

Matematika 2

pro PEF PaE

1. Neurčitý integrál

Přemysl Jedlička

Katedra matematiky, TF ČZU

Neurčitý integrál

Přímá integrace

2 / 19

Primitivní funkce

Definice

Řekneme, že funkce F je *primitivní funkcí* k funkci f na intervalu I , pokud pro všechna $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Tvrzení

Je-li funkce F primitivní funkcí k funkci f na intervalu I , pak je funkce $F + k$, pro libovolné $k \in \mathbf{R}$, také primitivní funkcí k funkci f .

Věta

Je-li funkce f na intervalu I spojitá, pak primitivní funkce k funkci f na I existuje.

Neurčitý integrál

Úmluva

Množinu všech primitivních funkcí k funkci f značíme

$$\int f(x) \, dx.$$

To, že je funkce F primitivní funkcí k funkci f , značíme

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C.$$

Základní integrační vzorce

$$\int 0 \, dx = C$$

$$\int dx = \int 1 \, dx = x + C$$

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \text{ pro } \alpha \neq -1 \quad \int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C$$

Platí $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, stejně jako $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. První funkce má za definiční obor $(0, \infty)$, druhá $(-\infty, 0)$. Takže lze říct, že funkce $\ln|x|$ má za derivaci $\frac{1}{x}$ na množině $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Integrace součtu a rozdílu

Věta

Nechť jsou f a g dvě funkce a $k \in \mathbf{R}$. Pak platí

- $\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$
- $\int (f(x) - g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx$
- $\int k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int f(x) \, dx$

Důkaz.

Nechť je $\int f(x) \, dx = F(x) + C$ a $\int g(x) \, dx = G(x) + C$. Pak

$$(F(x) + G(x))' = (F(x))' + (G(x))' = f(x) + g(x).$$

Obdobně pro rozdíl a násobek konstantou. □

Přímá integrace

Úloha

Spočtěte $\int \frac{3x^2 - 7x + 2}{x} \, dx$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - 7x + 2}{x} \, dx &= \int \left(\frac{3x^2}{x} - \frac{7x}{x} + \frac{2}{x} \right) \, dx = \int \left(3x - 7 + \frac{2}{x} \right) \, dx \\ &= \int 3x \, dx - \int 7 \, dx + \int \frac{2}{x} \, dx \\ &= 3 \cdot \int x \, dx - 7 \cdot \int dx + 2 \cdot \int \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{3}{2}x^2 - 7x + 2 \ln |x| + C \end{aligned}$$

Metoda per partes

Věta (Per partes)

Pro funkce $u(x)$ a $v(x)$ platí

$$\int u'(x) \cdot v(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) \, dx$$

Důkaz.

Úpravami vzorce pro derivaci součinu dostaneme

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v \, dx = \int [(u \cdot v)' - u \cdot v'] \, dx$$

$$\int u' \cdot v \, dx = u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx$$

□

Příklad na per partes

Úloha

Spočtěte $\int x^2 \cdot e^x \, dx$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot e^x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u' = e^x & v = x^2 \\ u = e^x & v' = 2x \end{array} \right| = e^x \cdot x^2 - \int e^x \cdot 2x \, dx \\ &= x^2 \cdot e^x - \left| \begin{array}{ll} u' = e^x & v = 2x \\ u = e^x & v' = 2 \end{array} \right| \\ &= x^2 \cdot e^x - \left(e^x \cdot 2x - \int e^x \cdot 2 \, dx \right) \\ &= x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2 \cdot e^x + C = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x + C \end{aligned}$$

Integrace logaritmu

Úloha

Spočtěte $\int \ln(x - 3) \, dx$.

Řešení:

$$\begin{aligned}\int \ln(x - 3) \, dx &= \int 1 \cdot \ln(x - 3) \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & v = \ln(x - 3) \\ u = x - 3 & v' = \frac{1}{x-3} \end{array} \right| \\ &= (x - 3) \cdot \ln(x - 3) - \int (x - 3) \cdot \frac{1}{x - 3} \, dx \\ &= (x - 3) \cdot \ln(x - 3) - \int dx \\ &= (x - 3) \cdot \ln(x - 3) - x + C\end{aligned}$$

Rovnice v per partes

Úloha

Spočtěte $\int \sin^2 x \, dx$.

Řešení:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \int \sin x \cdot \sin x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = \sin x & v = \sin x \\ u = -\cos x & v' = \cos x \end{array} \right| \\ &= -\cos x \cdot \sin x - \int (-\cos x) \cdot \cos x \, dx \\ &= -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x \, dx \\ &= -\cos x \cdot \sin x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= -\cos x \cdot \sin x + \int dx - \int \sin^2 x \, dx\end{aligned}$$

Rovnice v per partes

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2 x \, dx &= -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx && | + \int \sin^2 x \, dx \\
 2 \cdot \int \sin^2 x \, dx &= -\cos x \cdot \sin x + x && | : 2 \\
 \int \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2} (-\cos x \cdot \sin x + x) + C
 \end{aligned}$$

Substituce

Tvrzení

Bud' $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu I a bud' $g(x)$ funkce spojitá na intervalu J s vlastností $g(J) \subset I$. Pak je $F(g(x))$ primitivní funkce k funkci $f(g(x)) \cdot g'(x)$ na intervalu J .

$$\begin{aligned}
 \int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx &= \left| \begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = dg(x) \\ dt = g'(x)dx \end{array} \right| \\
 &= \int f(t) \cdot dt = F(t) + C = F(g(x)) + C
 \end{aligned}$$

Příklady na substituci

Úloha

Spočtěte $\int x^2 \cdot e^{-x^3} dx$ a $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Řešení:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot e^{-x^3} dx &= \left| \begin{array}{l} t = -x^3 \\ dt = -3x^2 dx \\ dx = \frac{dt}{-3x^2} \end{array} \right| = \int x^2 \cdot e^t \cdot \frac{dt}{-3x^2} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \int e^t dt = -\frac{1}{3} e^t + C = -\frac{1}{3} e^{-x^3} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \arcsin x \\ dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dx = \sqrt{1-x^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2} dt \\ &= \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2} \arcsin^2 x + C \end{aligned}$$

Substituce za odmocninu

Úloha

Spočtěte $\int x \cdot \sqrt{4-x^2} dx$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sqrt{4-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} t = 4-x^2 \\ dt = -2x dx \\ dx = \frac{dt}{-2x} \end{array} \right| = \int x \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{dt}{-2x} = -\frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3} \cdot (4-x^2)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sqrt{4-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{4-x^2} \\ t^2 = 4-x^2 \\ 2t dt = -2x dx \\ dx = \frac{2t dt}{-2x} \end{array} \right| = \int x \cdot t \cdot \frac{2t dt}{-2x} = - \int t^2 dt \\ &= -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{3} \left(\sqrt{4-x^2} \right)^3 + C \end{aligned}$$

Substituce za jmenovatele

Pozorování

U zlomku typu $\frac{f'(x)}{f(x)}$ volíme substituci $t = f(x)$.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left| \begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x) dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |f(x)| + C$$

Úloha

Spočtěte $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$.

Řešení:

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 + 1 \\ dt = 2x dx \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array} \right| = \int \frac{x}{t} \cdot \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} + C$$

Cyklotomické funkce

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} &= \int \frac{dx}{a^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} x^2\right)} = \left| \begin{array}{l} t^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 \\ t = \frac{b}{a} x \\ dt = \frac{b}{a} dx \end{array} \right| = \int \frac{\frac{a}{b} \cdot dt}{a^2 (1 + t^2)} \\ &= \int \frac{dt}{ab(1 + t^2)} = \frac{1}{ab} \cdot \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{ab} \cdot \operatorname{arctg} \frac{b}{a} x + C \\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2} x^2\right)}} = \left| \begin{array}{l} t^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 \\ t = \frac{b}{a} x \\ dt = \frac{b}{a} dx \end{array} \right| = \int \frac{\frac{a}{b} \cdot dt}{a \cdot \sqrt{1 - t^2}} \\ &= \int \frac{dt}{b \cdot \sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{b} \cdot \arcsin t + C = \frac{1}{b} \cdot \arcsin \frac{b}{a} x + C \end{aligned}$$

V obou případech lze rovnou použít substituci $at = bx$.

Příklad na integraci

Úloha

Spočtěte $\int \arccos 3x \, dx$.

Řešení: $\int \arccos 3x \, dx$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & v = \arccos 3x \\ u = x & v' = \frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}} \end{array} \right| = x \cdot \arccos 3x - \int x \cdot \frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}} \, dx \\
 &= x \cdot \arccos 3x - \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{1-9x^2} \\ t^2 = 1-9x^2 \\ 2t \, dt = -9 \cdot 2x \, dx \\ dx = -\frac{t \, dt}{9x} \end{array} \right| = x \cdot \arccos 3x - \int x \cdot \frac{-3}{t} \cdot \left(-\frac{t \, dt}{9x} \right) \\
 &= x \cdot \arccos 3x - \frac{1}{3} \int dt = x \cdot \arccos 3x - \frac{1}{3} \sqrt{1-9x^2} + C
 \end{aligned}$$

Příklad na integraci

Úloha

Spočtěte $\int x \cdot (\cos x + e^{-x^2}) \, dx$.

Řešení: Úlohu rozdělíme na dva integrály

$$\int x \cdot (\cos x + e^{-x^2}) \, dx = \underbrace{\int x \cdot \cos x \, dx}_{\mathfrak{I}_1} + \underbrace{\int x \cdot e^{-x^2} \, dx}_{\mathfrak{I}_2}$$

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{I}_1 &= \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x & v = x \\ u = \sin x & v' = 1 \end{array} \right| = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx \\
 &= x \cdot \sin x + \cos x + C
 \end{aligned}$$

Příklad na integraci

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_2 &= \left| \begin{array}{l} t = -x^2 \\ dt = -2x dx \\ dx = \frac{dt}{-2x} \end{array} \right| = \int x \cdot e^t \cdot \frac{dt}{-2x} = -\frac{1}{2} \int e^t dt \\ &= -\frac{1}{2} e^t + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C\end{aligned}$$

$$\int x \cdot (\cos x + e^{-x^2}) dx = x \cdot \sin x + \cos x - \frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$