

11. Maticový počet

Petr Gurka

katedra matematiky
Technická fakulta ČZU

e-mail: gurka@tf.czu.cz

web: <http://tf.czu.cz/~gurka/index2.html>

14. 12. 2006

1 Vektorový prostor matic typu (m, n)

- Matice transponovaná
- Součet matic, násobek matice

2 Maticové rovnice

- Součin matic
- Jednotková matice
- Inverzní matice
- Výpočet inverzní matice (Jordanova eliminace)
- Řešení maticových rovnic pomocí inverzní matice

Matice typu (m, n)

Definice.

Maticí $\mathbf{A}$ typu (m, n) nazveme soubor mn reálných čísel zapsaných do m řádků a n sloupců ve tvaru

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{i=1, j=1}^{m, n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vektory $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})$, $\mathbf{a}_2 = (a_{21}, \dots, a_{2n})$, $\dots$, $\mathbf{a}_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})$ z aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$ se nazývají **řádkové vektory** (stručněji řádky) matice $\mathbf{A}$, vektory $\tilde{\mathbf{a}}_1 = (a_{11}, \dots, a_{m1})$, $\dots$, $\tilde{\mathbf{a}}_n = (a_{1n}, \dots, a_{mn})$ z aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{V}_m$ se nazývají **sloupcové vektory** (stručněji sloupce) matice $\mathbf{A}$.

Matice transponovaná

Definice.

Je-li $\mathbf{A}$ matice typu (m, n) , pak **matice transponovaná** $\mathbf{A}^T$ k matici $\mathbf{A}$, je matice typu (n, m) která vznikne z matice $\mathbf{A}$ **vzájemnou výměnou řádků za sloupce**,

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Prvky a_{ii} , kde $i = 1, 2, \dots, k$, $k = \min \{m, n\}$, tvoří **hlavní diagonálu** matice $\mathbf{A}$ (také hlavní diagonálu matice $\mathbf{A}^T$).

Příklad.

Dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & -4 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{pak} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & 6 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

hlavní diagonálu obou matic tvoří prvky 1, 3, 6.

Symbolem $M_{m,n}$ označíme **vektorový prostor** všech **matic** typu (m, n) s následujícími operacemi. **Součtem dvou matic** typu (m, n)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

rozumíme matici

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Je-li $r \in \mathbb{R}$, pak **r -násobkem matice A** rozumíme matici

$$rA = \begin{pmatrix} r a_{11} & r a_{12} & \dots & r a_{1n} \\ r a_{21} & r a_{22} & \dots & r a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r a_{m1} & r a_{m2} & \dots & r a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Je-li O nulová matice typu (m, n) , pak pro každou matici A typu (m, n) je **$A + O = A$** . Dále definujme **rozdíl matic $A - B$** jako matici **$A + (-1)B$** .

Definice. (Součin matic)

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu (m, p) a $B = (b_{ij})$ je matice typu (p, n) .

Součinem AB matic A a B rozumíme matici $C = (c_{ij})$ typu (m, n) , kde každý prvek c_{ij} je skalárním součinem i -tého řádku matice A s j -tým sloupcem matice B , tj.

$$c_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \tilde{\mathbf{b}}_j = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad \text{kde } i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Příklad.

Máme $(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = (-12),$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3) = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & -8 & -12 \end{pmatrix}.$$

Příklad.

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 34 \end{pmatrix}$$

Součin $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ není definován.

Příklad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

POZOR !!!

Násobení matic obecně **není komutativní**, tj. AB nemusí být totéž jako BA .

- Výsledek násobení může být při záměně pořadí pokaždé jiného typu.
- Může se stát, že má smysl pouze jeden ze součinů AB , BA .
- Rovnost $AB = BA$ **nemusí platit**, ani když jsou oba součiny stejného typu.

Definice.

- Matice $\mathbf{A}$ typu (n, n) se nazývá **čtvercová matice řádu n** (nebo také **stupně n**).
- Čtvercovou matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ nazveme **diagonální**, pokud $a_{ij} = 0$ pro všechny dvojice indexů $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$, tj. diagonální matice obsahuje mimo hlavní diagonálu pouze nuly.
- Diagonální matice $\mathbf{E} = (e_{ij})$ se nazývá **jednotková**, jestliže všechny její diagonální prvky jsou rovny jedné, tj. jestliže platí $e_{ij} = 0$, $i \neq j$, a $e_{ii} = 1$ pro všechna $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Jednotkovou matici řádu n budeme značit $\mathbf{E}$, případně $\mathbf{E}_n$, tj.

$$\mathbf{E}_1 = (1), \quad \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{atd.}$$

Věta.

Nechť A , B , C jsou matice, $r \in \mathbb{R}$. Pak platí (pokud jsou příslušné součiny definovány):

$$(A) \quad r(AB) = (rA)B = A(rB),$$

$$(B) \quad A(B + C) = AB + AC,$$

$$(C) \quad (A + B)C = AC + BC,$$

$$(D) \quad (AB)C = A(BC),$$

$$(E) \quad 0A = O, A0 = O,$$

$$(F) \quad EA = A, AE = A.$$

Rovnosti (B) a (C) se nazývají *distributivní zákony*, rovnost (D) je *asociativní zákon*.

Definice.

Nechť A , B jsou čtvercové matice řádu n . Řekneme, že matice B je **inverzní** k matici A , jestliže platí $AB = BA = E$.

Definice.

Čtvercová matice řádu n se nazývá **regulární**, jestliže její hodnost $h(A)$ je rovna n . Čtvercová matice řádu n , která není regulární, se nazývá **singulární**.

Věta.

Nechť A je čtvercová matice řádu n . Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

- 1 *matice A je regulární;*
- 2 *existuje čtvercová matice B řádu n taková, že $AB = E$;*
- 3 *existuje čtvercová matice C řádu n taková, že $CA = E$.*

Nutně $B = C$ a tato matice je inverzní k matici A .

Inverzní matici k matici A **budeme značit** A^{-1} .

Výpočet inverzní matice (Jordanova eliminace)

K dané čtvercové regulární matici A řádu n vytvoříme matici $(A|E)$ typu $(n, 2n)$. Pomocí vhodných elementárních úprav na řády této matice chceme získat v levé polovině matice (tj. na místě matice A) jednotkovou matici řádu n . Na pravé straně (tj. na místě matice E) vyjde matice inverzní k matici A .

$$(A|E) \overset{\text{Gaussova eliminace na } A}{\sim} \dots \overset{\text{zpětný chod}}{\sim} (B|C) \overset{\text{zpětný chod}}{\sim} \dots \overset{\text{zpětný chod}}{\sim} (E|A^{-1})$$

Na začátku z matice $(A|E)$ získáme matici, v jejíž levé polovině je matice B v Gaussově tvaru.

Zpětný chod: 1. krok: Odečítáním vhodných násobků (celého) spodního řádku od (celých) řádků nad ním získáme nad prvkem vpravo dole v matici B nuly. 2. krok: celý postup zopakujeme s tím, že začneme o řádek výše atd. Po konečném počtu kroků takto získáme matici, která už má v levé polovině diagonální matici, přičemž všechny její diagonální prvky jsou nenulové. Nakonec po vydělení každého řádku příslušným nenulovým diagonálním prvkem získáme žádanou matici $(E|A^{-1})$.

Předpokládejme, že B je **regulární matice**. Při řešení maticových rovnic využijeme:

$$X B = A \quad \Rightarrow \quad X = A B^{-1}.$$

$$B X = A \quad \Rightarrow \quad X = B^{-1} A.$$