

Matematika 2

pro PEF PaE

9. Aritmetické vektorové prostory

Přemysl Jedlička

Katedra matematiky, TF ČZU

Aritmetické vektorové prostory

Definice

Aritmetickým vektorovým prostorem V_n myslíme množinu \mathbf{R}^n s operacemi

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

$$r \cdot (a_1, \dots, a_n) = (ra_1, \dots, ra_n)$$

Kanonická báze prostoru V_n je množina $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, kde $\vec{e}_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, 0, \dots, 0)$.

Fakt

Kanonická báze je bází prostoru V_n . Prostor V_n má dimenzi n .

Elementární úpravy

Definice

Skupina vektorů $[[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k]]$ vektorového prostoru V je uspořádaná množina ne nutně různých vektorů.

Definice

Bud' M skupina vektorů. *Elementární úprava* je nahrazení skupiny M jinou skupinou podle jednoho z následujících pravidel:

- 1 Lze zaměnit pořadí vektorů ve skupině.
- 2 Libovolný vektor lze vynásobit nějakým nenulovým číslem.
- 3 K libovolnému vektoru lze přičíst jakýkoli násobek jiného vektoru.
- 4 Lze vynechat nulový vektor.
- 5 Jsou-li ve skupině dva stejné vektory, lze **jeden** z nich vynechat.

Elementární úpravy zachovávají podprostor

Tvrzení

Vektorový podprostor generovaný skupinou vektorů se po elementární úpravě nemění.

Důkaz.

Nechť se skupina M změní elementární úpravou na skupinu N .

Pokud se jedná o pravidlo 4 nebo 5, evidentně $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(N)$.

V ostatních případech je vidět $\mathcal{L}(N) \subseteq \mathcal{L}(M)$. Elementární úpravou lze přejít zpět z N k M , takže dle stejné úvahy platí $\mathcal{L}(M) \subseteq \mathcal{L}(N)$. Takže $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(N)$. □

Matice

Definice

Matice rozměru $m \times n$ je soubor $m \cdot n$ čísel, zapsaných do obdélníku o m řádcích a n sloupcích. Množinu všech matic $m \times n$ značíme $M_{m,n}$

Úmluva

Skupinu m vektorů prostoru V_n zapisujeme po řádcích do matice rozměru $m \times n$. Skupinu $\{(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{m1}, \dots, a_{mn})\}$ zapíšeme jako

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Elementárním úpravám odpovídají úpravy na řádcích matice.

Matice v Gaussově tvaru

Definice

Řekneme, že je matice v *Gaussově tvaru*, jestliže

- žádný její řádek není nulový;
- v každém řádku je první nenulové číslo posledním nenulovým číslem svého sloupce.

Fakt

Vektory odpovídající řádkům matice v Gaussově tvaru jsou lineárně nezávislé.



1777–1855

Carl Friedrich Gauß

Gaussova eliminace

Algoritmus

V k -tém kroku Gaussovy eliminace už nepracujeme s prvními $k - 1$ řádky. S ostatními řádky provádíme postupně následující kroky

- ① Nalezneme první sloupec, který obsahuje v nějakém řádku nenulové číslo. Označme tento sloupec j .
- ② Zajistíme jedničku na pozici k, j . Například postupem
 - Prohodíme řádky tak, aby na pozici k, j bylo nenulové číslo.
 - Vydělíme celý k -tý řádek hodnotou na pozici k, j .
- ③ Vynulujeme celý j -tý sloupec pod řádkem k , a to tak, že vždy od i -tého řádku odečteme k -tý řádek vynásobený hodnotou na pozici i, j .

Na konci algoritmu vyškrtneme případné nulové řádky.

Hledání báze podprostoru

Úloha

Nalezněte bázi a dimenzi podprostoru generovaného vektory $(-3, 0, 1, 2)$, $(0, -1, 3, -2)$, $(2, -4, 1, 1)$ a $(1, 3, -2, -2)$.

Řešení: Úlohu přepíšeme do matice

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \cdot (-2) \\ R_4 \cdot 3}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 9 & -5 & -4 \\ 0 & -10 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 9 & -5 & -4 \\ 0 & -10 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \cdot (-9) \\ R_3 \cdot 10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 22 & -22 \\ 0 & 0 & -25 & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 : 22 \\ R_4 \cdot (-25)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Báze prostoru je $\{(1, 3, -2, -2), (0, 1, -3, 2), (0, 0, 1, -1)\}$.

Dimenze prostoru je 3.

Určování lineární nezávislosti

Úloha

Zjistěte, zda jsou vektory $(-2, 3, -1, 1)$, $(3, -2, 4, 0)$, $(2, 5, 2, 2)$ a $(-4, -1, 1, 13)$ lineárně závislé či nezávislé.

Řešení: Úlohu přepíšeme do matice

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ -4 & -1 & 1 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \cdot (-1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ -4 & -1 & 1 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \cdot (-3) \\ R_3 \cdot (-2) \\ R_4 \cdot 4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 13 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \cdot (-1/5) \\ R_4 \cdot (-1) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3/5 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -13 & -3 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_1 \cdot (-3) \\ R_3 \cdot (-1) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -13 & -3 \\ 0 & 0 & 35 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_3 \cdot (-35) \\ R_2 \cdot 17 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -13 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -26 \end{pmatrix}$$

Vektory jsou lineárně nezávislé.

Hodnost matice

Definice

Hodnost matice \mathbf{A} , značená $h(\mathbf{A})$, je dimenze prostoru generovaného řádky matice \mathbf{A} .

Úloha

Určete hodnost matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a \\ -1 & a & -4 \end{pmatrix}$ v závislosti na parametru a .

Řešení: Provedeme Gaussovu eliminaci

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a \\ -1 & a & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & a-4 \\ 0 & a-1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & a-4 \\ 0 & 0 & -2 - (a-4) \cdot (a-1) \end{pmatrix}$$

$$-2 - (a-4) \cdot (a-1) = 0$$

$$-a^2 + 5a - 6 = 0$$

$$a_1 = 2 \quad a_2 = 3$$

Pro $a = 2$ nebo $a = 3$ je $h(\mathbf{A}) = 2$.

Pro $a \neq 2$ a $a \neq 3$ je $h(\mathbf{A}) = 3$.