

4. Lineární algebra

Petr Gurka

katedra matematiky
Technická fakulta ČZU

e-mail: gurka@tf.czu.cz

web: <http://tf.czu.cz/~gurka/index2.html>

5. 1. 2007

1 Soustavy lineárních rovnic

- Hodnost matice
- Gaussova eliminace
- Homogenní soustavy
- Nehomogenní soustavy

2 Maticový počet

- Součet matic, násobek matice
- Součin matic
- Inverzní matice
- Výpočet inverzní matice (Jordanova eliminace)

3 Determinanty

- Výpočet determinantu řádu 1, 2 a 3
- Výpočet determinantu rozvojem podle řádku nebo sloupce
- Výpočet inverzní matice pomocí determinantů
- Řešení maticových rovnic
- Cramerovo pravidlo

Uvažujme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rclcl} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 5y & & & = & 9 \\ 3x & + & 6y & - & 2z & = & 6 \end{array} \quad (1)$$

Vyřešit soustavu (1) znamená najít čísla x , y , z , která vyhovují všem třem rovnicím této soustavy.

Je jasné, že následujícími operacemi získáme soustavu **s původní soustavou ekvivalentní**:

- 1 vynásobením kterékoliv z rovnic soustavy libovolným reálným číslem $r \neq 0$ **nebo**
- 2 záměnou rovnic mezi sebou **nebo**
- 3 **nahrazením** libovolné z rovnic soustavy **součtem** této rovnice s jinou rovnicí soustavy.

Budeme se takto snažit získat ze soustavy (1) soustavu, která má **v každé následující rovnici zleva alespoň o jednu neznámou méně než v předchozí rovnici**.

Konkrétně soustavu (1):

$$\begin{array}{rclclcl} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 5y & & & = & 9 \\ 3x & + & 6y & - & 2z & = & 6 \end{array} .$$

upravíme takto:

- přičteme (-2) -násobek 1. rovnice ke druhé rovnici,
- přičteme (-3) -násobek 1. rovnice ke třetí rovnici .

Dostaneme tak soustavu

$$\begin{array}{rclclcl} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 7 \\ & & & & z & = & 3 \end{array} .$$

Z poslední rovnice je ihned $z = 3$. Dosazením za z do druhé rovnice vyjde $y = 7 - 2z = 7 - 6 = 1$ a konečně dosazením obou hodnot do první rovnice máme $x = 1 - 2y + z = 1 - 2 + 3 = 2$. Vidíme tedy, že trojice $(x, y, z) = (2, 1, 3)$ je řešením naší soustavy.

Maticový zápis soustavy

Všechny rovnice v soustavě jsou ve tvaru, kdy stejné neznámé jsou zapsány pod sebou, takže **úpravy**, které jsme prováděli s jednotlivými rovnicemi, **stačí provádět pouze s koeficienty v těchto rovnicích**. Soustavu můžeme zapsat do matice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & 6 & -2 & 6 \end{array} \right). \quad (2)$$

Ekvivalentní **úpravy**, které jsme prováděli s rovnicemi soustavy (1) **můžeme** analogicky **provádět s řádky matice(2)**. Předchozí postup je možné maticově zapsat takto:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & 6 & -2 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Symbolem “ $\sim$ ” značíme ekvivalenci soustav (tj. ekvivalenci příslušných matic).

Matice typu (m, n)

Definice.

Maticí $\mathbf{A}$ typu (m, n) nazveme soubor mn reálných čísel zapsaných do m řádků a n sloupců ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matice $\mathbf{A}$ se nazývá **nulová matice**, jestliže obsahuje pouze nuly, tj. $a_{ij} = 0$ pro $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Nulovou matici budeme značit symbolem $\mathbf{O}$.

Definice. (Gaussův tvar matice)

Řekneme, že nenulová matice B je v **Gaussově tvaru**, jestliže **první nenulové číslo** jejího každého řádku (uvažováno zleva doprava) je zároveň **posledním nenulovým** číslem v příslušném sloupci (uvažováno shora dolů).

Příklad.

Pro názornost uveďme dvě matice, které **jsou** v Gaussově tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na druhé straně, matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

není v Gaussově tvaru.

Definice.

Matice B je ekvivalentní matici A , tj. $A \sim B$, jestliže B získáme z A provedením následujících elementárních úprav na řádky matice A :

- (a) záměna pořadí řádků;
- (b) vynásobení některého řádku matice nenulovým reálným číslem;
- (c) přičtení libovolného násobku některého řádku matice k jinému řádku matice;
- (d) vynechání nulového řádku matice, pokud tento není jediným řádkem matice;
- (e) za předpokladu, že matice obsahuje dva řádky, z nichž jeden je nenulovým násobkem druhého, vynechání jednoho z těchto řádků (kteréhokoliv).

Jak určit hodnotu matice?

Věta.

Hodnota nenulové matice A je rovna počtu řádků matice B v Gaussově tvaru takové, že $A \sim B$.

Gaussova eliminační metoda spočívá ve vhodném používání elementárních úprav (a)–(e) na řádky výchozí matice A . **Stručně řečeno**, nejdříve pomocí úpravy (a) zařídíme, aby prvek v levém horním rohu matice (tím rozumíme prvek matice v prvním řádku, uvažováno shora dolů, a v prvním nenulovém sloupci, uvažováno zleva doprava) byl nenulový (je výhodné, když toto číslo je 1 nebo -1). Pak přičítáním vhodných násobků horního řádku k řádkům pod ním (úprava (c)) zařídíme, aby pod tímto prvkem byly v příslušném sloupci nuly. V dalším kroku vynecháme v matici nulové řádky a řádky, které jsou násobky řádků nad nimi (úpravy (d) a (e)). V případě, že nejsme ještě hotovi, tj. když výsledná matice ještě není v Gaussově tvaru, celý postup zopakujeme s tím, že nyní pokračujeme o řádek níže. Jelikož výchozí matice měla konečný počet řádků, musíme po konečném počtu kroků získat výslednou matici v Gaussově tvaru.

Definice.

Soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + & \dots & + & a_{1n} x_n & = & b_1 \\ a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + & \dots & + & a_{2n} x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + & \dots & + & a_{mn} x_n & = & b_m \end{array}, \quad (3)$$

kde a_{ij} , b_i , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, jsou daná reálná čísla, nazveme **homogenní**, pokud $b_1 = \dots = b_m = 0$. Je-li aspoň jedno z čísel $b_1, \dots, b_m$ nenulové, nazveme danou soustavu **nehomogenní**.

Vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, jehož složky $x_1, \dots, x_n$ vyhovují všem rovnicím soustavy, nazveme **řešením soustavy**.

Definice.

Matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se nazývá **matice soustavy** (3). Matice

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

s přidaným sloupцем pravých stran k matici $\mathbf{A}$ se nazývá **rozšířená matice soustavy** (3).

Homogenní soustava

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + & \dots & + & a_{1n} x_n & = & 0 \\ a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + & \dots & + & a_{2n} x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + & \dots & + & a_{mn} x_n & = & 0 \end{array} \quad (4)$$

Pro homogenní soustavu (4) platí:

- Nulový vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$ je vždy řešením homogenní soustavy.
- Je-li $h(\mathbf{A}) = n$, tj. hodnost matice soustavy je rovna počtu neznámých, potom nulový vektor je jediným řešením homogenní soustavy.
- Je-li $h(\mathbf{A}) < n$, tj. hodnost matice soustavy je menší než počet neznámých, pak všechna řešení $\mathbf{x}$ tvoří lineární obal dimenze $n - h(\mathbf{A})$.

Věta. (Frobeniova věta)

Nehomogenní soustava lineárních rovnic (3) *je řešitelná* právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = h((\mathbf{A}|\mathbf{b}))$, tj. *hodnota matice soustavy je rovna hodnotě rozšířené matice soustavy.*

Tvar řešení nehomogenní soustavy.

Je-li soustava (3) řešitelná, pak všechna její *řešení* jsou tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, kde $\mathbf{u}$ je jedno (kterékoliv) *řešení soustavy (3)* a $\mathbf{v}$ probíhá všechna *řešení příslušné homogenní soustavy (4).*

Součtem dvou matic typu (m, n)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

rozumíme matici

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Je-li $r \in \mathbb{R}$, pak r -násobkem matice $\mathbf{A}$ rozumíme matici

$$r\mathbf{A} = \begin{pmatrix} r a_{11} & r a_{12} & \dots & r a_{1n} \\ r a_{21} & r a_{22} & \dots & r a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r a_{m1} & r a_{m2} & \dots & r a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Je-li $\mathbf{O}$ nulová matice typu (m, n) , pak pro každou matici $\mathbf{A}$ typu (m, n) je $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$. Dále definujeme rozdíl matic $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ jako matici $\mathbf{A} + (-1)\mathbf{B}$.

Definice. (Součin matic)

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice typu (m, p) a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ je matice typu (p, n) .

Součinem $\mathbf{A} \mathbf{B}$ matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ rozumíme matici $\mathbf{C} = (c_{ij})$ typu (m, n) , kde prvky c_{ij} jsou dány vztahem

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad \text{kde } i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Poznámka.

Definujeme-li **skalární součin** vektorů $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_p) \in \mathbf{V}_p$,

$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p) \in \mathbf{V}_p$ v prostoru $\mathbf{V}_p$ rovností

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \dots + u_p v_p = \sum_{i=1}^p u_i v_i,$$

pak číslo c_{ij} je součinem **i -tého řádku** matice $\mathbf{A}$ s **j -tým sloupcem** matice $\mathbf{B}$, tj.

$$c_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \tilde{\mathbf{b}}_j.$$

Příklad.

Máme $(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = (-12),$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3) = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & -8 & -12 \end{pmatrix}.$$

Příklad.

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 34 \end{pmatrix}$$

Součin $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ není definován.

Příklad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

POZOR !!!

Násobení matic obecně **není komutativní**, tj. AB nemusí být totéž jako BA .

- Výsledek násobení může být při záměně pořadí pokaždé jiného typu.
- Může se stát, že má smysl pouze jeden ze součinů AB , BA .
- Rovnost $AB = BA$ **nemusí platit**, ani když jsou oba součiny stejného typu.

Definice.

- Matice $\mathbf{A}$ typu (n, n) se nazývá **čtvercová matice řádu n** (nebo také **stupně n**).
- Čtvercovou matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ nazveme **diagonální**, pokud $a_{ij} = 0$ pro všechny dvojice indexů $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$, tj. diagonální matice obsahuje mimo hlavní diagonálu pouze nuly.
- Diagonální matice $\mathbf{E} = (e_{ij})$ se nazývá **jednotková**, jestliže všechny její diagonální prvky jsou rovny jedné, tj. jestliže platí $e_{ij} = 0$, $i \neq j$, a $e_{ii} = 1$ pro všechna $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Jednotkovou matici řádu n budeme značit $\mathbf{E}$, případně $\mathbf{E}_n$, tj.

$$\mathbf{E}_1 = (1), \quad \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{atd.}$$

Věta.

Nechť A , B , C jsou matice, $r \in \mathbb{R}$. Pak platí (pokud jsou příslušné součiny definovány):

$$(A) \quad r(AB) = (rA)B = A(rB),$$

$$(B) \quad A(B + C) = AB + AC,$$

$$(C) \quad (A + B)C = AC + BC,$$

$$(D) \quad (AB)C = A(BC),$$

$$(E) \quad 0A = O, A0 = O,$$

$$(F) \quad EA = A, AE = A.$$

Rovnosti (B) a (C) se nazývají *distributivní zákony*, rovnost (D) je *asociativní zákon*.

Definice.

Nechť A , B jsou čtvercové matice řádu n . Řekneme, že matice B je **inverzní** k matici A , jestliže platí $AB = BA = E$.

Definice.

Čtvercová matice řádu n se nazývá **regulární**, jestliže její hodnost $h(A)$ je rovna n . Čtvercová matice řádu n , která není regulární, se nazývá **singulární**.

Věta.

Nechť A je čtvercová matice řádu n . Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

- 1 *matice A je regulární;*
- 2 *existuje čtvercová matice B řádu n taková, že $AB = E$;*
- 3 *existuje čtvercová matice C řádu n taková, že $CA = E$.*

Nutně $B = C$ a tato matice je inverzní k matici A .

Inverzní matici k matici A **budeme značit** A^{-1} .

Výpočet inverzní matice (Jordanova eliminace)

K dané čtvercové regulární matici A řádu n vytvoříme matici $(A|E)$ typu $(n, 2n)$. Pomocí vhodných elementárních úprav na řády této matice chceme získat v levé polovině matice (tj. na místě matice A) jednotkovou matici řádu n . Na pravé straně (tj. na místě matice E) vyjde matice inverzní k matici A .

$$(A|E) \xrightarrow{\text{Gaussova eliminace na } A} \dots \xrightarrow{\text{zpětný chod}} (B|C) \xrightarrow{\dots} \dots \xrightarrow{\dots} (E|A^{-1})$$

Na začátku z matice $(A|E)$ získáme matici, v jejíž levé polovině je matice B v Gaussově tvaru.

Zpětný chod: 1. krok: Odečítáním vhodných násobků (celého) spodního řádku od (celých) řádků nad ním získáme nad prvkem vpravo dole v matici B nuly. 2. krok: celý postup zopakujeme s tím, že začneme o řádek výše atd. Po konečném počtu kroků takto získáme matici, která už má v levé polovině diagonální matici, přičemž všechny její diagonální prvky jsou nenulové. Nakonec po vydělení každého řádku příslušným nenulovým diagonálním prvkem získáme žádanou matici $(E|A^{-1})$.

Definice determinantu

Ke každé čtvercové matici je možné přiřadit jisté **reálné číslo**, které nazveme **determinantem** této matice.

Definice.

Je-li $\mathbf{A}$ matice řádu n , definujeme její **determinant** následujícím způsobem

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in \Pi_n} (-1)^{k_\pi} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}.$$

Symbol Π_n značí množinu všech permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Číslo k_π je **počet všech inverzí** permutace $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix} \in \Pi_n$.

Výpočet determinantu řádu 1, 2 a 3

① Pro $n = 1$ je $\det(a) = a$.

② Pro $n = 2$ máme

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(tj. součin prvků na hlavní diagonále minus součin prvků na vedlejší diagonále).

③ Pro $n = 3$ lze použít tzv. **Sarrusovo pravidlo**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Pozor!!!

Žádné podobné pravidlo neplatí pro $n \geq 4$.

Algebraický doplněk

Každému prvku čtvercové matice přiřadíme jisté **reálné číslo**, které nazveme **algebraickým doplňkem** tohoto prvku.

Definice.

Je-li a_{ij} , $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, prvek matice A , označme M_{ij} **submatici** (dílčí matici) matice A řádu $n - 1$, která vznikne z matice A **vynecháním** jejího i -tého řádku a j -tého sloupce. Číslo $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ se nazývá **algebraický doplněk** prvku a_{ij} v matici A .

Příklad.

Pro matici $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ je $a_{22} = 3$, $M_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, a tedy

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (18 - 20) = -2.$$

Výpočet determinantu rozvojem podle řádku nebo sloupce

Výpočet rozvojem podle řádku

Nechť $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ potom platí rovnost

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

Výpočet rozvojem podle sloupce

Nechť $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ potom platí rovnost

$$\det \mathbf{A} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}.$$

Definice.

Je-li $\mathbf{A}$ matice typu (m, n) , pak **matice transponovaná** $\mathbf{A}^T$ k matici $\mathbf{A}$, je matice typu (n, m) která vznikne z matice $\mathbf{A}$ **vzájemnou výměnou řádků za sloupce**,

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Prvky a_{ii} , kde $i = 1, 2, \dots, k$, $k = \min \{m, n\}$, tvoří **hlavní diagonálu** matice $\mathbf{A}$ (také hlavní diagonálu matice $\mathbf{A}^T$).

Příklad.

Dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & -4 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{pak} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & 6 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

hlavní diagonálu obou matic tvoří prvky 1, 3, 6.

Výpočet inverzní matice pomocí determinantů

Věta.

Čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n je **regulární** právě když platí $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Věta.

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová regulární matice řádu n . Potom k ní existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ a platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot (A_{ij})^T = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

kde čísla A_{ij} , jsou **algebraické doplňky** k prvkům a_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, n\}$, matice $\mathbf{A}$.

Inverzní matice k matici 2. řádu

Je-li

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

potom

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Předpokládejme, že B je **regulární matice**. Při řešení maticových rovnic využijeme:

$$X B = A \quad \Rightarrow \quad X = A B^{-1}.$$

$$B X = A \quad \Rightarrow \quad X = B^{-1} A.$$

CRAMEROVO PRAVIDLO. Uvažujme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \dots + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \quad (5)$$

s **regulární** maticí soustavy **A**. Nechť **A**_(j) značí matici, která vznikne z matice soustavy **A** **nahrazením** jejího **j-tého** sloupce, $j \in \{1, \dots, n\}$, sloupcem **b** pravých stran, tj.

$$\mathbf{A}_{(j)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Potom pro vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ **řešení** soustavy (5) platí

$$x_j = \frac{\det \mathbf{A}_{(j)}}{\det \mathbf{A}}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$