

5. Konvexita, konkávita, průběh funkce.

Petr Gurka

katedra matematiky
Technická fakulta ČZU

e-mail: gurka@tf.czu.cz

web: <http://tf.czu.cz/~gurka/index2.html>

2. 11. 2006

1 Konvexita a konkávita

- Funkce konvexní a konkávní
- Inflexní bod grafu funkce
- Určování konvexity a konkávity pomocí druhé derivace
- Napojování konvexity a konkávity

2 Vyšetřování průběhu funkce

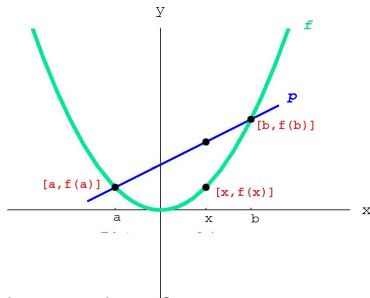
- Co se musí vyšetřit
- Příklady

Konvexní funkce

Definice.

Řekneme, že funkce f je **konvexní** na intervalu $\mathcal{I}$, jestliže pro všechna $a, b \in \mathcal{I}$, $a < b$, a všechna $x \in (a, b)$ je splněna nerovnost

$$f(x) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$



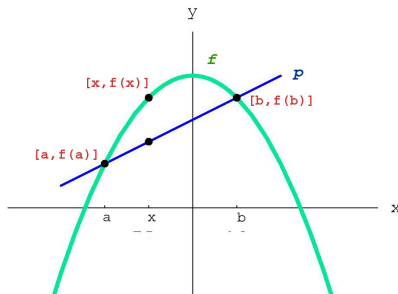
Konvexní: spojnice bodů je nad grafem.

Konkávni funkce

Definice.

Řekneme, že funkce f je **konkávni** na intervalu $\mathcal{I}$, jestliže pro všechna $a, b \in \mathcal{I}$, $a < b$, a všechna $x \in (a, b)$ je splněna nerovnost

$$f(x) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

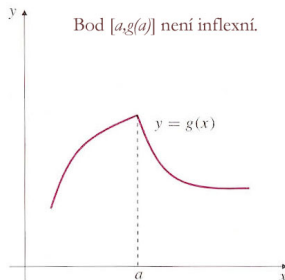
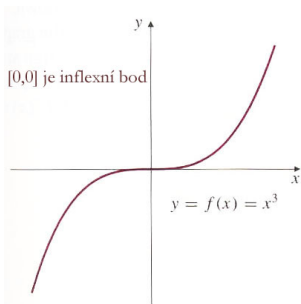


Konkávni: spojnice bodů je pod grafem.

Definice. (Inflexní bod grafu)

Bod $A = [a, f(a)]$ je **inflexním bodem** grafu funkce f , jestliže:

- 1 bod a je vnitřním bodem definičního oboru funkce f , (tj. pro nějaké $\delta > 0$ je $(a - \delta, a + \delta) \subset \mathcal{D}(f)$);
- 2 funkce f má v bodě a vlastní derivaci $f'(a)$;
- 3 na jednom z intervalů $(a - \delta, a)$, $\langle a, a + \delta \rangle$ je funkce f konvexní a na druhém z nich je konkávní.



Věta.

Nechť funkce f má vlastní druhou derivaci $f''(x)$ ve všech bodech otevřeného intervalu $(a, b) \subset \mathcal{D}(f)$. Potom platí

- 1 je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, je funkce f **konvexní** na intervalu (a, b) ;
- 2 je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, je funkce f **konkávní** na intervalu (a, b) .

V případě, že funkce je navíc (jednostranně) spojitá v některém z krajních bodů a , b , platí příslušná vlastnost na intervalu obsahujícím tento krajní bod (tyto krajní body).

POZOR!

Funkce, která je konvexní, resp. konkávní, na sousedních intervalech, ještě nemusí být konvexní, resp. konkávní, na jejich sjednocení, i když je spojitá ve společném bodě těchto dvou intervalů.

Věta.

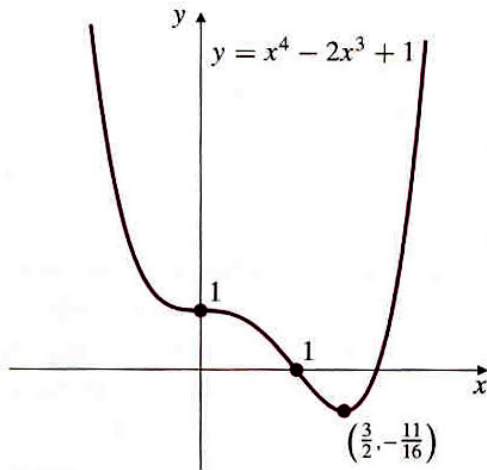
Nechť $a < c < b$, $f''(c) = 0$. Pak

- 1 pokud je $f'' > 0$ na intervalech (a, c) a (c, b) , je f konvexní na intervalu (a, b) ;
- 2 pokud je $f'' < 0$ na intervalech (a, c) a (c, b) , je f konkávní na intervalu (a, b) .

Konkrétně se vyšetřuje toto:

- 1 definiční obor funkce,
- 2 elementární vlastnosti funkce (tj. průsečíky s osami, symetrie grafu apod.),
- 3 limity v krajních bodech definičního oboru (tedy případně také limity v nevlastních bodech $-\infty$ a ∞ , asymptoty grafu),
- 4 intervaly monotonie, extrémy,
- 5 konvexita, konkávita, inflexní body grafu,
- 6 funkční hodnoty v důležitých bodech,
- 7 sestavení grafu.

Průběh funkce $f : y = x^4 - 2x^3 + 1$



Příklad

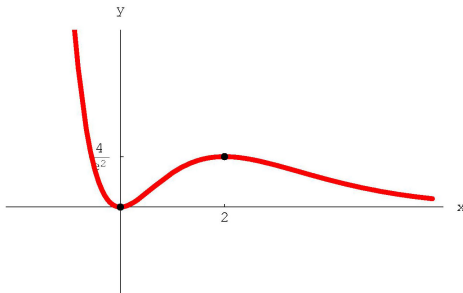
Uvažujme funkci

$$f : y = x^2 e^{-x}.$$

Platí, že definiční obor je $\mathcal{D}(f) = (-\infty, \infty)$, první derivace je

$$f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x} x(2 - x).$$

Je $f' > 0$ na $(0, 2)$, tedy f roste na $\langle 0, 2 \rangle$; $f' < 0$ na $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, tedy f klesá na $(-\infty, 0]$ a na $[2, \infty)$.



Pokračování příkladu

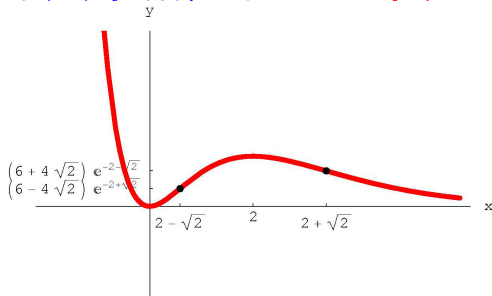
Uvažujme opět funkci

$$f : y = x^2 e^{-x}, \quad \mathcal{D}(f) = (-\infty, \infty).$$

První derivace je $f'(x) = e^{-x} x(2 - x)$ a druhá derivace je po úpravě

$$f''(x) = e^{-x} (x - (2 - \sqrt{2})) (x - (2 + \sqrt{2})).$$

Je $f'' < 0$ na $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$, tedy f je konkávní na $\langle 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2} \rangle$;
 $f'' > 0$ na $(-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, \infty)$, tedy f je konvexní na
 $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$ a na $\langle 2 + \sqrt{2}, \infty \rangle$. l. b.: $x = 2 - \sqrt{2}$. $x = 2 + \sqrt{2}$.



Funkce $f : y = x^2 e^{-x}$ a její derivace

