina vektorů** $[u_1, \dots, u_k]$ rozumíme vektory $u_1, \dots, u_k$. Přitom některé z nich se mohou sobě rovnat.

Skupina se od množiny liší tím, že se v ní mohou vyskytovat stejné prvky vícekrát. Např. z množiny vektorů $\{a, b\}$ lze vytvořit skupiny vektorů $[a, b]$, $[a, a]$, $[a, a, b, a, b, b]$ atd. Ze skupiny vektorů je pochopitelně možné vybrat množinu, která obsahuje všechny vektory z dané skupiny, např. ze skupiny $[a, a, b, c, c]$ vybereme množinu $\{a, b, c\}$.

Definice.

Pod pojmem **elementární úprava** (nebo také *transformace*) skupiny vektorů $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k]$ rozumíme provedení některé z následujících pěti operací s vektory této skupiny:

- (a) záměna pořadí vektorů ve skupině;
- (b) vynásobení některého vektoru skupiny nenulovým reálným číslem;
- (c) přičtení libovolného násobku některého vektoru skupiny k jinému vektoru skupiny;
- (d) vynechání nulového vektoru ze skupiny, pokud tento není jediným vektorem ve skupině;
- (e) za předpokladu, že skupina obsahuje dva vektory, z nichž jeden je nenulovým násobkem druhého, vynechání jednoho z těchto vektorů (kteréhokoliv).

Věta. (Zachování lineárního obalu elementárními úpravami)

Provedením některé z elementárních úprav (a)–(e) na danou skupinu vektorů dostaneme skupinu, která generuje tentýž lineární obal jako původní skupina.

Pro práci se skupinou vektorů definujeme pojem matice.

Definice. (Matice)

Maticí $\mathbf{A}$ typu (m, n) nazveme soubor mn reálných čísel zapsaných do m řádků a n sloupců ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matice $\mathbf{A}$ se nazývá **nulová matice**, jestliže obsahuje pouze nuly, tj. $a_{ij} = 0$ pro $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Nulovou matici budeme značit $\mathbf{O}$.

Definice. (Ekvivalentní matice)

Jsou-li A , B dvě matice, pak zápis $A \sim B$ znamená, že matice B vznikla z matice A pomocí konečného počtu elementárních úprav (a)–(e) na řádky matice A . Matice A , B pak nazýváme **ekvivalentní**.

Věta.

*Jsou-li A , B ekvivalentní matice, pak **lineární obal** generovaný řádky matice A je roven **lineárnímu obalu** generovanému řádky matice B .*

Nyní se k dané matici pokusíme najít matici s lineárně nezávislými řádky, která je s danou maticí ekvivalentní.

Definice. (Gaussův tvar matice)

Řekneme, že nenulová matice B je v **Gaussově tvaru**, jestliže **první nenulové číslo** jejího každého řádku (uvažováno zleva doprava) je zároveň **posledním nenulovým** číslem v příslušném sloupci (uvažováno shora dolů).

Příklad.

Pro názornost uveďme dvě matice, které **jsou** v Gaussově tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na druhé straně, matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

není v Gaussově tvaru.

Věta.

Každá matice v Gaussově tvaru má lineárně nezávislé řádky.

Věta.

Ke každé nenulové matici A existuje matice B v Gaussově tvaru taková, že $A \sim B$.

K dané matici A můžeme najít více matic B v Gaussově tvaru s ní ekvivalentních, všechny takové matice B však mají **stejný** počet řádků.

Definice.

Hodnost nenulové matice A definujeme jako číslo $h(A)$, které **je rovno počtu řádků** matice B v **Gaussově tvaru** takové, že $A \sim B$. Pro nulovou matici klademe $h(O) = 0$.

Gaussova eliminační metoda spočívá ve vhodném používání elementárních úprav (a)–(e) na řádky výchozí matice A . **Stručně řečeno**, nejdříve pomocí úpravy (a) zařídíme, aby prvek v levém horním rohu matice (tím rozumíme prvek matice v prvním řádku, uvažováno shora dolů, a v prvním nenulovém sloupci, uvažováno zleva doprava) byl nenulový (je výhodné, když toto číslo je 1 nebo -1). Pak přičítáním vhodných násobků horního řádku k řádkům pod ním (úprava (c)) zařídíme, aby pod tímto prvkem byly v příslušném sloupci nuly. V dalším kroku vynecháme v matici nulové řádky a řádky, které jsou násobky řádků nad nimi (úpravy (d) a (e)). V případě, že nejsme ještě hotovi, tj. když výsledná matice ještě není v Gaussově tvaru, celý postup zopakujeme s tím, že nyní pokračujeme o řádek níže. Jelikož výchozí matice měla konečný počet řádků, musíme po konečném počtu kroků získat výslednou matici v Gaussově tvaru.