

Matematika 2

pro PEF PaE

2. Integrace racionálních funkcí

Přemysl Jedlička

Katedra matematiky, TF ČZU

Racionální funkce

Definice

*Racionální funkce $R(x)$ je podíl $\frac{P(x)}{Q(x)}$ dvou polynomů $P(x)$ a $Q(x)$. Pokud je stupeň $P(x)$ menší než $Q(x)$, pak se $R(x)$ nazývá *ryze racionální funkce*.*

Věta

Každá racionální funkce se dá jednoznačně vyjádřit ve tvaru $R(x) = P(x) + S(x)$, kde $P(x)$ je polynom a $S(x)$ je ryze racionální funkce.

Úloha

Vyjádřete $\frac{3x^3 + 2x^2 + 7x - 4}{x^2 + 1}$ jakožto součet polynomu a ryze racionální funkce.

Dělení polynomu polynomem

Řešení:

$$\begin{array}{r}
 (3x^3 + 2x^2 + 7x - 4) : (x^2 + 1) = 3x + 2 \\
 - (3x^3 \quad \quad + 3x) \\
 \hline
 2x^2 + 4x - 4 \\
 - (2x^2 \quad \quad + 2) \\
 \hline
 4x - 6
 \end{array}$$

$$\frac{3x^3 + 2x^2 + 7x - 4}{x^2 + 1} = 3x + 2 + \frac{4x - 6}{x^2 + 1}$$

Rozklad polynomů

Věta

Každý polynom $Q(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ lze rozložit na součin

$$Q(x) = a_n \cdot (x - \xi_1)^{r_1} \cdots (x - \xi_k)^{r_k} \cdot (x^2 + \mu_1 x + \nu_1)^{s_1} \cdots (x^2 + \mu_l x + \nu_l)^{s_l},$$

kde ξ_i jsou kořeny stupně r_i a $x^2 + \mu_i x + \nu_i$ jsou polynomy, které nemají v \mathbf{R} kořen.

Definice

Parciálními zlomky rozumíme zlomky typu $\frac{A}{(x - \xi)^r}$ nebo $\frac{Ax + B}{(x^2 + \mu x + \nu)^s}$.

Rozklad na parciální zlomky

Věta

Je-li $\frac{S(x)}{Q(x)}$ ryze racionální funkce a

$$Q(x) = a_n \cdot (x - \xi_1)^{r_1} \cdots (x - \xi_k)^{r_k} \cdot (x^2 + \mu_1 x + \nu_1)^{s_1} \cdots (x^2 + \mu_l x + \nu_l)^{s_l},$$

potom existují jednoznačně určené parciální zlomky se jmenovateli

$$(x - \xi_1), (x - \xi_1)^2, \dots, (x - \xi_1)^{r_1},$$

⋮

$$(x - \xi_k), (x - \xi_k)^2, \dots, (x - \xi_k)^{r_k},$$

$$(x^2 + \mu_1 x + \nu_1), (x^2 + \mu_1 x + \nu_1)^2, \dots, (x^2 + \mu_1 x + \nu_1)^{s_1},$$

⋮

$$(x^2 + \mu_l x + \nu_l), (x^2 + \mu_l x + \nu_l)^2, \dots, (x^2 + \mu_l x + \nu_l)^{s_l},$$

jejichž součet je roven $\frac{S(x)}{Q(x)}$.

Rozklad na parciální zlomky

Úloha

Spočtěte $\int \frac{4dx}{(x+1)^2 \cdot (x-1)}$

Řešení: Má platit

$$\frac{4}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

neboli

$$\frac{4}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{A \cdot (x^2 + 2x + 1)}{(x+1)^2 \cdot (x-1)} + \frac{B \cdot (x^2 - 1)}{(x+1)^2 \cdot (x-1)} + \frac{C \cdot (x-1)}{(x+1)^2 \cdot (x-1)}$$

takže platí

$$4 = A \cdot (x^2 + 2x + 1) + B \cdot (x^2 - 1) + C \cdot (x - 1)$$

Rozklad na parciální zlomky

Jedná se o rovnost polynomů, takže se musejí rovnat koeficienty:

$$x^2 : 0 = A + B$$

$$x^1 : 0 = 2A + C$$

$$x^0 : 4 = A - B - C$$

Tato soustava má řešení $A = 1$, $B = -1$, $C = -2$.

$$\begin{aligned} \int \frac{4dx}{(x+1)^2 \cdot (x-1)} &= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{2}{(x+1)^2} dx \\ &= \ln|x-1| - \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + C \end{aligned}$$

Integrace parciálních zlomků

Lemma

$$\int \frac{dx}{x-\xi} = \ln|x-\xi| + C \quad a \quad \int \frac{dx}{(x-\xi)^r} = -\frac{1}{(r-1) \cdot (x-\xi)^{r-1}} + C$$

pro $r > 1$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x-\xi} &= \left| \begin{array}{l} t = x - \xi \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|x-\xi| + C \\ \int \frac{dx}{(x-\xi)^r} &= \left| \begin{array}{l} t = x - \xi \\ dt = dx \end{array} \right| = \int t^{-r} dt \\ &= \frac{t^{-r+1}}{-r+1} + C = -\frac{1}{(r-1) \cdot (x-\xi)^{r-1}} + C \end{aligned}$$

□

Záporný diskriminant

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + \mu x + \nu)^s} = \frac{A}{2} \cdot \frac{2x + \mu}{x^2 + \mu x + \nu} + \frac{B - \frac{\mu \cdot A}{2}}{(x^2 + \mu x + \nu)^s}$$

První člen se zintegruje snadno

$$\int \frac{2x + \mu}{x^2 + \mu x + \nu} dx = \ln(x^2 + \mu x + \nu) + C$$

V druhém členu vyjádříme

$$\frac{1}{(x^2 + \mu x + \nu)^s} = \frac{1}{\left(x + \frac{\mu}{2}\right)^2 + \nu - \frac{\mu^2}{4}}$$

a provede se substituce $x + \frac{\mu}{2} = \sqrt{\nu - \frac{\mu^2}{4}} t$

Příklad na záporný diskriminant

Úloha

Spočtete $\int \frac{4x - 5}{x^2 - 4x + 13} dx$.

Řešení: $4x - 5 = 2 \cdot (2x - 4) + 3$. Počítáme $\int \frac{4x - 5}{x^2 - 4x + 13} dx$

$$= \int 2 \cdot \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 13} dx + \int \frac{3}{(x^2 - 4x + 4) - 4 + 13} dx$$

$$= 2 \ln(x^2 - 4x + 13) + \int \frac{3 dx}{(x - 2)^2 + 9} = \left| \begin{array}{l} (x - 2)^2 = 9t^2 \\ x - 2 = 3t \\ dx = 3dt \end{array} \right|$$

$$= 2 \ln(x^2 - 4x + 13) + \int \frac{3 \cdot 3dt}{9t^2 + 9} = 2 \ln(x^2 - 4x + 13) + \int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$= 2 \ln(x^2 - 4x + 13) + \operatorname{arctg} \frac{x - 2}{3} + C$$

Komplexní příklad

Úloha

Spočtěte $\int \frac{x^3 - 2}{x^3 + 2x^2 + 2x} dx$.

Řešení: $(x^3 - 2) : (x^3 + 2x^2 + 2x) = 1$, zb. $-2x^2 - 2x - 2$.

$$\frac{-2x^2 - 2x - 2}{x^3 + 2x^2 + 2x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2}$$

$$-2x^2 - 2x - 2 = A \cdot (x^2 + 2x + 2) + (Bx + C) \cdot x$$

$$x^2 : \quad -2 = A + B$$

$$x^1 : \quad -2 = 2A + C$$

$$x^0 : \quad -2 = 2A$$

Řešení soustavy je $A = -1$, $B = -1$, $C = 0$.

Komplexní příklad

Dostali jsme

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 2}{x^3 + 2x^2 + 2x} dx &= \int 1 dx + \int \frac{-2x^2 - 2x - 2}{x^3 + 2x^2 + 2x} dx \\ &= x + \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{-1x + 0}{x^2 + 2x + 2} dx \\ &= x - \ln|x| + \int -\frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 2 - 2}{x^2 + 2x + 2} dx \\ &= x - \ln|x| - \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx + \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} dx \\ &= x - \ln|x| - \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 2x + 2) + \left| \begin{array}{l} x + 1 = t \\ dx = dt \end{array} \right| \\ &= x - \ln|x| - \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 2x + 2) + \int \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= x - \frac{1}{2} \ln(x^4 + 2x^3 + 2x^2) + \operatorname{arctg}(x + 1) + C \end{aligned}$$

Integrace racionálních goniometrických funkcí

Jak spočítat

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx, \quad n, m \in \mathbf{Z}$$

- 1 Je-li n liché, lze použít substituce $t = \cos x$ a vzorec $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.
- 2 Je-li m liché, lze použít substituce $t = \sin x$ a vzorec $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.
- 3 Jsou-li obě čísla sudá, použijeme $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
a $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

Integrace racionálních goniometrických funkcí

Úloha

Spočtěte $\int \frac{1}{\cos x} \, dx$.

Řešení: Jedná se vlastně o $\int \sin^0 x \cdot \cos^{-1} x \, dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} \, dx \\ &= \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{1 - t^2} = \int \frac{\frac{1}{2}}{1 + t} \, dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{1 - t} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |1 + t| - \frac{1}{2} \ln |1 - t| + C = \ln \sqrt{\left| \frac{1 + t}{1 - t} \right|} + C \\ &= \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} + C = \ln \sqrt{\frac{(1 + \sin x)^2}{1 - \sin^2 x}} + C = \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + C \end{aligned}$$

Univerzální substituce

Při počítání s goniometrickými funkcemi lze vždy použít substituce

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

při této substituci klademe

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2},$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1-t^2}{2t} \quad \text{a} \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$