

3. Fyzikální a geometrický význam derivace.

Petr Gurka

katedra matematiky
Technická fakulta ČZU

e-mail: gurka@tf.czu.cz

web: <http://tf.czu.cz/~gurka/index2.html>

19. 10. 2006

- 1 Derivace funkce v bodě
 - Definice první derivace
 - Poznámky

- 2 Fyzikální a geometrický význam derivace
 - Okamžitá rychlost
 - Tečna a normála
 - Derivace a spojitost

Definice. (Derivace funkce v bodě)

Nechť f je funkce a a reálné číslo. Potom **první derivace** $f'(a)$ funkce f v bodě a je definována vztahem

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

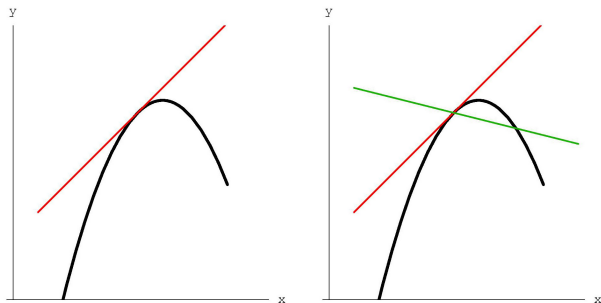
Hovoříme o **nevlastní derivaci**, je-li tato limita nevlastní. Pokud limita neexistuje, říkáme, že funkce f nemá v bodě a derivaci.

Místo zápisu $f'(a)$ se také používají zápisy $\frac{df}{dx}(a)$, $\frac{d}{dx}f(a)$.

Poznámka.

- 1 Nahrádíme-li oboustrannou limitu v definici derivace limitou zprava, resp. zleva, hovoříme o derivaci zprava, resp. zleva.
- 2 První derivace $f'(a)$ může existovat pouze tehdy, je-li bod a **vnitřním bodem** definičního oboru $\mathcal{D}(f)$ funkce f .
- 3 Derivace v bodě a zleva (resp. zprava) může existovat pouze tehdy, existuje-li číslo $\delta > 0$ takové, že $(a - \delta, a) \subset \mathcal{D}(f)$ (resp. $(a, a + \delta) \subset \mathcal{D}(f)$).

Okamžitá rychlost



Definice.

Nechť existuje derivace $f'(a)$ v bodě a . Přímku t určenou rovnicí

$$t : y - f(a) = f'(a)(x - a),$$

nazveme **tečnou** ke grafu funkce f v bodě grafu $T = [a, f(a)]$.

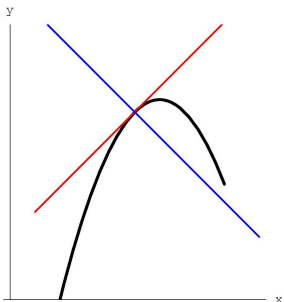
Definice.

Nechť existuje derivace $f'(a)$ v bodě a . Přímku n určenou rovnicí

$$n : x = a \quad \text{pro } f'(a) = 0,$$

$$n : y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a) \quad \text{pro } f'(a) \neq 0,$$

nazveme **normálou** ke grafu funkce f v bodě grafu $T = [a, f(a)]$.

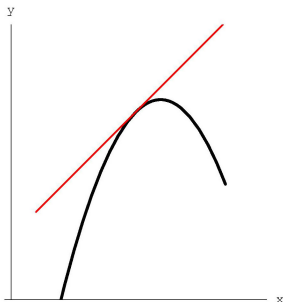


Aproximace grafu funkce tečnou

Věta.

Nechť funkce f má vlastní derivaci $f'(a)$ v bodě a . Pak platí:

- ① *v okolí $(a - \delta, a + \delta)$ bodu a lze graf funkce f aproximovat tečnou v tomto bodě, přičemž chyba v bodě $a + h$ je řádově menší než $|h|$;*
- ② *funkce f je spojitá v bodě a .*



Důkaz aproximace tečnou.

Máme

$$\Delta_h = |f(a+h) - f(a) - f'(a)h| = |h| |g(h)|,$$

kde

$$g(h) = \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right) \rightarrow 0 \quad \text{pro } h \rightarrow 0.$$

Důkaz spojitosti funkce.

Platí

$$|f(a+h) - f(a)| - |f'(a)h| \leq |f(a+h) - f(a) - f'(a)h| = |h| |g(h)|.$$

Odtud ihned

$$|f(a+h) - f(a)| \leq (|g(h)| + |f'(a)|) |h| \leq c |h| \quad \text{pro } |h| < \delta.$$

Tedy

$$|f(a+h) - f(a)| \rightarrow 0 \quad \text{pro } h \rightarrow 0.$$