

Matematika 2

pro PEF PaE

11. Soustavy lineárních rovnic

Přemysl Jedlička

Katedra matematiky, TF ČZU

Soustavy lineárních rovnic

Definice

Soustava rovnic se nazývá *soustava lineárních rovnic*, pokud je tvaru

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k$$

Pokud je $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0$, je soustava *homogenní*, v opačném případě je *heterogenní*.

Vektor $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ nazveme *řešením* soustavy lineárních rovnic, pokud čísla x_1, \dots, x_n vyhovují všem rovnicím.

Prostor řešení homogenní rovnice

Mějme soustavu rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = 0$$

Označme $\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$. Rovnice se dají přepsat ve tvaru $\vec{a}_i \cdot \vec{x} = 0$.

Označme $A = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\}$. Množina všech řešení je množina všech vektorů \vec{x} kolmých na celou množinu A , neboli množina A^\perp .

Tvrzení

Množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic tvoří vektorový podprostor.

Řešení homogenních soustav lineárních rovnic

Úloha

Nalezněte všechna řešení soustavy

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$$

$$-2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$$

$$-2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0$$

Řešení: Soustavu přepíšeme do matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

Řešení homogenních soustav lineárních rovnic

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = t, \quad t \in \mathbf{R}$$

$$x_3 + 2x_4 = 0$$

$$x_3 = -2t$$

$$x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 0$$

$$x_2 + 2 \cdot (-2t) + 6t = 0$$

$$x_2 = -2t$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$$

$$x_1 - 2 \cdot (-2t) + (-2t) - 3t = 0$$

$$x_1 = t$$

Řešením jsou všechny vektory tvaru $t \cdot (1, -2, -2, 1)$, pro $t \in \mathbf{R}$.

Množina řešení nehomogenní soustavy

Věta

Mějme nehomogenní soustavu

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k$$

Označme \mathbf{A} matici koeficientů na pravé straně a \mathbf{B} matici, která vznikne tím, že k matici \mathbf{A} přidáme sloupec koeficientů na pravé straně. Potom

- Je-li $h(\mathbf{B}) > h(\mathbf{A})$, pak soustava nemá žádné řešení.
- Je-li $h(\mathbf{B}) = h(\mathbf{A})$, pak je množina všech řešení soustavy ve tvaru $\vec{x} = \vec{v} + W$, kde W je prostor řešení příslušné homogenní soustavy a \vec{v} je jakékoliv řešení nehomogenní soustavy.

Hledání řešení nehomogenní soustavy

Úloha

Najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - x_4 &= -7\end{aligned}$$

Řešení: Soustavu přepíšeme do matice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & -4 & -1 & -7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -9 \end{array} \right) \sim$$

Hledání řešení nehomogenní soustavy

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -22 & -44 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

$$x_4 = t, \quad t \in \mathbf{R}$$

$$x_3 + 2x_4 = 4$$

$$x_3 = 4 - 2t$$

$$x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -9$$

$$x_2 - 2 \cdot (4 - 2t) - 5t = -9$$

$$x_2 = t - 1$$

$$x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1$$

$$x_1 - 2 \cdot (t - 1) - (4 - 2t) + 2t = 1$$

$$x_1 = 3 - 2t$$

Řešení: $(3, -1, 4, 0) + t \cdot (-2, 1, -2, 1)$

Jordanova eliminace

Definice

Řekneme, že je matice M v *Jordanově* tvaru, pokud

- žádný řádek není nulový;
- každé číslo, které je prvním nenulovým číslem v řádku, je jediným nenulovým číslem ve svém sloupci.

Fakt

Každá soustava s jedním řešením lze upravit do tvaru

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_n \end{array} \right),$$

odkud okamžitě čteme $x_i = c_i$.

Řešení soustavy Jordanovou eliminací

Úloha

Nalezněte všechna řešení soustavy

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -8 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 7 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 & -8 \\ -2 & 1 & -3 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 & -2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -3 & -8 \\ -2 & 1 & -3 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & -3 & -2 & 3 \end{array} \right) \sim$$

Řešení soustavy Jordanovou eliminací

$$\begin{aligned} &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 9 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Parametr položíme $x_3 = t$, pro $t \in \mathbf{R}$. Řešení:

$$x_4 = 1 \quad x_3 = t \quad x_2 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}t \quad x_1 = -\frac{5}{3} - \frac{4}{3}t.$$