

Matematika 2

pro PEF PaE

7. Obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu

Přemysl Jedlička

Katedra matematiky, TF ČZU

Homogenní diferenciální rovnice druhého řádu

Definice

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty je rovnice tvaru

$$ay'' + by' + cy = f(x).$$

Homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty je rovnice tvaru

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Definice

Charakteristická rovnice příslušná homogenní diferenciální rovnici $ay'' + by' + c = 0$ je kvadratická rovnice

$$ak^2 + bk + c = 0.$$

Kořeny charakteristické rovnice

Tvrzení

Je-li k kořenem charakteristické rovnice příslušné diferenciální rovnici $ay'' + by' + c = 0$, pak je $y = C \cdot e^{kx}$ řešením diferenciální rovnice, pro libovolné $C \in \mathbf{R}$.

Důkaz.

Dosadíme do rovnice:

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= a \cdot C \cdot k^2 \cdot e^{kx} + b \cdot C \cdot k \cdot e^{kx} + c \cdot C \cdot e^{kx} \\ &= (ak^2 + bk + c) \cdot C \cdot e^{kx} = 0 \cdot C \cdot e^{kx} = 0 \end{aligned}$$

□

Obecná řešení homogenních rovnic

Důsledek

Jsou-li k_1 a k_2 dva různé reálné kořeny charakteristické rovnice příslušné $ay'' + by' + c = 0$, pak obecné řešení dif. rce je

$$y = C_1 \cdot e^{k_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{k_2 \cdot x}.$$

Tvrzení

Je-li k jediným kořenem charakteristické rovnice příslušné $ay'' + by' + c = 0$, pak obecné řešení diferenciální rovnice je

$$y = C_1 \cdot e^{k \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{k \cdot x}.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= aC_2(k^2x + 2k)e^{kx} + bC_2(kx + 1)e^{kx} + cC_2xe^{kx} \\ &= [(ak^2 + bk + c) \cdot x + (2ak + b)] \cdot C_2 \cdot e^{kx} = 0 \end{aligned}$$

□

Komplexní exponenciála

Věta

Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \cdot \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n \text{ sudé}} i^n \cdot \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \text{ liché}} i \cdot i^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ &= \cos x + i \cdot \sin x \end{aligned}$$

□

Komplexní kořeny

Mějme kořeny kvadratické rovnice ve tvaru $p \pm q \cdot i$.

$$\begin{aligned} K_1 \cdot e^{(p+qi)x} + K_2 \cdot e^{(p-qi)x} &= K_1 \cdot e^{px} \cdot e^{qix} + K_2 \cdot e^{px} \cdot e^{-qix} \\ &= K_1 \cdot e^{px} \cdot (\cos qx + i \sin qx) + K_2 \cdot e^{px} \cdot (\cos(-qx) + i \sin(-qx)) \\ &= K_1 \cdot e^{px} \cdot (\cos qx + i \sin qx) + K_2 \cdot e^{px} \cdot (\cos qx - i \sin qx) \\ &= e^{px} \cdot [(K_1 + K_2) \cdot \cos qx + (K_1 - K_2) \cdot i \cdot \sin qx] \end{aligned}$$

Věta

Jsou-li $p \pm qi$ komplexní kořeny charakteristické rovnice

$kay'' + by' + c = 0$, pak obecné řešení diferenciální rovnice je

$$y = e^{px} \cdot (C_1 \cdot \cos qx + C_2 \cdot \sin qx).$$

Řešení homogenních diferenciálních rovnic

Úloha

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Řešení: Vyřešíme charakteristickou rovnici:

$$k^2 + 2k + 5 = 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16$$

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

$$y = e^{-x} \cdot (C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x)$$

Obecné řešení nehomogenní diferenciální rovnice

Věta

Mějme diferenciální rovnici $ay'' + by' + cy = f(x)$. Bud' $v(x)$ nějaké řešení této rovnice a bud' $y = C_1 \cdot g(x) + C_2 \cdot h(x)$ obecné řešení homogenní diferenciální rovnice $ay'' + by' + c = 0$. Pak obecné řešení nehomogenní diferenciální rovnice je

$$y = C_1 \cdot g(x) + C_2 \cdot h(x) + v(x).$$

Metoda neurčitých koeficientů

Věta

Mějme diferenciální rovnici $ay'' + by' + cy = f(x)$. Pak

- Je-li $f(x) = e^{kx} \cdot P(x)$, kde $P(x)$ je polynom stupně d , pak existuje polynom $Q(x)$ stupně nanejvýš d takový, že funkce

$$v(x) = x^r \cdot e^{kx} \cdot Q(x)$$

je řešením diferenciální rovnice, přičemž $r \in \{0, 1, 2\}$ je násobnost čísla k jakožto kořene charakteristické rovnice.

- Je-li $f(x) = e^{px} \cdot (P(x) \cdot \cos qx + R(x) \cdot \sin qx)$, kde $P(x)$ a $R(x)$ jsou polynomy stupně nanejvýš d , pak existují polynomy $Q(x)$ a $S(x)$ stupně nanejvýš d takové, že funkce

$$v(x) = x^r \cdot e^{px} \cdot (Q(x) \cdot \cos qx + S(x) \cdot \sin qx)$$

je řešením diferenciální rovnice, přičemž $r \in \{0, 1\}$ je násobnost čísla $p + qi$ jakožto kořene charakteristické rovnice.

Řešení nehomogenní diferenciální rovnice

Úloha

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + y = \sin 3x$.

Řešení: Řešení homogenní rovnice:

$$\text{Pravá strana: } e^{0x} \cdot (0 \cos 3x + 1 \sin 3x)$$

$$y'' = -y$$

$$v(x) = x^0 \cdot e^{0x} \cdot (A \cos 3x + B \sin 3x)$$

$$k^2 = -1$$

$$v(x) = A \cos 3x + B \sin 3x$$

$$k = \pm i$$

$$v'(x) = -3A \cos 3x + 3B \sin 3x$$

$$y = e^{0x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) \quad v''(x) = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x$$

Řešení nehomogenní diferenciální rovnice

Dosadíme $v(x)$ do diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} v''(x) + v(x) &= \sin 3x \\ (-9A \cos 3x - 9B \sin 3x) + (A \cos 3x + B \sin 3x) &= \sin 3x \\ -8A \cos 3x - 8B \sin 3x &= \sin 3x \\ \cos 3x : -8A &= 0 \\ \sin 3x : -8B &= 1 \\ A = 0 \quad B &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$v(x) = -\frac{1}{8} \sin 3x$$

$$\text{Řešení je } y = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x - \frac{1}{8} \sin 3x$$

Metoda variace konstant

Věta

Mějme diferenciální rovnici $ay'' + by' + cy = f(x)$. Bud' $y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$ řešením příslušné homogenní rovnice. Označme

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{f(x)}{a} & y_2' \end{vmatrix} \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{f(x)}{a} \end{vmatrix}$$

kde $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$. Potom obecné řešení nehomogenní diferenciální rovnice je

$$y = y_1 \cdot \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx + y_2 \cdot \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx.$$

Řešení diferenciálních rovnic pomocí variace konstant

Úloha

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 4y = \frac{1}{1+e^{2x}}$.

Řešení: Obecné řešení homogenní rovnice je:

$$k^2 - 4 = 0 \rightarrow k = \pm 2 \rightarrow y = K_1 \cdot e^{2x} + K_2 \cdot e^{-2x}.$$

Spočítáme Wronskiány: $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$, $y_1' = 2e^{2x}$, $y_2' = -2e^{-2x}$.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \frac{1}{1+e^{2x}} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{e^{2x}} \cdot \frac{1}{1+e^{2x}} = \frac{-1}{e^{2x} + e^{4x}}$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & \frac{1}{1+e^{2x}} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

Řešení diferenciálních rovnic pomocí variace konstant

$$\begin{aligned} \int \frac{W_1}{W} dx &= \int \frac{1}{4(e^{2x} + e^{4x})} dx = \left| \begin{matrix} t = e^{2x} \\ dt = 2e^{2x} dx \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{4(t + t^2)} \cdot \frac{dt}{2t} \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{dt}{t^2 + t^3} = \frac{1}{8} \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{8} \left(\ln \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x}} - \frac{1}{e^{2x}} \right) + C_1 = \frac{1}{8} (\ln(1 + e^{-2x}) - e^{-2x}) + C_1 \\ \int \frac{W_2}{W} dx &= \int \frac{e^{2x}}{-4(e^{2x} + 1)} dx = -\frac{1}{8} \int \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx \\ &= -\frac{1}{8} \ln(e^{2x} + 1) + C_2 \end{aligned}$$

Obecné řešení:

$$\begin{aligned} y &= e^{2x} \cdot \left[\frac{1}{8} (\ln(1 + e^{-2x}) - e^{-2x}) + C_1 \right] + e^{-2x} \cdot \left(-\frac{1}{8} \ln(e^{2x} + 1) + C_2 \right) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left[e^{2x} \cdot \ln(1 + e^{-2x}) - e^{-2x} \cdot \ln(1 + e^{2x}) - 1 \right] + C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-2x} \end{aligned}$$