

9. Ortogonalita, homogenní soustavy lineárních rovnic

Petr Gurka

katedra matematiky
Technická fakulta ČZU

e-mail: gurka@tf.czu.cz

web: <http://tf.czu.cz/~gurka/index2.html>

30. 11. 2006

1 Vektorový podprostor

- Definice vektorového podprostoru
- Podprostor generovaný množinou
- Báze a dimenze vektorového podprostoru
- Určování báze a dimenze lineárního obalu

2 Homogenní soustavy lineárních rovnic

- Skalární součin ve $\mathbf{V}_n$, ortogonalita
- Homogenní soustava — ortogonální doplněk
- Nalezení ortogonálního doplněku

Vektorový podprostor

Předpokládejme, že $\mathbf{V}$ je vektorový prostor (např. aritmetický, tj. $\mathbf{V} = \mathbf{V}_n$).

Definice.

Neprázdňá podmnožina $\mathbf{W}$ vektorového prostoru $\mathbf{V}$ se nazývá **vektorový podprostor** prostoru $\mathbf{V}$, jsou-li splněny následující dvě podmínky:

- 1 pro každé dva prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{W}$ je $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{W}$;
- 2 pro každé $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ a každé reálné číslo r je $r\mathbf{u} \in \mathbf{W}$.

Tuto skutečnost budeme značit $\mathbf{W} \subset\subset \mathbf{V}$.

Příklady. (Triviální podprostory)

Z definice ihned vidíme, že nejjednoduššími podprostory vektorového prostoru $\mathbf{V}$ jsou:

- 1 Nulový podprostor, tj. $\{\mathbf{o}\} \subset\subset \mathbf{V}$.
- 2 Prostor $\mathbf{V}$, tj. $\mathbf{V} \subset\subset \mathbf{V}$.

Věta.

Průnik libovolného neprázdného systému podprostorů vektorového prostoru $\mathbf{V}$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbf{V}$.

Definice.

Nechť M je libovolná podmnožina vektorového prostoru $\mathbf{V}$. Podprostor $\mathbf{U}$, který je **průnikem všech podprostorů** obsahujících množinu M , tj.

$$\mathbf{U} = \bigcap \{ \mathbf{W} \mid M \subset \mathbf{W}, \mathbf{W} \subset \mathbf{V} \},$$

se nazývá **podprostor generovaný množinou M** .

Věta.

Nechť $M = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ je podmnožinou vektorového prostoru $\mathbf{V}$. Potom

- ① *lineární obal $\langle M \rangle$ je podprostorem prostoru $\mathbf{V}$,*
- ② *navíc platí, že lineární obal $\langle M \rangle$ je podprostorem generovaným množinou M (tj. je "nejmenším" podprostorem obsahujícím množinu M).*

Definice. (Báze vektorového podprostoru)

Množina M se nazývá **báze vektorového podprostoru V** , jestliže jsou splněny následující podmínky:

- 1 M je podmnožinou V , tj. $M \subset V$;
- 2 M generuje podprostor V ;
- 3 M je lineárně nezávislá.

Lineární nezávislost nekonečné množiny

Nekonečná množina M je lineárně nezávislá, jestliže každá její konečná podmnožina je lineárně nezávislá.

Příklad. (Kanonická báze V_n)

Podmnožina $E_n = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset V_n$, kde $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$ tvoří bázi aritmetického vektorového prostoru V_n . Tato báze se nazývá **kanonická báze V_n** .

Nechť $\mathbf{V} = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$, přičemž **aspoň jeden** z vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ je **nenulový**. Potom

- 1 vektorový prostor $\mathbf{V}$ má bázi;
- 2 vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ **tvoří bázi $\mathbf{V}$** , **právě když** jsou lineárně **nezávislé**;
- 3 každé dvě báze prostoru $\mathbf{V}$ mají **stejný** počet vektorů.

Poznámka.

Obecně platí:

- 1 každý vektorový (pod)prostor $\mathbf{V} \neq \{\mathbf{o}\}$ má bázi,
- 2 jsou-li M, N dvě báze téhož vektorového (pod)prostoru $\mathbf{V}$, pak tyto množiny mají stejný počet prvků.

Dimenze vektorového (pod)prostoru

Definice.

Nechť V je vektorový (pod)prostor. **Dimenze** (pod)prostoru V (značíme $\dim V$) je číslo, které je rovno

- 1 nule, je-li $V = \{0\}$,
- 2 počtu prvků (libovolné) báze (pod)prostoru V , je-li $V \neq \{0\}$.

Příklad.

Snadno nahlédneme, že $\dim V_n = n$.

Věta. (Určování báze a dimenze lineárního obalu)

Nechť $\mathbf{V} = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \rangle$, kde $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ jsou řádkové vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

tj. $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, \mathbf{a}_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn}) \in \mathbf{V}_n$.

Potom

- 1 jsou-li vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ jsou lineárně *nezávislé*, je množina $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ *bází* prostoru $\mathbf{V}$;
- 2 je-li $\mathbf{B}$ matice v Gaussově tvaru ekvivalentní s $\mathbf{A}$, tj. $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, pak *množina řádkových vektorů* matice $\mathbf{B}$ je *bází* prostoru $\mathbf{V}$;
- 3 dimenze prostoru $\mathbf{V}$ je rovna hodnotě matice $\mathbf{A}$, tj. $\dim \mathbf{V} = h(\mathbf{A})$;
- 4 vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ jsou lineárně *nezávislé*, *právě když* hodnota matice $\mathbf{A}$ je rovna jejich počtu, tj. $h(\mathbf{A}) = m$;

Skalární součin ve $\mathbf{V}_n$, ortogonalita

Definice. (skalární součin)

Jsou-li $\mathbf{u} = (x_1, \dots, x_n)$ a $\mathbf{v} = (y_1, \dots, y_n)$ dva vektory z aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$, pak reálné číslo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

nazýváme **skalárním součinem** vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$.

Definice. (ortogonalita, ortogonální doplněk)

Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$ jsou **ortogonální**, píšeme $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, platí-li $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Je-li M libovolná neprázdná podmnožina vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$, pak množina

$$M^\perp = \{\mathbf{u} \in \mathbf{V}_n \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ pro všechny vektory } \mathbf{v} \in M\}$$

se nazývá **ortogonální doplněk** množiny M .

Homogenní soustava lineárních rovnic

Jedná se o soustavu

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \dots + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \quad (1)$$

Matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazveme maticí soustavy (1).

Homogenní soustavu (1),

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \dots + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array},$$

můžeme zapsat pomocí skalárního součinu takto:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_1 = 0, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_2 = 0, \quad \dots, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_m = 0,$$

$$\mathbf{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, \mathbf{a}_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn}) \quad \leftarrow \text{řádkové vektory matice soustavy}$$

Tj.

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}^\perp.$$

Problém vyřešit homogenní soustavu (1) jsme převedli na problém určit ortogonální doplněk $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}^\perp$.

Nalezení ortogonálního doplňku

Věta.

Nechť M je libovolná podmnožina vektorového prostoru $\mathbf{V}$. Potom ortogonální doplněk $M^\perp$ je vektorovým podprostorem prostoru $\mathbf{V}$.

Pro nalezení ortogonálního doplňku je užitečné:

Nechť M , M_1 , M_2 jsou libovolné neprázdné podmnožiny aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$, potom

- $\langle M \rangle^\perp = M^\perp$,
- $\langle M_1 \rangle = \langle M_2 \rangle \Rightarrow M_1^\perp = M_2^\perp$,
- $\dim \langle M \rangle + \dim M^\perp = n$.