10. Soustavy lineárních rovnic

Petr Gurka

katedra matematiky
Technická fakulta ČZU
e-mail: gurka@tf.czu.cz
web: http://tf.czu.cz/ ∼gurka/index2.html

7. 12. 2006

1. Homogenní soustava lineárních rovnic
   - Skalární součin ve $\mathbf{V}_n$, ortogonalita
   - Homogenní soustava — ortogonální doplněk
   - Nalezení ortogonálního doplňku
   - Vlastnosti řešení homogenní soustavy

2. Nehomogenní soustava lineárních rovnic
   - Nehomogenní soustava
   - Matice soustavy, rozšířená matice soustavy
   - Řešitelnost nehomogenní soustavy — Frobeniova věta

Soustava lineárních rovnic

Definice.

Soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + \ldots + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + \ldots + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + \ldots + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array},$$

kde a_{ij}, b_i, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, jsou daná reálná čísla, nazveme homogenní, pokud $b_1 = \cdots = b_m = 0$. Je-li aspoň jedno z čísel $b_1, \ldots, b_m$ nenulové, nazveme danou soustavu nehomogenní.
Vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, jehož složky $x_1, \ldots, x_n$ vyhovují všem rovnicím soustavy, nazveme řešením soustavy.

Skalární součin ve $\mathbf{V}_n$, ortogonalita

Definice. (skalární součin)

Jsou-li $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n)$ a $\mathbf{v} = (y_1, \ldots, y_n)$ dva vektory z aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$, pak reálné číslo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

nazýváme skalárním součinem vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$.

Definice. (ortogonalita, ortogonální doplněk)

Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$ jsou ortogonální, píšeme $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, platí-li $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Je-li M libovolná neprázdná podmnožina vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$, pak množina

$$M^{\perp} = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{V}_n \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ pro všechny vektory } \mathbf{v} \in M \right\}$$

se nazývá ortogonální doplněk množiny M.

Homogenní soustavu

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + \ldots + & a_{1n}\,x_n & = & 0 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + \ldots + & a_{2n}\,x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + \ldots + & a_{mn}\,x_n & = & 0 \end{array}, \qquad (1)$$

můžeme zapsat pomocí skalárního součinu takto:

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}_1 = 0, \quad \mathbf{x}\cdot\mathbf{a}_2 = 0, \quad \ldots \quad , \mathbf{x}\cdot\mathbf{a}_m = 0,$$

$$\mathbf{a}_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, \mathbf{a}_m = (a_{m1}, \ldots, a_{mn}) \quad \leftarrow \text{řádkové vektory matice soustavy}$$

Tj.

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}^{\perp}.$$

Problém vyřešit homogenní soustavu (1) jsme převedli na problém určit ortogonální doplněk $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}^{\perp}$.

Nalezení ortogonálního doplňku

Věta.

Nechť M je libovolná podmnožina vektorového prostoru $\mathbf{V}$. Potom ortogonální doplněk $M^\perp$ je vektorovým podprostorem prostoru $\mathbf{V}$.

Pro nalezení ortogonálního doplňku je užitečné:

Nechť M, M_1, M_2 jsou libovolné neprázdné podmnožiny aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$, potom

- $\langle M \rangle^\perp = M^\perp$,
- $\langle M_1 \rangle = \langle M_2 \rangle \Rightarrow M_1^\perp = M_2^\perp$,
- $\dim \langle M \rangle + \dim M^\perp = n$.

Vlastnosti řešení homogenní soustavy

Pro homogenní soustavu (1),

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + \ldots + & a_{1n}\,x_n & = & 0 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + \ldots + & a_{2n}\,x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + \ldots + & a_{mn}\,x_n & = & 0 \end{array},$$

platí:

- Nulový vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$ je vždy řešením homogenní soustavy.
- Je-li $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = n$, tj. hodnost matice soustavy je rovna počtu neznámých, potom nulový vektor je jediným řešením homogenní soustavy.
- Je-li $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) < n$, tj. hodnost matice soustavy je menší než počet neznámých, pak všechna řešení $\mathbf{x}$ tvoří lineární obal dimenze $n - \mathrm{h}(\boldsymbol{A})$.

Nehomogenní soustava lineárních rovnic

Uvažujme (nehomogenní) soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + \ldots + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + \ldots + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + \ldots + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array} . \qquad (2)$$

Matice soustavy, rozšířená matice soustavy

Definice.

Matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se nazývá matice soustavy (2). Matice

$$(\boldsymbol{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

s přidaným sloupcem pravých stran k matici $\boldsymbol{A}$ se nazývá rozšířená matice soustavy (2).

Jiný zápis soustavy

Soustavu (2) můžeme také zapsat ve tvaru

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

což znamená, že soustava (2) má řešení $(x_1, \ldots, x_n)$, právě když je vektor $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ pravých stran lineární kombinací sloupcových vektorů $\widetilde{\mathbf{a}}_1 = (a_{11}, \ldots, a_{m1})$, $\ldots$, $\widetilde{\mathbf{a}}_n = (a_{1n}, \ldots, a_{mn})$ matice soustavy $\boldsymbol{A}$ s koeficienty x_1, $\ldots$, x_n, tj.

$$x_1\, \widetilde{\mathbf{a}}_1 + x_2\, \widetilde{\mathbf{a}}_2 + \cdots + x_n\, \widetilde{\mathbf{a}}_n = \mathbf{b}.$$

Řešitelnost nehomogenní soustavy

Věta. (Frobeniova věta)

Nehomogenní soustava lineárních rovnic (2) *je řešitelná právě tehdy, když* $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{h}\big((\boldsymbol{A}|\mathbf{b})\big)$, *tj. hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy*.

Tvar řešení nehomogenní soustavy.

Je-li soustava (2) řešitelná, pak všechna její řešení jsou tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, kde $\mathbf{u}$ je jedno (kterékoliv) řešení soustavy (2) a $\mathbf{v}$ probíhá všechna řešení příslušné homogenní soustavy (1).