

# Matematika 2

## pro PEF PaE

### 13. Determinanty

Přemysl Jedlička

Katedra matematiky, TF ČZU

## Permutace

### Definice

*Permutací* množiny  $\{1, \dots, n\}$  rozumíme prosté zobrazení z této množiny na tuto množinu. Permutaci vyjadřujeme zápisem

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Množina všech permutací množiny  $\{1, \dots, n\}$  se značí  $S_n$ .

### Definice

Bud'  $\pi \in S_n$ . *Inverze* v permutaci  $\pi$  je dvojice čísel  $i < j$  taková, že  $\pi(i) > \pi(j)$ . Permutace  $\pi$  se nazývá *sudá*, je-li počet jejích inverzí sudý, a nazývá se *lichá*, je-li počet inverzí lichý. Znaménko permutace je číslo  $(-1)^{\text{počet inverzí}}$ . Značí se  $\text{sgn } \pi$ .

# Definice determinantu

## Definice

*Determinantem* čtvercové matice  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  rozumíme reálné číslo

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$

Determinant se značí

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$



Gerolamo Cardano  
1501–1576



1642–1708  
Seki Kōwa

# Determinanty malých matic

## Příklad

Mějme matici  $(a_{11})$ . V množině  $S_1$  je jediná permutace  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$\det (a_{11}) = a_{11}.$$

## Příklad

Mějme matici  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ . Permutace v  $S_2$  jsou  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  a  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

# Sarrusovo pravidlo

## Příklad

Mějme matici  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ . Permutace v  $S_3$  jsou  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  a  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

1798–1861

Pierre Frédéric Sarrus

# Výpočet determinantu Sarrusovým pravidlem

## Úloha

Spočtěte determinant matice  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ .

## Řešení:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{aligned} & 1 \cdot 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 6 \cdot 4 + 3 \cdot (-3) \cdot (-1) \\ & - [3 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 6 \cdot (-1) + 5 \cdot (-3) \cdot (-2)] \\ & = -4 + 120 + 9 - [24 - 6 + 30] = 125 - 48 = 77 \end{aligned}$$

# Elementární úpravy a determinanty

## Věta

Bud'te  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  dvě čtvercové matice

- ① Dostaneme-li matici  $\mathbf{B}$  z matice  $\mathbf{A}$  prohozením dvou řádků, pak  $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$ .
- ② Dostaneme-li matici  $\mathbf{B}$  z matice  $\mathbf{A}$  vynásobením jednoho řádku číslem  $r \in \mathbf{R}$ , pak  $\det \mathbf{B} = r \cdot \det \mathbf{A}$ .
- ③ Dostaneme-li matici  $\mathbf{B}$  z matice  $\mathbf{A}$  tím, že přičteme násobek jednoho řádku k jinému řádku, pak  $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$ .

## Věta

Mějme čtvercovou matici  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  stupně  $n$ . Platí-li  $a_{ij} = 0$ , kdykoliv  $i > j$ , pak  $\det \mathbf{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$ .

# Výpočet determinantu Gaussovou eliminací

## Důsledek

Čtvercová matice  $\mathbf{A}$  je regulární právě tehdy, když  $\det \mathbf{A} \neq 0$ .

## Úloha

Spočtěte determinant matice  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ .

## Řešení:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 17 & -21 \\ 0 & 15 & -14 \end{vmatrix} = 17 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{21}{17} \\ 0 & 15 & -14 \end{vmatrix} \\ &= 17 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{21}{17} \\ 0 & 0 & \frac{77}{17} \end{vmatrix} = 17 \cdot \left( 1 \cdot 1 \cdot \frac{77}{17} \right) = 77 \end{aligned}$$

## Transponovaná matice

### Definice

Bud'  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  matice rozměru  $m \times n$ . Matice  $\mathbf{A}^T = (a_{ji})$  je matice rozměru  $n \times m$  a nazývá se matice *transponovaná* k matici  $\mathbf{A}$ .

### Tvrzení

*Bud'  $\mathbf{A}$  čtvercová matice. Pak  $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$ .*

### Důsledek

*Jakékoliv pravidlo pro výpočet determinantu, vyslovené vzhledem k řádkům matice, platí i vzhledem ke sloupcům matice.*

## Rozvoj determinantu podle řádku

### Definice

Bud'  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  čtvercová matice stupně  $n$ . *Algebraickým doplňkem* prvku  $a_{ij}$ , pro nějaká  $i, j \leq n$ , je číslo

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det \mathbf{M}_{ij},$$

kde  $\mathbf{M}_{ij}$  je matice stupně  $(n - 1)$ , kterou dostaneme z matice  $\mathbf{A}$  odstraněním  $i$ -tého řádku a  $j$ -tého sloupce.

### Věta

*Nechť je  $\mathbf{A}$  čtvercová matice stupně  $n$  a  $i < n$ . Pak*

$$\det \mathbf{A} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in}.$$

## Výpočet determinantů vyššího stupně

### Úloha

Spočtěte determinant matice  $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

### Řešení:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ + 0 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

## Výpočet determinantů vyššího stupně

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -7 & -11 \\ 0 & -18 & -17 \end{vmatrix} \\ = -1 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -7 & -11 \\ -18 & -17 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -7 & -11 \\ -18 & -17 \end{vmatrix} \\ = -[(-7) \cdot (-17) - (-11) \cdot (-18)] = -[119 - 198] = 79$$

# Adjungovaná matice

## Věta

Nechť je  $\mathbf{A}$  čtvercová matice. Pak

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot (A_{ij})^T.$$

## Fakt

Mějme matici  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Matice  $\mathbf{A}^{-1}$  se spočte

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

# Hledání inverzní matice

## Úloha

Najděte inverzní matici k matici  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Řešení:**  $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-3 - 3) = 42$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 7 & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -7 & A_{13} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 & A_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 12 & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 11 & A_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{42} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -7 & 7 \\ 6 & 12 & 0 \\ -5 & 11 & 7 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{42} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 6 & -5 \\ -7 & 12 & 11 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

# Cramerovo pravidlo

## Věta (Cramer)

Mějme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

která má jediné řešení  $(x_1, \dots, x_n)$ . Pak pro každé  $i$  mezi 1 a  $n$  platí

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}},$$

kde  $\mathbf{A}$  je matice  $(a_{ij})$  a matice  $\mathbf{A}_i$  vznikne z matice  $\mathbf{A}$  tím, že  $i$ -tý sloupec nahradíme sloupcem pravých stran.

## Důkaz Cramerova pravidla



Gabriel Cramer  
1704–1752

### Důkaz.

Soustavu můžeme přepsat ve tvaru  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ . Pak

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (A_{ij})^T \mathbf{B}.$$

Takže pro  $x_i$  platí

$$x_i = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n) = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}. \quad \square$$



## Použití Cramerova pravidla

### Úloha

Pomocí Cramerova pravidla nalezněte řešení soustavy

$$\begin{aligned}x + 2y - 4z &= 5 \\ -3x + y + 2z &= -3 \\ 2x - 3y + z &= 1\end{aligned}$$

### Řešení:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & -7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -10 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} = (63 - 70) = -7$$

$$\det \mathbf{A}_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 17 & -9 \\ 0 & -8 & 5 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & -9 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} = (85 - 72) = 13$$

## Použití Cramerova pravidla

$$\det \mathbf{A}_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 12 & -10 \\ 0 & -9 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -10 \\ -9 & 9 \end{vmatrix} = 9 \cdot (12 - 10) = 18$$

$$\det \mathbf{A}_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 7 & 12 \\ 0 & -7 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 12 \\ -7 & -9 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-9 + 12) = 21$$

$$x = \frac{\det \mathbf{A}_x}{\det \mathbf{A}} = -\frac{13}{7} \quad y = \frac{\det \mathbf{A}_y}{\det \mathbf{A}} = -\frac{18}{7} \quad z = \frac{\det \mathbf{A}_z}{\det \mathbf{A}} = -3$$