

## Matematika 2

pro PEF PaE

### 6. Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

Přemysl Jedlička

Katedra matematiky, TF ČZU

## Obyčejné diferenciální rovnice

Obyčejná diferenciální rovnice:  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ .

Obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu:  $F(x, y, y') = 0$ .

### Úloha

Jak vypadá populační graf populace, ve které má jedinec v průměru  $(P + 1)$  potomků?

**Řešení:** Pokud má stará generace  $y$  jedinců, pak nová má  $(P + 1) \cdot y$  jedinců. Přírůstek je tedy  $(P + 1) \cdot y - y = P \cdot y$ .

$$y' = P \cdot y$$

funkce  $y = 0$  je speciální řešení D.R.

$$\frac{dy}{dx} = P \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = P \cdot dx$$

pokud  $y \neq 0$

# Obyčejné diferenciální rovnice

$$\int \frac{dy}{y} = \int P \, dx$$

$$\ln |y| = P \cdot x + C, \quad C \in \mathbf{R}$$

$$|y| = e^{Px} \cdot e^C$$

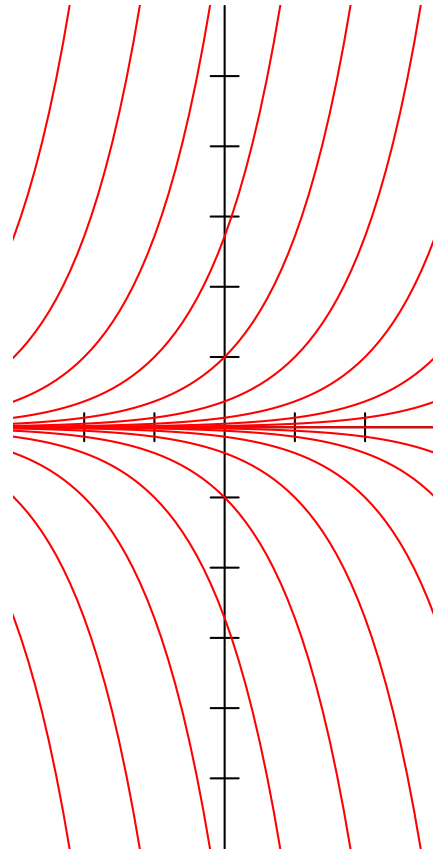
$$y > 0 \Rightarrow y = e^C \cdot e^{Px}$$

$$y < 0 \Rightarrow y = -e^C \cdot e^{Px}$$

$$y = 0 \Rightarrow y = 0 \cdot e^{Px}$$

$$K = \begin{cases} e^C & \text{pokud } y > 0 \\ -e^C & \text{pokud } y < 0 \\ 0 & \text{pokud } y = 0 \end{cases}$$

$$y = K \cdot e^{Px}$$



## Definice

### Definice

*Obecné řešení* diferenciální rovnice je množina všech funkcí  $y = f(x)$ , které splňují  $F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$ .

*Partikulární řešení* diferenciální rovnice je funkce, která náleží mezi obecná řešení a splňuje *počáteční podmínky* (též *okrajové podmínky*).

### Definice

Diferenciální rovnice prvního řádu řešitelná *separací proměnných* je rovnice tvaru

$$y' = f(x) \cdot g(y).$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \, dx$$

# Řešení rovnic separací proměnných

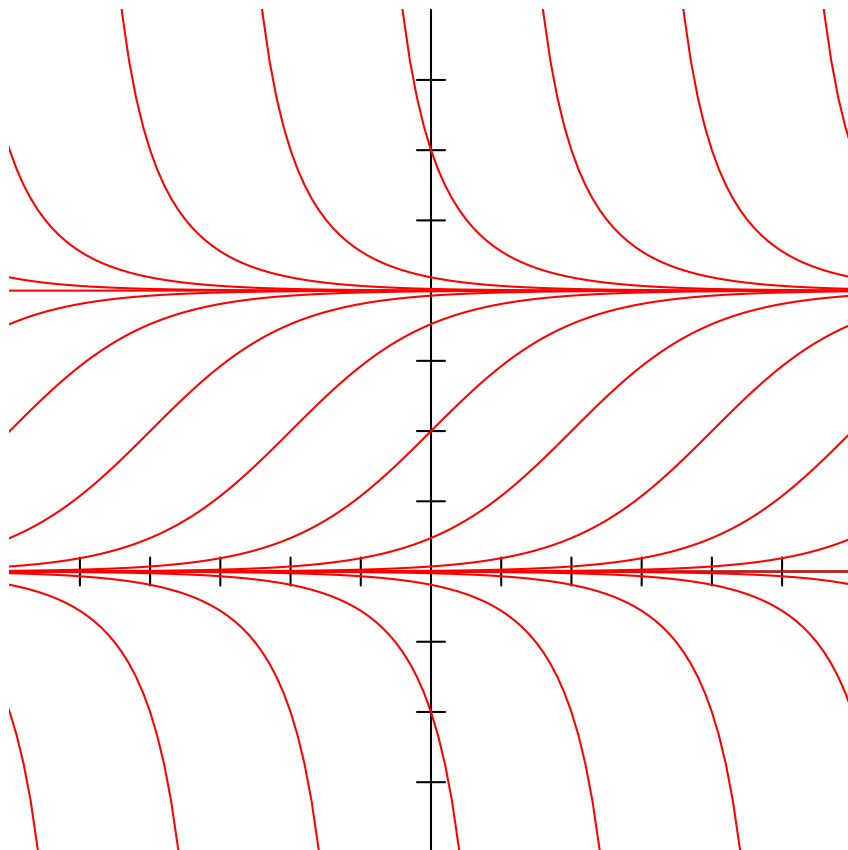
## Úloha

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice  $y' = P \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{M}\right)$ .

**Řešení:** Výjimečná řešení jsou  $y = 0$  a  $y = M$ . Pro  $0 \neq y \neq M$  platí

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{P}{M} \cdot y \cdot (M - y) & \ln \left| \frac{y}{M - y} \right| &= P \cdot x + MC \\ \frac{dy}{y \cdot (M - y)} &= \frac{P}{M} dx & \left| \frac{y}{M - y} \right| &= e^{Px} \cdot e^{MC} \\ \int \frac{dy}{y \cdot (M - y)} &= \int \frac{P}{M} dx & \frac{y}{M - y} &= K \cdot e^{Px} \\ \int \left( \frac{\frac{1}{M}}{y} + \frac{\frac{1}{M}}{M - y} \right) dy &= \int \frac{P}{M} dx & y &= (M - y) \cdot Ke^{Px} \\ \frac{1}{M} (\ln |y| - \ln |M - y|) &= \frac{P}{M} \cdot x + C & y &= \frac{MKe^{Px}}{1 + Ke^{Px}} \end{aligned}$$

# Řešení rovnic separací proměnných



# Homogenní diferenciální rovnice prvního řádu

## Definice

Homogenní diferenciální rovnice prvního řádu je rovnice, která lze vyjádřit ve tvaru

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

## Fakt

Homogenní rovnice se řeší substitucí  $z = \frac{y}{x}$ , neboli  $y = zx$ . Pak dostaneme

$$y' = (z \cdot x)' = z' \cdot x + z \cdot 1 = z'x + z.$$

# Řešení homogenních diferenciálních rovnic

## Úloha

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice  $x^2y' = y^2 - xy$  a nalezněte partikulární řešení vyhovující podmínce  $x = -1, y = -1$ .

**Řešení:** Výjimečná řešení:  $z = 0$  a  $z = 2$ , neboli  $y = 0$  a  $y = 2x$ .

$$y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{xy}{x^2}$$

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}$$

$$z'x + z = z^2 - z$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot x = z^2 - 2z$$

$$\frac{dz}{z^2 - 2z} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{z^2 - 2z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \left( \frac{\frac{1}{2}}{z-2} - \frac{\frac{1}{2}}{z} \right) dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}(\ln|z-2| - \ln|z|) = \ln|x| + C$$

$$\ln \left| \frac{z-2}{z} \right| = \ln x^2 + 2C$$

$$\left| \frac{z-2}{z} \right| = x^2 \cdot e^{2C}$$

# Řešení homogenních diferenciálních rovnic

$$\frac{z-2}{z} = K \cdot x^2$$

$$z-2 = z \cdot Kx^2$$

$$\frac{y}{x} - 2 = \frac{y}{x} \cdot Kx^2$$

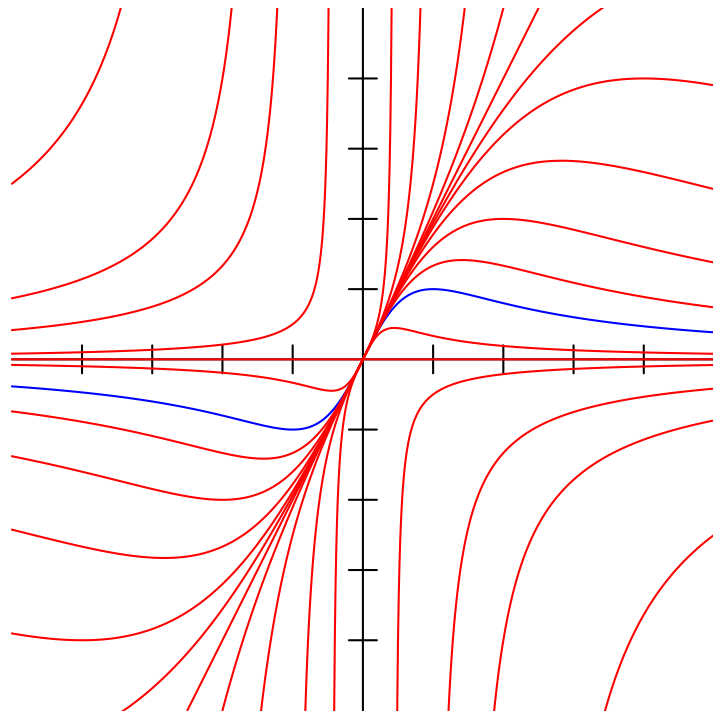
$$y - 2x = y \cdot Kx^2$$

$$y = \frac{2x}{1 + Kx^2}$$

$$-1 = \frac{2 \cdot (-1)}{1 + K \cdot (-1)^2}$$

$$K = 1$$

$$y = \frac{2x}{1 + x^2}$$



## Lineární diferenciální rovnice

### Definice

Diferenciální rovnice prvního řádu se nazývá *lineární*, když ji lze vyjádřit ve tvaru

$$y' + y \cdot f(x) = g(x).$$

### Algoritmus (Metoda variace konstanty, krok I)

Označme  $F(x)$  primitivní funkci k  $-f(x)$ . Nejdříve řešíme diferenciální rovnici s nulovou pravou stranou:

$$y' + y \cdot f(x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot f(x)$$

$$\int \frac{dy}{y} = -f(x) dx$$

$$\ln |y| = F(x) + C$$

$$|y| = e^{F(x)} \cdot e^C$$

$$y = K \cdot e^{F(x)}$$

## Metoda variace konstanty

### Algoritmus (Metoda variace konstanty, krok II)

Konstantu  $K$  začneme považovat za funkci, neboli provedeme substituci  $K = k(x)$ .

$$y' + y \cdot f(x) = g(x)$$

$$(k(x) \cdot e^{F(x)})' + (k(x) \cdot e^{F(x)}) \cdot f(x) = g(x)$$

$$k'(x) \cdot e^{F(x)} + k(x) \cdot e^{F(x)} \cdot (-f(x)) + k(x) \cdot e^{F(x)} \cdot f(x) = g(x)$$

$$k'(x) \cdot e^{F(x)} = g(x)$$

$$k'(x) = \frac{g(x)}{e^{F(x)}}$$

$$k(x) = \int \frac{g(x)}{e^{F(x)}} dx = h(x) + C$$

Obecné řešení je  $y = k(x) \cdot e^{F(x)} = (h(x) + C) \cdot e^{F(x)}$ .

## Řešení lineární diferenciální rovnice

### Úloha

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice  $y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \sin 2x$ .

**Řešení:** Začneme separovat rovnici s nulovou pravou stranou:

$$y' + y \cdot \operatorname{tg} x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$\ln |y| = \ln |\cos x| + C$$

$$|y| = |\cos x| \cdot e^C$$

$$y = K \cdot \cos x$$

$$K = k(x)$$

## Řešení lineární diferenciální rovnice

Dosadíme ve variaci konstanty:

$$y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \sin 2x$$

$$(k(x) \cdot \cos x)' + k(x) \cdot \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sin 2x$$

$$k'(x) \cdot \cos x + k(x) \cdot (-\sin x) + k(x) \cdot \sin x = \sin 2x$$

$$k'(x) \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$k'(x) = 2 \sin x$$

$$k(x) = \int 2 \sin x \, dx = -2 \cos x + C$$

Obečné řešení je  $y = (-2 \cos x + C) \cdot \cos x = C \cos x - 2 \cos^2 x$ .

## Bernoulliho diferenciální rovnice

### Definice

*Bernoulliho* diferenciální rovnice je rovnice typu

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^n.$$

### Algoritmus

Vydělíme rovnici  $y^n$  a dostaneme

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{f(x)}{y^{n-1}} = g(x).$$

Provedeme substituci

$$z = \frac{1}{y^{n-1}}, \quad z' = \frac{1-n}{y^n} y'$$

a dostaneme lineární diferenciální rovnici

$$\frac{z'}{1-n} + f(x) \cdot z = g(x).$$

# Řešení Bernoulliho diferenciálních rovnic

## Úloha

Nalezněte obecné řešení rovnice  $x^4 y' + x^3 y = 2xy^3$ .

**Řešení:** Provedeme substituci  $z = \frac{1}{y^2}$ , čímž dostaneme

$$-\frac{1}{2}x^4 z' + x^3 z = 2x \quad \text{neboli} \quad z' - \frac{2z}{x} = -\frac{4}{x^3}.$$

Řešením rovnice s nulovou pravou stranou dostaneme

$$z = K \cdot e^{\int 2x^{-1} dx} = K \cdot e^{\ln x^2} = K \cdot x^2.$$

Variací konstanty spočítáme

$$K = \int \frac{-4x^{-3}}{x^2} dx = \frac{-4x^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{x^4} + C$$

Máme  $z = \left(\frac{1}{x^4} + C\right) \cdot x^2 = x^{-2} + C \cdot x^2$ .

Řešení je  $y = z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x^{-2} + C \cdot x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + C \cdot x^4}}.$