

12. Determinanty

Petr Gurka

katedra matematiky
Technická fakulta ČZU

e-mail: gurka@tf.czu.cz

web: <http://tf.czu.cz/~gurka/index2.html>

21. 12. 2006

1 Determinant

- Definice determinantu
- Výpočet determinantu řádu 1, 2 a 3
- Algebraický doplněk
- Výpočet determinantu rozvojem podle řádku nebo sloupce
- Výpočet determinantu eliminací

2 Výpočet inverzní matice pomocí determinantů

- Vzorec pro inverzní matici
- Inverzní matice k matici 2. řádu

3 Cramerovo pravidlo

Permutace π množiny $\{1, 2, \dots, n\}$

je prosté zobrazení této množiny na sebe (to znamená, že $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, přičemž $\mathcal{D}(\pi) = \mathcal{H}(\pi) = \{1, 2, \dots, n\}$ a zobrazení π je prosté).

Permutaci π můžeme zapsat takto:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Inverze v permutaci π

je každá taková dvojice čísel $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, pro kterou platí $i < j$ a zároveň $\pi(i) > \pi(j)$.

Sudá (resp. **lichá**) je permutace, která obsahuje **sudý** (resp. **lichý**) počet inverzí.

Symbolem Π_n označíme množinu všech permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.

Pro $\pi \in \Pi_n$ nechť k_π je počet všech inverzí permutace π .

Definice determinantu

Ke každé čtvercové matici je možné přiřadit jisté **reálné číslo**, které nazveme **determinantem** této matice.

Definice.

Je-li $\mathbf{A}$ matice řádu n , definujeme její **determinant** následujícím způsobem

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in \Pi_n} (-1)^{k_\pi} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}.$$

Výpočet determinantu řádu 1, 2 a 3

① Pro $n = 1$ je $\det(a) = a$.

② Pro $n = 2$ máme

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(tj. součin prvků na hlavní diagonále minus součin prvků na vedlejší diagonále).

③ Pro $n = 3$ lze použít tzv. **Sarrusovo pravidlo**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Pozor!!!

Žádné podobné pravidlo neplatí pro $n \geq 4$.

Algebraický doplněk

Každému prvku čtvercové matice přiřadíme jisté **reálné číslo**, které nazveme **algebraickým doplňkem** tohoto prvku.

Definice.

Je-li a_{ij} , $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, prvek matice A , označme M_{ij} **submatici** (dílčí matici) matice A řádu $n - 1$, která vznikne z matice A **vynecháním** jejího i -tého řádku a j -tého sloupce. Číslo $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ se nazývá **algebraický doplněk** prvku a_{ij} v matici A .

Příklad.

Pro matici $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ je $a_{22} = 3$, $M_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, a tedy

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (18 - 20) = -2.$$

Výpočet determinantu rozvojem podle řádku nebo sloupce

Výpočet rozvojem podle řádku

Nechť $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ potom platí rovnost

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

Výpočet rozvojem podle sloupce

Nechť $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ potom platí rovnost

$$\det \mathbf{A} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}.$$

Definice.

Čtvercová matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ se nazývá **horní trojúhelníková**, jestliže $a_{ij} = 0$ pro všechny indexy $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i > j$, a nazývá se **dolní trojúhelníková**, jestliže $a_{ij} = 0$ pro všechny indexy $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i < j$.

Věta.

*Je-li $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ **horní trojúhelníková** nebo **dolní trojúhelníková** matice, potom je její determinant roven součinu diagonálních prvků, tj.*

$$\det \mathbf{A} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Věta.

Nechť $\mathbf{B}$ je čtvercová matice, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ stejného typu

- ① *záměnou dvou řádků, potom $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$;*
- ② *vynásobením jednoho řádku číslem $r \in \mathbb{R}$, potom $\det \mathbf{B} = r \det \mathbf{A}$;*
- ③ *přičtením násobku jednoho řádku k jinému, potom $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$.*

Výpočet inverzní matice pomocí determinantů

Věta.

Čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n je **regulární** právě když platí $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Věta.

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová regulární matice řádu n . Potom k ní existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ a platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot (A_{ij})^T = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

kde čísla A_{ij} jsou **algebraické doplňky** k prvkům a_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, n\}$, matice $\mathbf{A}$.

Inverzní matice k matici 2. řádu

Je-li

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

potom

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

CRAMEROVO PRAVIDLO. Uvažujme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \dots + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \quad (1)$$

s **regulární** maticí soustavy **A**. Nechť **A**_(j) značí matici, která vznikne z matice soustavy **A** **nahrazením** jejího **j-tého** sloupce, $j \in \{1, \dots, n\}$, sloupcem **b** pravých stran, tj.

$$\mathbf{A}_{(j)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Potom pro vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ **řešení** soustavy (1) platí

$$x_j = \frac{\det \mathbf{A}_{(j)}}{\det \mathbf{A}}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$