

1. Reálná funkce reálné proměnné

Petr Gurka

katedra matematiky
Technická fakulta ČZU

e-mail: gurka@tf.czu.cz

web: <http://tf.czu.cz/~gurka/index2.html>

5. 10. 2006

1 Informace o předmětu

2 Reálná funkce reálné proměnné

- Elementární funkce: konstantní, identita, exponenciála, sinus
- Obecný pojem funkce
- Vytvoření nové funkce z daných funkcí
- Elementární funkce: kvadratická, kubická, absolutní hodnota, kosinus, tangens, kotangens
- Inverzní funkce
- Elementární funkce — dvojice vzájemně inverzních funkcí: mocnina-odmocnina, exponenciální-logaritmická, goniometrické-cyklometrické
- Základní elementární funkce, elementární funkce

Doporučená studijní literatura



V. Slavík, O. Pokorná

Kapitoly z elementární matematiky, ČZU, Praha, 2006



V. Slavík, M. Wohlmuthová

Matematika I, ČZU, Praha, 2004



V. Slavík, M. Wohlmuthová

Matematika II, ČZU, Praha, 2003



katedra matematiky

Matematické vzorce



L. Bican, M. Čermák, P. Gurka, O. Pokorná, M. Wohlmuthová

Matematika pro AF a ITSZ – přednášky a cvičení, Praha, 2002
(k dispozici na internetu)



Š. Dvořáková, M. Trch

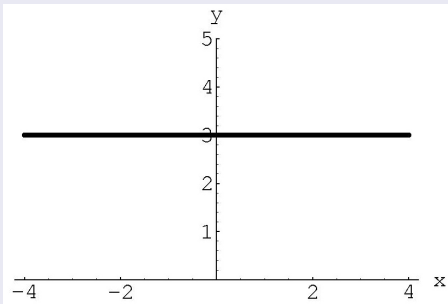
Matematika v otázkách a příkladech, Praha, 2005

- 1 Na posledním cvičení semestru (14. výukový týden) se píše písemka. Při zisku **aspoň 31 bodů** (maximum je 60 bodů) je možné si nechat uznat zkoušku (možné pouze v prvních dvou zkušebních termínech).
- 2 Zkouška je pouze písemná. Termíny: (čtvrtky, od 9:00) **18. 1., 25. 1., 1. 2., 8. 2., 15. 2.** (řádné termíny), **14. 6., 28. 6., 20. 9.** (opravné termíny). Nutno se přihlásit přes internet. Je nutné se dostavit aspoň jednou v řádném termínu.
- 3 Další informace na webové adrese: <http://matematika.tf.czu.cz>

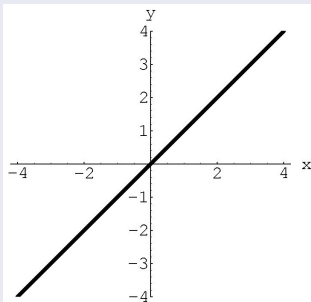
Konstantní funkce

$$\mathcal{K}_c : y = c, \quad x \in \mathbb{R},$$

$c \in \mathbb{R}$ je konstanta. (Na obrázku je graf funkce $\mathcal{K}_3 : y = 3$.)



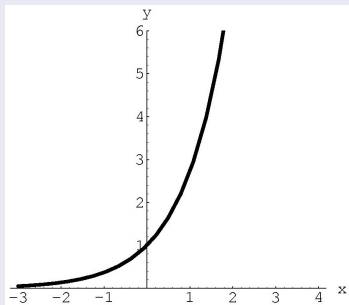
$$Id : y = x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}$$



Exponenciální funkce (se základem e)

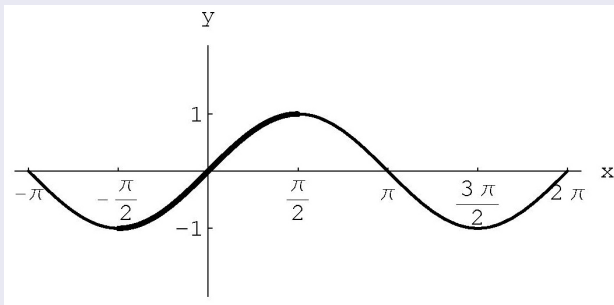
Eulerovo číslo: $e = 2,718\dots$

$$\exp : y = e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in (0, \infty)$$



Funkce sinus

$$\sin : y = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \langle -1, 1 \rangle$$



Definice.

Za *reálnou funkci* f *reálné proměnné* považujeme neprázdnou množinu uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, splňující podmínku: **ke každému x existuje nejvýše jedno y , že $[x, y] \in f$.**

Skutečnost $[x, y] \in f$ zapisujeme následujícími způsoby:

$$f : x \mapsto y \quad \text{nebo} \quad y = f(x).$$

Množina všech přípustných x se nazývá *definiční obor funkce* f , značí se $\mathcal{D}(f)$. Množina příslušných y se nazývá *obor hodnot funkce* f , značí se $\mathcal{H}(f)$.

Není-li řečeno jinak, považujeme za definiční obor funkce f množinu všech x , pro která má pravá strana rovnice $y = f(x)$ smysl.

Definice.

Dána funkce

$$f : x \mapsto y.$$

Množina všech uspořádaných dvojic bodů $\{ [x, f(x)] \mid x \in \mathcal{D}(f) \}$ zobrazených v rovině $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s kartézskou soustavou souřadnic se nazývá **graf funkce** f . (Pod pojmem *kartézská soustava souřadnic* rozumíme soustavu souřadnic v rovině $\mathbb{R}^2$ s osami souřadnic na sebe kolmými a se stejnými jednotkami na obou osách.) Pravidlo, pomocí něhož každému $x \in \mathcal{D}(f)$ přiřazujeme $y \in \mathcal{H}(f)$ se nazývá **funkční předpis** funkce f . Pro dané číslo $x \in \mathcal{D}(f)$ se číslo $f(x)$ nazývá **funkční hodnota** funkce f v bodě x .

Vytvoření nové funkce pomocí algebraických operací

Definice.

Nechť f, g jsou dvě funkce takové, že $D = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) \neq \emptyset$. Pak definujeme:

- ① *součet funkcí*: $(f + g) : y = f(x) + g(x), \quad x \in D;$
- ② *rozdíl funkcí*: $(f - g) : y = f(x) - g(x), \quad x \in D;$
- ③ *součin funkcí*: $(f g) : y = f(x) g(x), \quad x \in D;$
speciálně: $(c f) : y = c f(x), \quad x \in \mathcal{D}(f) \quad (c \in \mathbb{R} \text{ konstanta});$
- ④ *podíl funkcí*: $(f/g) : y = f(x)/g(x), \quad x \in D \cap \{x; g(x) \neq 0\}.$

Příklad.

- ① Funkce $f : y = x^2$ je součinem $f = Id \, Id$.
- ② Funkce $f : y = \frac{3 + x}{x^2 - 1}$ je $f = \frac{\mathcal{K}_3 + Id}{Id \, Id - \mathcal{K}_1}.$

Definice.

Pro dvě funkce f, g definujeme *složenou funkci* ($g \circ f$), nebo přesněji *funkci f složenou s funkcí g* , takto:

$$(g \circ f) : y = g(f(x)), \quad x \in \mathcal{D}(g \circ f) = \{x \in \mathcal{D}(f); f(x) \in \mathcal{D}(g)\}.$$

Příklad.

Dány funkce $f : y = x^2 - 4$, $g : y = \sqrt{x}$.

Pak $\mathcal{D}(f) = (-\infty, \infty)$, $\mathcal{D}(g) = \langle 0, \infty)$ a

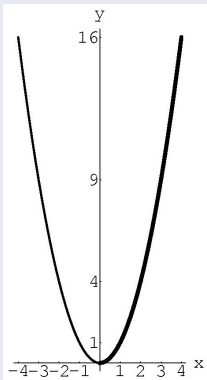
1

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \quad \mathcal{D}(g \circ f) = (-\infty, -2) \cup \langle 2, \infty),$$

2

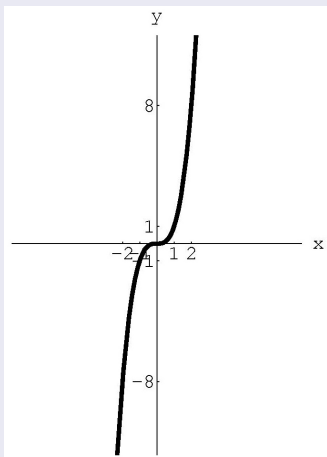
$$(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 - 4 = x - 4, \quad \mathcal{D}(f \circ g) = \langle 0, \infty).$$

$$\mathfrak{M}_2 : y = x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \langle 0, \infty)$$



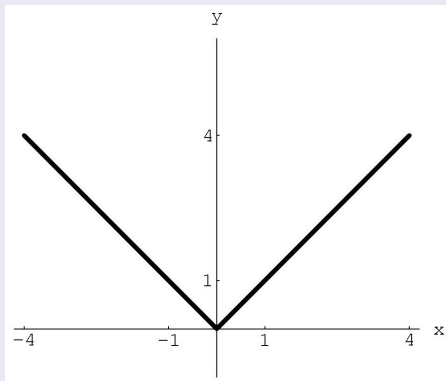
Funkce kubická

$$\mathfrak{M}_3 : y = x^3, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}$$



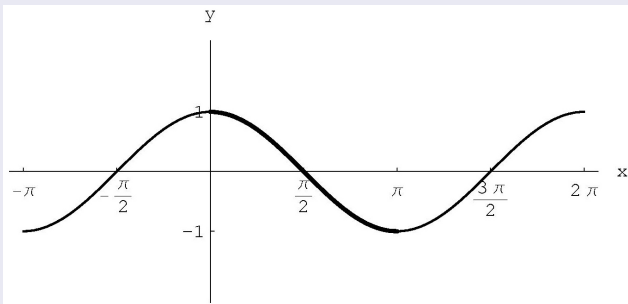
Funkce absolutní hodnota

$$\text{Abs} : y = |x| := \sqrt{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \langle 0, \infty \rangle$$



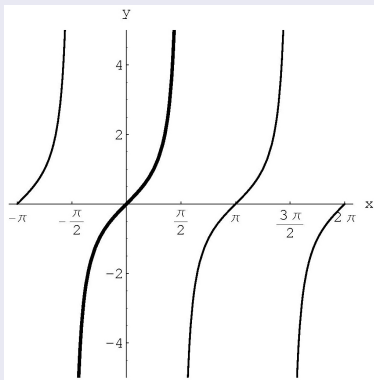
Funkce kosinus

$$\cos : y = \cos x := \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \langle -1, 1 \rangle$$



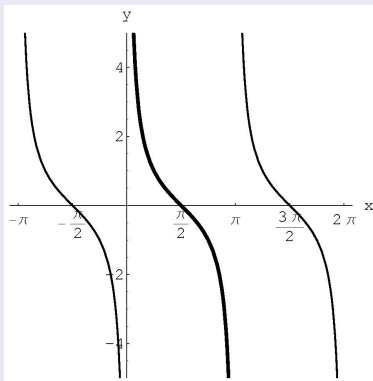
Funkce tangens

$$\operatorname{tg} : y = \operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad y \in \mathbb{R}$$



Funkce kotangens

$$\cotg : y = \cotg x := \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad y \in \mathbb{R}$$



Definice. (Inverzní funkce)

Nechť f je **prostá funkce** na svém definičním oboru $\mathcal{D}(f)$

(tj. pro všechny $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ platí

$$\text{je-li } x_1 \neq x_2 \text{ pak } f(x_1) \neq f(x_2))$$

s oborem hodnot $\mathcal{H}(f)$.

Pak ke každému $y \in \mathcal{H}(f)$ **existuje právě jedno** $x \in \mathcal{D}(f)$, že $f(x) = y$.

Funkci $f^{-1} : y \mapsto x, \quad y \in \mathcal{H}(f),$ nazýváme **inverzní funkcí k funkci f** .

Poznámka.

- ① Je-li f elementární funkce a $\mathcal{I}$ interval, potom množina

$$f(\mathcal{I}) := \{y = f(x) \mid x \in \mathcal{I}\}$$

je také interval.

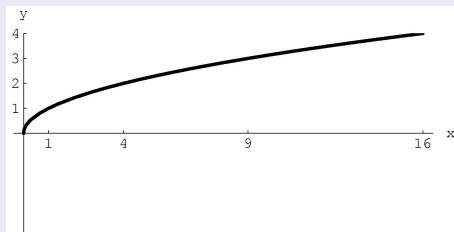
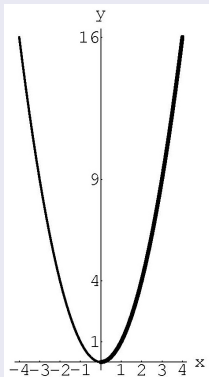
- ② Je-li navíc f **prostá** na $\mathcal{I}$, potom oba intervaly jsou stejného typu a krajní body intervalu $\mathcal{I}$ se zobrazí na krajní body intervalu $f(\mathcal{I})$.

- ③ Platí:

$$\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f), \quad \mathcal{H}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f), \quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

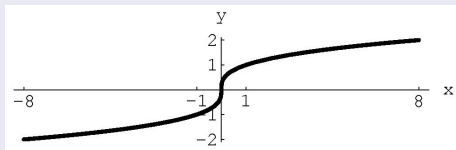
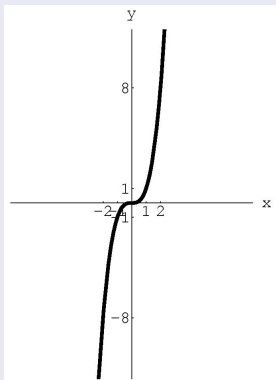
Druhá (sudá) mocnina a odmocnina

$$\text{Pro } x \in \langle 0, \infty), y \in \langle 0, \infty): \quad y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$$



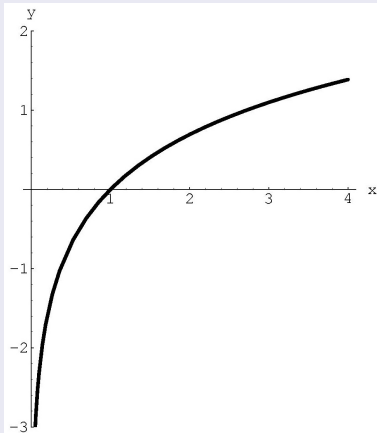
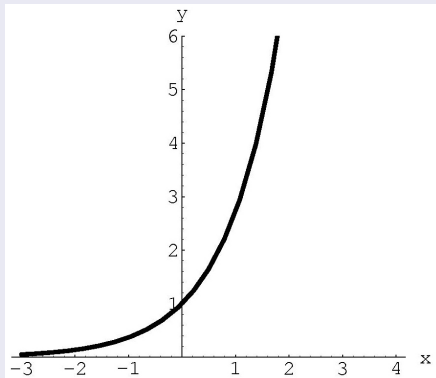
Třetí (lichá) mocnina a odmocnina

$$\text{Pro } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}: \quad y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$$



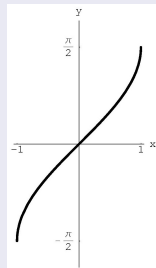
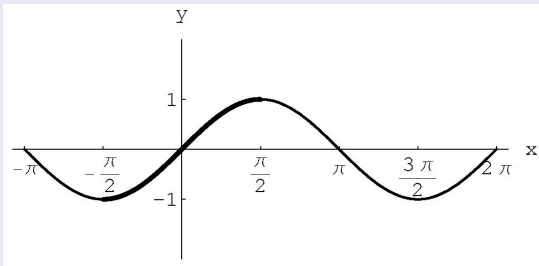
Exponenciála a logaritmus

$$\text{Pro } x \in \mathbb{R}, y \in (0, \infty): \quad y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y$$



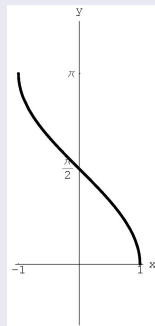
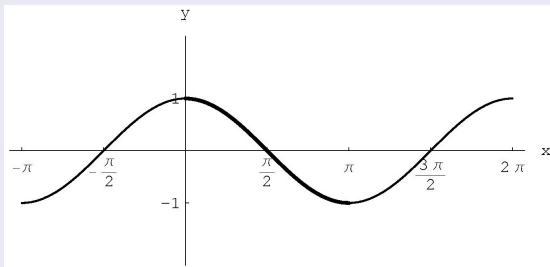
Funkce sinus a arkussinus

Pro $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, $y \in \langle -1, 1 \rangle$: $y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$



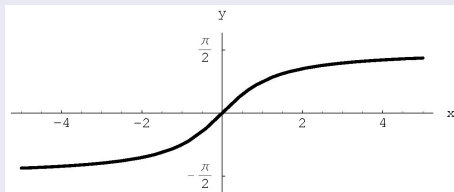
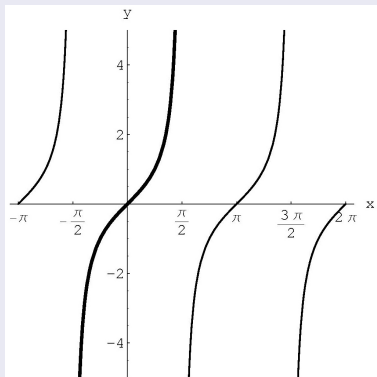
Funkce kosinus a arkuskosinus

Pro $x \in \langle 0, \pi \rangle$, $y \in \langle -1, 1 \rangle$: $y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y$



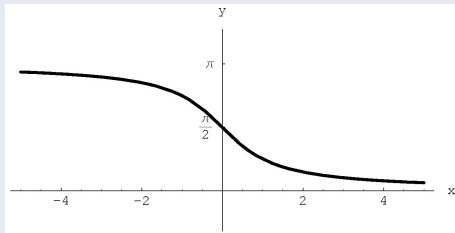
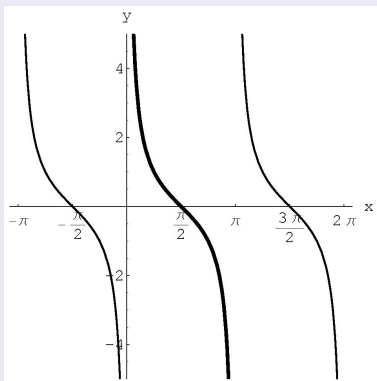
Funkce tangens a arkustangens

$$\text{Pro } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), y \in \mathbb{R}: \quad y = \operatorname{tg} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{arctg} y$$



Funkce kotangens a arkuskotangens

Pro $x \in (0, \pi)$, $y \in \mathbb{R}$: $y = \cotg x \Leftrightarrow x = \operatorname{arccotg} y$



Definice.

- 1 **Základní elementární funkce:** konstantní, identita, odmocnina řádu $n \in \mathbb{N}$, exponenciála, logaritmus, sinus, arkussinus, tangens, arkustangens.
- 2 **Elementární funkce** jsou všechny funkce, které jsou vytvořeny ze základních elementárních funkcí pomocí algebraických operací a operace skládání.

Rovnost dvou funkcí

Definice.

Rovnost dvou funkcí f a g znamená rovnost jejich grafů, tj. $f \equiv g$ (čteme: *funkce f je rovna funkci g*), právě když $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g) = D$ a pro všechny body $x \in D$ je $f(x) = g(x)$.

Příklad.

- 1 Funkce f a g jsou dány funkčními předpisy $f : y = \frac{x^2+2x}{x}$, $g : y = x + 2$. Pak $f \neq g$, protože $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \neq (-\infty, \infty) = \mathcal{D}(g)$, přestože pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$, tj. každé $x \neq 0$, platí $f(x) = \frac{x^2+2x}{x} = \frac{x(x+2)}{x} = x + 2 = g(x)$.
- 2 Pro funkce $f : y = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x}$, $g : y = \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}}$ je $f \equiv g$, vzhledem k tomu, že $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g) = \langle 0, \infty \rangle$ (ověřte!) a pro každé $x \in \langle 0, \infty \rangle$ platí $f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x} = (\sqrt{2x+1} - \sqrt{x}) \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}} = \frac{(2x+1)-x}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}} = \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}} = g(x)$.