

2. Derivace, limita a spojitost

Petr Gurka

katedra matematiky
Technická fakulta ČZU

e-mail: gurka@tf.czu.cz

web: <http://tf.czu.cz/~gurka/index2.html>

12. 10. 2006

1 Derivování elementárních funkcí

- Označení
- Vzorce pro derivace elementárních funkcí
- Pravidla pro derivování

2 Spojitost a limita funkce

- Spojitost funkce v bodě
- Limita funkce v bodě
- Jednostranná spojitost, jednostranná limita
- Spojitost elementárních funkcí

Derivace elementární funkce

Je-li f elementární funkce, potom symbolem f' budeme značit (první) **derivaci** funkce f .

Symbolem f'' značíme **druhou derivaci** funkce f ,

$$f'' = (f')'.$$

Symbolem $f^{(k)}$ značíme **k -tou derivaci** funkce f (derivaci k -tého řádu),

$$f^{(k)} = (f^{(k-1)})', \quad k \in \mathbb{N}, k > 2.$$

Symbolem $f^{(k)}(a)$ (**kde $k \in \mathbb{N}$**) značíme **k -tou derivaci** funkce f **v bodě a** .

Derivace elementárních funkcí

Konstanta, obecná mocnina.

$$\begin{aligned}(C)' &= 0 & (C \in \mathbb{R}), \quad x \in \mathbb{R}, \\ (x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1} & (\alpha \in \mathbb{R}), \quad x \in (0, \infty) \quad (\text{resp. } x \in \mathbb{R} \text{ nebo } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).\end{aligned}$$

Speciálně:

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \in (0, \infty).$$

Exponenciála, logaritmus.

$$\begin{aligned}(e^x)' &= e^x, & (a^x)' &= a^x \ln a & (a > 0, a \neq 1), & x \in \mathbb{R}, \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x}, & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} & (a > 0, a \neq 1), & x \in (0, \infty).\end{aligned}$$

Goniometrické a cyklometrické funkce.

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \cos x, & x \in \mathbb{R}, \\(\cos x)' &= -\sin x, & x \in \mathbb{R}, \\(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, & x \in \mathbb{R}, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \\(\operatorname{cotg} x)' &= \frac{-1}{\sin^2 x}, & x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in (-1, 1), \\(\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in (-1, 1), \\(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}, & x \in \mathbb{R}, \\(\operatorname{arccotg} x)' &= \frac{-1}{1+x^2}, & x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Algebraické operace.

- ① **derivace součtu:** $(f + g)' = f' + g'$;
- ② **derivace rozdílu:** $(f - g)' = f' - g'$;
- ③ **derivace součinu:** $(fg)' = f'g + fg'$;
speciálně: $(cf)' = cf'$ (c konstanta);
- ④ **derivace podílu:** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$;
speciálně: $\left(\frac{f}{c}\right)' = \frac{f'}{c}$ (c konstanta).

Derivace složené funkce.

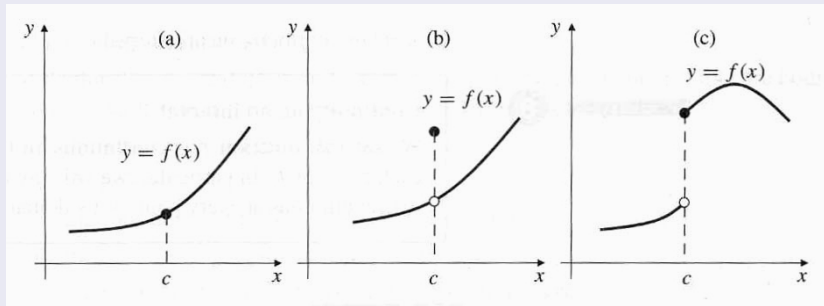
$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) g'(x).$$

Spojítost funkce v bodě

Definice.

Funkce f je spojitá v bodě c , jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ takové, že kdykoliv $|x - c| < \delta$, pak $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Tj. když x se blíží k c (zprava nebo zleva, může být i $x = c$), potom se $f(x)$ blíží k $f(c)$.

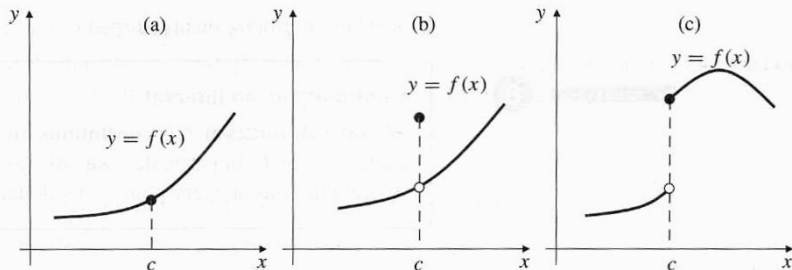


Limita funkce v bodě

Definice.

Funkce f má v bodě c (vlastní) limitu A , jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ takové, že kdykoliv $0 < |x - c| < \delta$, pak $|f(x) - A| < \varepsilon$. Píšeme $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$.

Tj. když x se blíží k c (zprava nebo zleva, ale $x \neq c$), potom se $f(x)$ blíží k A .



Spojítost v bodě c , limita v bodě c .

Platí:

- 1 Bod spojitosti c musí být **vnitřním bodem** definičního oboru $\mathcal{D}(f)$ funkce f , tj. **Pro nějaké $\delta > 0$ je otevřený interval $(c - \delta, c + \delta) \subset \mathcal{D}(f)$.**
- 2 K existenci limity v bodě c je nutné, aby $(c - \delta, c) \cup (c, c + \delta) \subset \mathcal{D}(f)$, tedy není nutné, aby funkce byla definovaná v bodě c .

Věta.

Funkce f je spojitá v bodě c , právě když

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Jednostranná spojitost, jednostranná limita, spojitost na intervalu

Když v definici spojitosti, případně v definici limity, místo x se blíží k c uvažujeme, že x se blíží k c zleva (resp. zprava), píšeme $x \rightarrow c^-$ (resp. $x \rightarrow c^+$), hovoříme o jednostranné spojitosti, případně limitě, zleva (resp. zprava).

Definice. (Spojítost na intervalu)

Nechť $\mathcal{J} \subset \mathcal{D}(f)$ je interval libovolného typu.

- 1 Je-li $\mathcal{J}$ **otevřený** interval, je funkce f spojitá na $\mathcal{J}$, jestliže je spojitá v každém jeho bodě.
- 2 Je-li $\mathcal{J}$ je **polouzavřený** nebo **uzavřený** interval, je funkce f spojitá na $\mathcal{J}$, je-li
spojitá v každém jeho vnitřním bodě a
jednostranně spojitá v krajních bodech. (Tj. pokud tomuto intervalu náleží jeho levý, resp. pravý, krajní bod, pak je f v tomto krajním bodě spojitá zleva, resp. zprava.)

Poznámka.

- ① Je-li f spojitá na intervalu $\mathcal{I}$, potom množina

$$f(\mathcal{I}) := \{y = f(x) \mid x \in \mathcal{I}\}$$

je také interval.

- ② Je-li navíc f **prostá** na $\mathcal{I}$, potom oba intervaly jsou stejného typu a krajní body intervalu $\mathcal{I}$ se zobrazí na krajní body intervalu $f(\mathcal{I})$.

Spojitosť elementárních funkcí

Věta.

Nechť f je elementární funkce a nechť $\mathcal{I}$ je interval libovolného typu, který je podmnožinou definičního oboru funkce f . Potom f je spojitá na $\mathcal{I}$.

Poznámka.

Je-li f elementární funkce a c je vnitřní bod jejího definičního oboru, platí

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$