4. Monotonie a extrémy funkce.

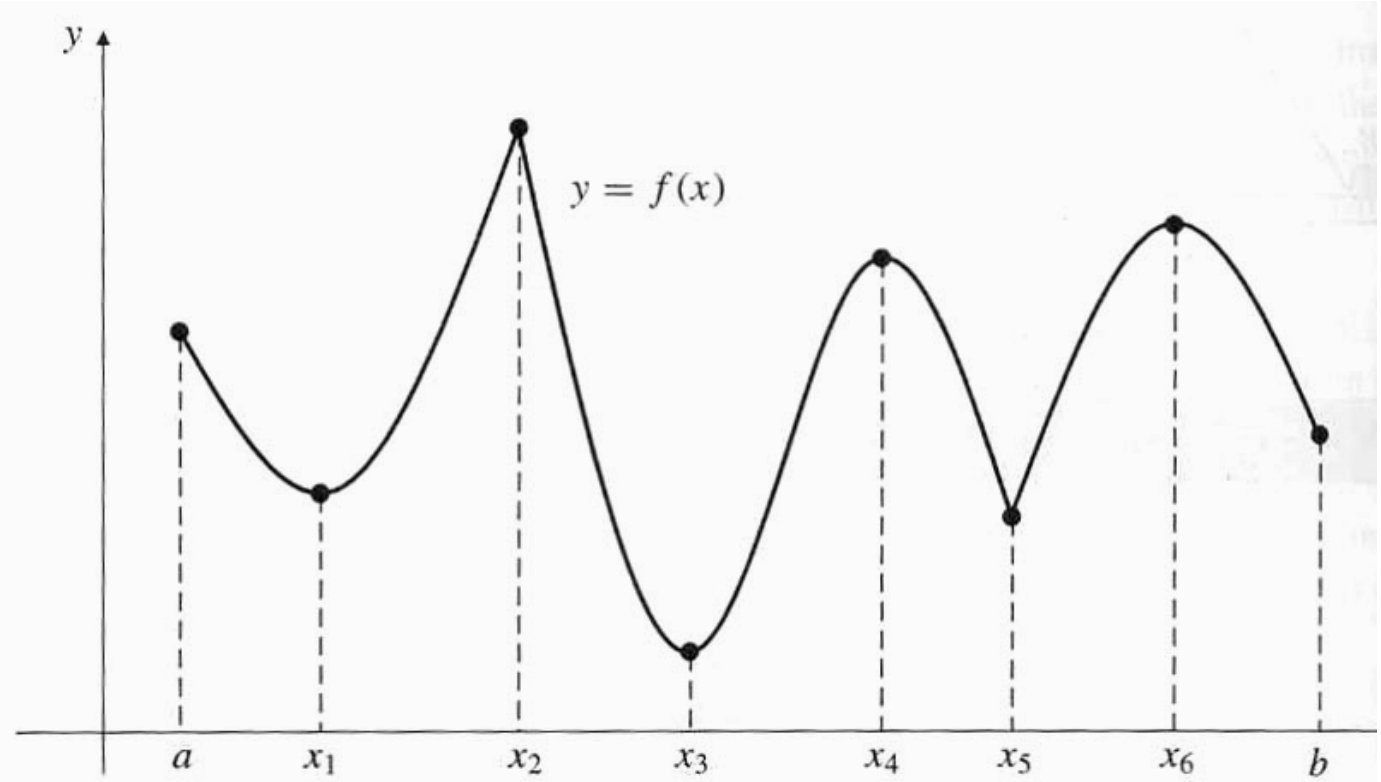
Petr Gurka

katedra matematiky
Technická fakulta ČZU
e-mail: gurka@tf.czu.cz
web: http:\\tf.czu.cz\ ~gurka\index2.html

26. 10. 2006

1. Lokální extrémy
   - Lokální minimum a maximum
   - Nutná podmínka pro existenci lokálního extrému

2. Funkce monotonní na intervalu
   - Funkce rostoucí a funkce klesající na intervalu
   - Určování monotonie podle 1. derivace
   - Co lze usoudit z monotonie na sousedních intervalech



Definiční obor: $\mathcal{D}(f) = \langle a, b \rangle$

Lokální minima v bodech: x_1, x_3, x_5.

Lokální maxima v bodech: x_2, x_4, x_6.

V krajních bodech a, b nejsou lokální extrémy

Definice. (lokální extrémy)

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathcal{D}(f)$

1. lokální minimum, jestliže existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in (a-\delta, a+\delta)$ je $f(x) \geq f(a)$;
2. lokální maximum, jestliže existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in (a-\delta, a+\delta)$ je $f(x) \leq f(a)$.

Říkáme, že lokální maximum (resp. lokální minimum) je ostré, jestliže je nerovnost ostrá, když $\delta > 0$ je dostatečně malé a $x \neq a$.

Důležité.

Nutně $(a-\delta, a+\delta) \subset \mathcal{D}(f)$, tj. lokální extrémy mohou být pouze ve vnitřních bodech definičního oboru, tedy nikoliv v krajních bodech.

Nutná podmínka pro existenci lokálního extrému

Věta.

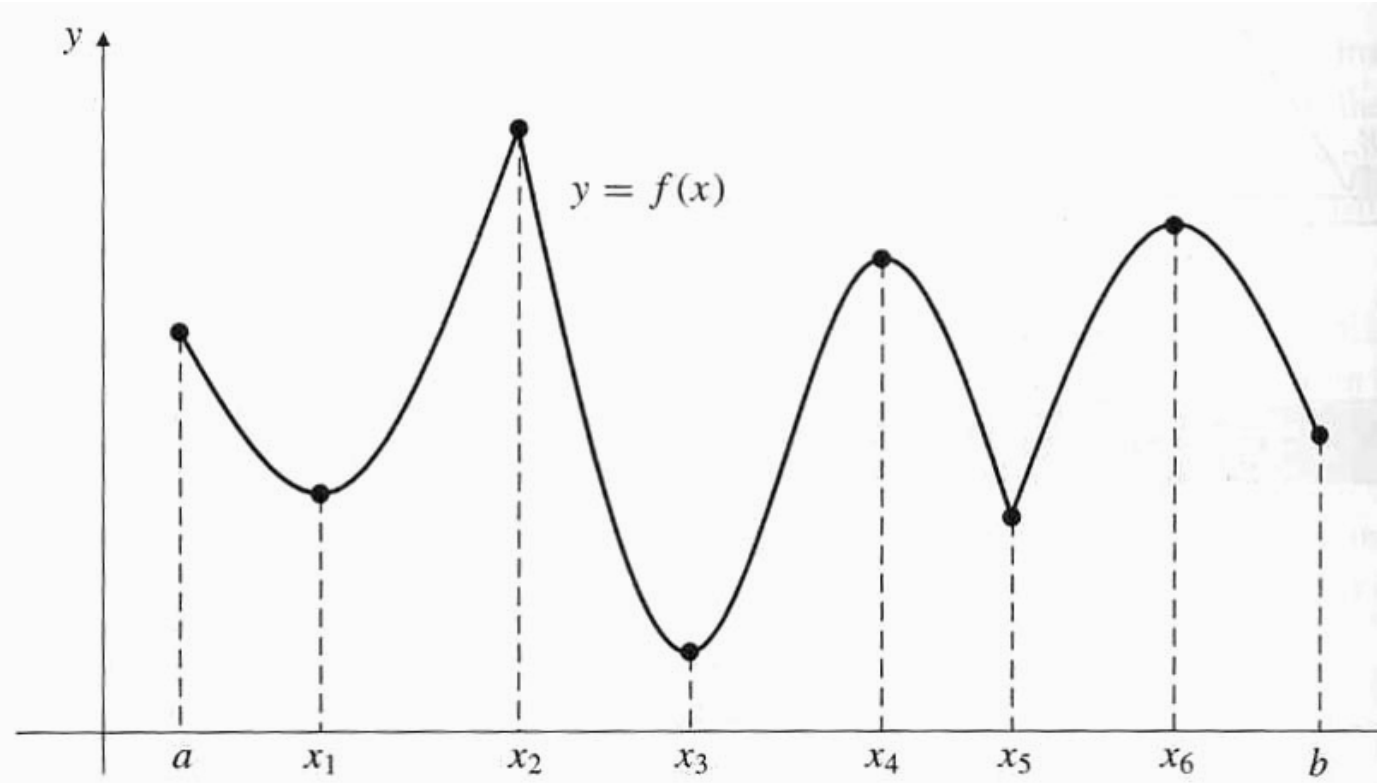
Má-li funkce f v bodě $a \in \mathcal{D}(f)$ lokální extrém a existuje-li vlastní derivace $f'(a)$ v bodě a, potom $f'(a) = 0$.

(Výhoda)

Snadný výpočet: podezřelé body najdeme jako řešení rovnice $f'(x) = 0$.

(Nevýhody)

1. Najdeme i body, ve kterých nejsou extrémy.
2. Nenajdeme body, ve kterých jsou lokální extrémy a funkce v nich nemá derivaci.



Definiční obor: $\mathcal{D}(f) = \langle a, b \rangle$

Funkce f roste na intervalech: $\langle x_1, x_2 \rangle$, $\langle x_3, x_4 \rangle$, $\langle x_5, x_6 \rangle$.

Funkce f klesá na intervalech: $\langle a, x_1 \rangle$, $\langle x_2, x_3 \rangle$, $\langle x_4, x_5 \rangle$, $\langle x_6, b \rangle$.

Funkce monotonní na intervalu

Definice.

Nechť f je funkce s definičním oborem $\mathcal{D}(f)$ a nechť $\mathcal{J} \subset \mathcal{D}(f)$ je neprázdný interval libovolného typu (tj. otevřený, uzavřený nebo polouzavřený). Řekneme, že funkce f je

1. rostoucí na intervalu $\mathcal{J}$, jestliže pro všechny body $x_1, x_2 \in \mathcal{J}$ takové, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$;
2. klesající na intervalu $\mathcal{J}$, jestliže pro všechny body $x_1, x_2 \in \mathcal{J}$ takové, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce, která je rostoucí na intervalu $\mathcal{J}$ anebo je klesající na intervalu $\mathcal{J}$, se nazývá *(ryze) monotonní* na intervalu $\mathcal{J}$.

Určování monotonie podle 1. derivace

Věta.

Nechť f je funkce, která má vlastní derivaci $f'(x)$ ve všech bodech otevřeného intervalu $(a, b) \subset \mathcal{D}(f)$. Potom platí

1. *je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, je funkce f rostoucí na intervalu (a, b);*
2. *je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, je funkce f klesající na intervalu (a, b);*
3. *je-li $f'(x) = 0$ pro každé $x \in (a, b)$, je funkce f konstantní na intervalu (a, b).*

Je-li navíc f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ (resp. na $\langle a, b)$ nebo na $(a, b\rangle$), pak všechna tvrzení platí na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ (resp. polouzavřeném intervalu $\langle a, b)$ nebo $(a, b\rangle$).

Napojování monotonie

Věta.

Nechť $a < c < b$ a f je spojitá v bodě c. Pak

1. *pokud funkce f je rostoucí na intervalech (a, c) a (c, b), je také rostoucí na intervalu (a, b);*
2. *pokud funkce f je klesající na intervalech (a, c) a (c, b), je také klesající na intervalu (a, b).*

Věta. (Lokální extrémy na základě monotonie)

Nechť $a < c < b$ a f je spojitá v bodě c. Pak

1. *pokud funkce f je rostoucí na intervalu (a, c) a klesající na intervalu (c, b), má v bodě c ostré lokální maximum;*
2. *pokud funkce f je klesající na intervalu (a, c) a rostoucí na intervalu (c, b), má v bodě c ostré lokální minimum.*

Věta. (Důsledek)

Nechť funkce f je spojitá v bodě a a má vlastní derivace $f'(x)$ v intervalech $(a - \delta, a)$, $(a, a + \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$. Potom platí:

1. *je-li $f'(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a - \delta, a)$ a $f'(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, a + \delta)$, pak funkce f má v bodě a lokální maximum;*
2. *je-li $f'(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a - \delta, a)$ a $f'(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, a + \delta)$, pak funkce f má v bodě a lokální minimum.*

Jsou-li v předchozích předpokladech všechny nerovnosti ostré, jedná se o příslušný ostrý lokální extrém.