

Matematika 2

pro PEF PaE

10. Skalární součin

Přemysl Jedlička

Katedra matematiky, TF ČZU

Definice skalárního součinu

Definice

Bud'te $\vec{u} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ a $\vec{v} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ dva vektory z V_n . Pak je *skalární součin* vektorů \vec{u} a \vec{v} definován jakožto následující zobrazení z $V_n \times V_n$ do \mathbf{R} :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Velikost vektoru \vec{u} se značí $|\vec{u}|$ a spočítá se jako $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

Fakt

Skalární součin splňuje

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= \vec{v} + \vec{u} & (r \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} &= r \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (r \cdot \vec{v}) \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} & \vec{0} \cdot \vec{a} &= 0 \end{aligned}$$

Ortogonalita vektorů

Definice

Řekneme, že vektory \vec{u} a \vec{v} jsou navzájem *ortogonální* (neboli *kolmé*), platí-li $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Je-li M podmnožina vektorového prostoru V , pak množinu všech vektorů ortogonálních na všechny vektory z M nazveme *ortogonální doplněk* množiny M a značíme ji M^\perp .

Tvrzení

Množina M^\perp je vždy vektorový podprostor prostoru V .

Platí $(M^\perp)^\perp = \mathcal{L}(M)$.

Speciálně, pro W , podprostor prostoru V , platí $(W^\perp)^\perp = W$ a $\dim W + \dim W^\perp = V$.

Hledání ortogonálního doplněku

Úloha

Nalezněte ortogonální doplněk k množině $\{(1, 0, -1, 2), (2, -1, 1, 3), (3, -2, -2, -1)\}$.

Řešení: Nejprve provedeme Gaussovu eliminaci

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

Hledáme vektor (x_1, x_2, x_3, x_4) splňující

$$0x_1 + 0x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 0$$

$$x_3 = 1 \quad x_4 = -1$$

$$0x_1 + 1x_2 - 3x_3 + 1x_4 = 0$$

$$x_2 = 3x_3 - x_4 = 4$$

$$1x_1 + 0x_2 - 1x_3 - 2x_4 = 0$$

$$x_1 = x_3 + 2x_4 = -1$$

Ortogonálním doplněkem je prostor $\mathcal{L}(\{(-1, 4, 1, -1)\})$.

Lineární nezávislost ortogonálních vektorů

Věta

Každá množina nenulových vektorů, jež jsou po dvou na sebe ortogonální, je lineárně nezávislá.

Důkaz.

Mějme po dvou kolmé vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$.

$$\begin{aligned} c_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{u}_k &= \vec{0} & | \cdot \vec{u}_i \\ c_1 \cdot \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_i + \dots + c_i \cdot \vec{u}_i \cdot \vec{u}_i + \dots + c_k \cdot \vec{u}_k \cdot \vec{u}_i &= \vec{0} \cdot \vec{u}_i \\ c_i \cdot \vec{u}_i \cdot \vec{u}_i &= 0 \\ c_i &= 0 \end{aligned}$$

pro všechna $i \leq k$. □

Ortogonalní báze

Definice

Bázi vektorového prostoru V nazveme *ortogonální*, pokud jsou její vektory navzájem ortogonální. Jsou-li navíc všechny bázevé vektory velikosti 1, pak bázi nazveme *ortonormální*.

Věta

Bud' $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ báze podprostoru W . Pak existuje ortogonální báze $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ prostoru W , která navíc splňuje

$$\mathcal{L}(\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_i\}) = \mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i\})$$

pro všechna $1 \leq i \leq k$.

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

Algoritmus (Gram, Schmidt)

Ortogonalní bázi lze najít následujícím postupem

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1$$

$$\vdots$$

$$\vec{v}_i = \vec{u}_i + r_1 \cdot \vec{v}_1 + r_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + r_{i-1} \cdot \vec{v}_{i-1}$$

tak, aby $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$ pro všechna $j < i$



Jørgen Pedersen Gram
1850–1916



1876–1959
Erhard Schmidt

Hledání ortogonalní báze

Úloha

Nalezněte ortogonalní bázi prostoru s bází
 $\{(1, 1, 3, -1), (1, 0, -1, 2), (2, -1, 3, 1)\}$.

Řešení: $\vec{v}_1 = (1, 1, 3, -1)$.

Hledáme \vec{v}_2 ve tvaru $(1, 0, -1, 2) + r \cdot (1, 1, 3, -1)$. Má platit

$$0 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2 + r \cdot \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = -4 + r \cdot 12,$$

takže $r = \frac{1}{3}$ a $\vec{v}_2 = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{5}{3}\right)$.

Hledáme \vec{v}_3 ve tvaru $(2, -1, 3, 1) + s \cdot (1, 1, 3, -1) + t \cdot \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{5}{3}\right)$.

$$0 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_3 + s \cdot \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + t \cdot \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 9 + s \cdot 12 + 0,$$

$$0 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_2 \cdot \vec{u}_3 + s \cdot \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 + t \cdot \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = 4 + 0 + t \cdot \frac{14}{3}$$

takže $s = -\frac{3}{4}$, $t = -\frac{12}{14}$ a $\vec{v}_3 = \left(\frac{3}{28}, -\frac{57}{28}, \frac{3}{4}, \frac{9}{28}\right)$.