

Matematika 2

pro PEF PaE

5. Nevlastní určité integrály

Přemysl Jedlička

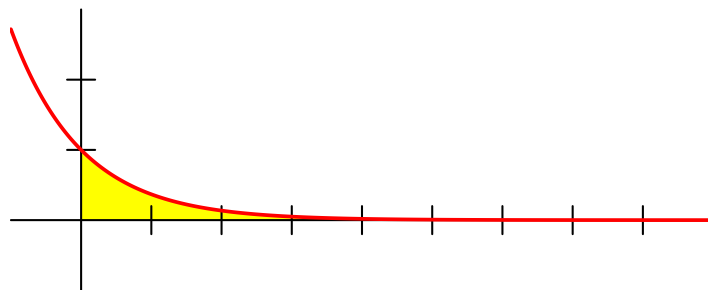
Katedra matematiky, TF ČZU

Nevlastní určité integrály

Nevlastní integrály

2 / 11

Motivace nevlastního integrálu



$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \int_0^{\vartheta} e^{-x} dx = \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^{\vartheta} = \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} [-e^{-\vartheta} - (-1)] = 1$$

Definice nevlastního integrálu

Definice

Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na všech intervalech $\langle a, \vartheta \rangle$, pro všechna $\vartheta > a$, a existuje-li vlastní $\lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \int_a^{\vartheta} f(x) \, dx$, pak definujeme

$$\int_a^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \int_a^{\vartheta} f(x) \, dx = A$$

a říkáme, že nevlastní integrál *konverguje* k A . Ve všech ostatních případech říkáme, že integrál *diverguje*.

Obdobně se definuje nevlastní integrál $\int_{-\infty}^a f(x) \, dx$.

Integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$ se definuje jako $\int_{-\infty}^a f(x) \, dx + \int_a^{\infty} f(x) \, dx$.

Nevlastní integrál u pólu

Definice

Bud' $f(x)$ funkce integrovatelná na každém intervalu $\langle a, \vartheta \rangle$, pro všechna $a < \vartheta < b$. Je-li funkce $f(x)$ neomezená na intervalu $\langle a, b \rangle$ a existuje-li vlastní $\lim_{\vartheta \rightarrow b^-} \int_a^{\vartheta} f(x) \, dx$ pak definujeme

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\vartheta \rightarrow b^-} \int_a^{\vartheta} f(x) \, dx$$

a říkáme, že je integrál *konvergentní*, v opačném případě, že je *divergentní*.

Obdobně se definuje integrál u funkce neomezené při dolní mezi.

Použití nevlastního integrálu

Úloha

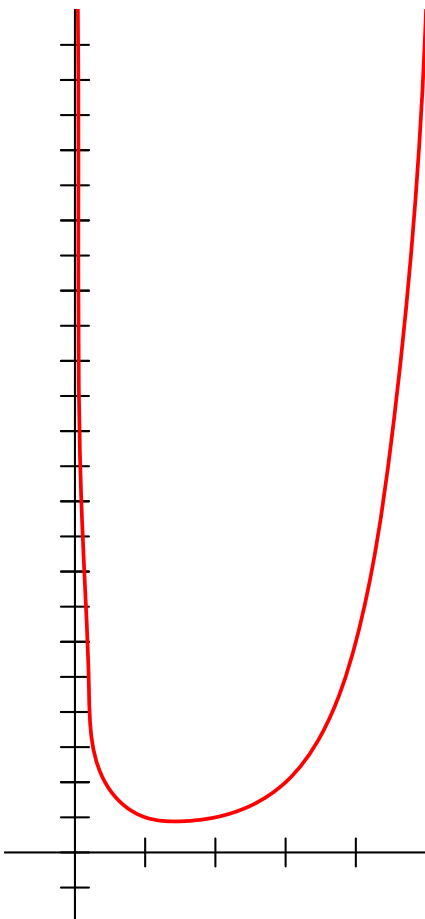
Jaký je objem tělesa, které vznikne rotací funkce $\frac{1}{\sqrt{x \cdot \ln x}}$ kolem osy x pro $x \in \langle e, \infty \rangle$.

Řešení:

$$\begin{aligned} V &= \int_e^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x \cdot \ln x}} \right)^2 dx = \int_e^\infty \frac{1}{x \cdot \ln x} dx \\ &= \left| \begin{array}{ll} t = \ln x & e \rightarrow 1 \\ dt = \frac{1}{x} dx & \infty \rightarrow \infty \end{array} \right| = \int_1^\infty \frac{1}{t} dt \\ &= \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \int_1^\vartheta \frac{dt}{t} = \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} [\ln t]_1^\vartheta = \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} (\ln \vartheta - 0) = \infty \end{aligned}$$

Těleso má nekonečný objem.

Gama funkce



Definice

Pro každé kladné číslo x definujeme

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} dt.$$



1752–1833

Adrien-Marie Legendre

Vlastnosti funkce gama

Tvrzení

- 1 $\Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x)$ pro všechna $x > 0$;
- 2 $\Gamma(n) = (n - 1)!$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$;
- 3 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Důkaz.

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x + 1) &= \int_0^\infty t^x \cdot e^{-t} dt = \left| \begin{array}{ll} u' = e^{-t} & v = t^x \\ u = -e^{-t} & v' = x \cdot t^{x-1} \end{array} \right| \\
 &= \left[-t^x \cdot e^{-t} \right]_0^\infty - \int_0^\infty x \cdot t^{x-1} \cdot (-e^{-t}) dt \\
 &= 0 - 0 + x \cdot \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} dt = x \cdot \Gamma(x)
 \end{aligned}$$

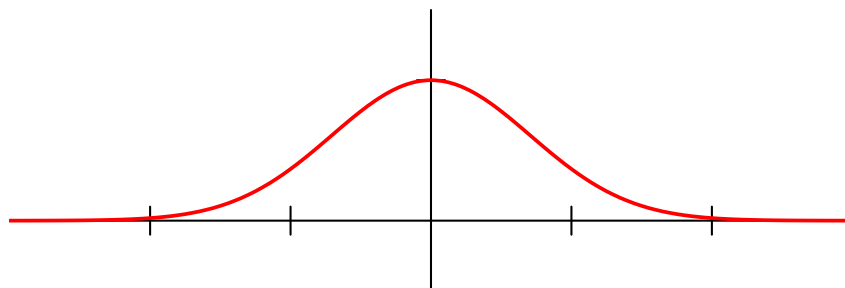
Víme, že $\Gamma(1) = 1$, takže indukcí $\Gamma(n) = (n - 1)!$.

□

Užití gama funkce při výpočtu integrálů

Úloha

Spočtěte $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$.



Řešení:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx &= 2 \cdot \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \left| \begin{array}{ll} t = x^2 & 0 \rightarrow 0 \\ dt = 2x dx & \infty \rightarrow \infty \end{array} \right| = 2 \int_0^\infty e^{-t} \cdot \frac{dt}{2x} \\
 &= \int_0^\infty e^{-t} \cdot \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} dt = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1} \cdot e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}
 \end{aligned}$$

Beta funkce

Definice

Pro každou dvojici kladných čísel x a y definujeme

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} \cdot (1-t)^{y-1} dt.$$

Tvrzení

Pro všechna x, y platí

$$B(x, y) = B(y, x) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Užití beta funkce při výpočtu integrálů

Úloha

Pomocí funkce beta spočtěte $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \left| \begin{array}{cc} t = x^2 & 0 \rightarrow 0 \\ dt = 2x dx & 1 \rightarrow 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \sqrt{1-t} \cdot \frac{dt}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1} \cdot (1-t)^{\frac{3}{2}-1} dt = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{1!} = \frac{1}{4} \cdot \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \end{aligned}$$

Má platit $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} \cdot \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$, takže $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Užití beta funkce při výpočtu integrálů

Úloha

Spočtěte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx &= \left| \begin{array}{ll} t = \cos x & 0 \rightarrow 1 \\ dt = -\sin x dx & \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \end{array} \right| = \int_1^0 \frac{(1-t^2)}{\sqrt{t}} \cdot (-dt) \\ &= \int_0^1 (1-t^2) \cdot t^{-\frac{1}{2}} dt = \left| \begin{array}{ll} s = t^2 & 0 \rightarrow 0 \\ ds = 2t dt & 1 \rightarrow 1 \end{array} \right| \\ &= \int_0^1 (1-s) \cdot s^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{ds}{2\sqrt{s}} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (1-s) \cdot s^{-\frac{3}{4}} ds \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 s^{\frac{1}{4}-1} \cdot (1-s)^{2-1} ds = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{1}{4}, 2\right) \end{aligned}$$