

Matematika 2

pro PEF PaE

3. Určitý integrál

Přemysl Jedlička

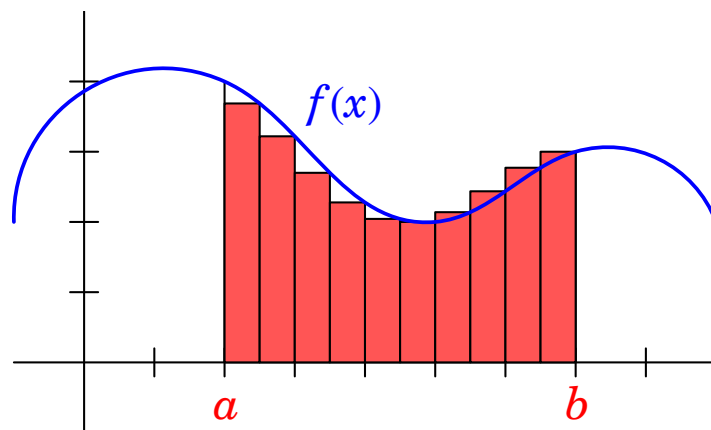
Katedra matematiky, TF ČZU

Určitý integrál

Riemannův integrál

2 / 9

Motivace integrálu



$$S = \lim_{dx \rightarrow 0} \sum_a^b f(x) \cdot dx \quad \longrightarrow \quad S = \int_a^b f(x) \, dx$$

Definice dělení



Georg Friedrich Bernhard Riemann
1826–1866

Definice

Bud' $f(x)$ funkce, která je po částech spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$. *Dělení* intervalu $\langle a, b \rangle$ je množina $D = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ splňující

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$$

přičemž tato množina obsahuje i body, kde f není definována nebo není spojitá. *Norma* dělení D je maximální délka podintervalu v D , tj. $\max\{x_{i+1} - x_i; 1 \leq i \leq n\}$. Norma dělení se značí $\nu(D)$.

Definice Riemannova integrálu

Definice

Řekneme, že funkce $f(x)$ má (Riemannův) určitý integrál od a do b roven A , pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$, jehož norma je menší než δ , platí

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) - A \right| < \varepsilon$$

pro libovolná čísla $c_i \in (x_i, x_{i+1})$. Tato skutečnost se zapíše výrazem

$$\int_a^b f(x) \, dx = A.$$

V takovémto případě říkáme, že funkce f je na intervalu $\langle a, b \rangle$ *integrovatelná*. Číslu a se říká *dolní mez* a číslu b *horní mez* integrace.

Definice Newtonova integrálu

Definice

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na otevřeném intervalu I a nechť $a, b \in I$.
Nechť je $F(x)$ nějaká primitivní funkce k $f(x)$. Pak výraz $F(b) - F(a)$ nazveme (Newtonovým) integrálem funkce $f(x)$ od a do b , což symbolicky zapíšeme jako

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Pozorování

Definice nezávisí na volbě primitivní funkce: je-li $G(x) = F(x) + c$, pak

$$[G(x)]_a^b = G(b) - G(a) = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Základní věta kalkulu

Věta

Má-li funkce $f(x)$ Newtonův i Riemannův integrál od a do b , pak se tyto hodnoty rovnají.

Důkaz.

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_{n+1}) - F(x_n) + F(x_n) - \dots - F(x_2) + F(x_2) - F(x_1) \\ &= \sum_{i=1}^n (F(x_{i+1}) - F(x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(c_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)) \quad \text{pro nějaká } c_i \in (x_{i+1}, x_i) \end{aligned}$$

z věty o střední hodnotě. Limitním přechodem dostaneme

$$\lim_{v(D) \rightarrow 0} (F(b) - F(a)) = \lim_{v(D) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(c_i) \cdot (x_{i+1} - x_i))$$

$$\text{Newtonův } \int_a^b f(x) \, dx = \text{Riemannův } \int_a^b f(x) \, dx$$

□

Výpočet určitého integrálu

Tvrzení (Per partes)

Jsou-li funkce $u'(x)$ a $v'(x)$ spojité na $\langle a, b \rangle$, pak

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x) \, dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) \, dx.$$

Tvrzení (Substituce)

Nechť je $F(t)$ primitivní funkce ke spojité funkci $f(t)$ na intervalu J , nechť je $g(x)$ spojitá funkce na intervalu I , který obsahuje a a b . Nechť pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ patří $g(x)$ do J . Pak je

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) \, dt.$$

Příklad na určitý integrál

Úloha

Spočtěte $\int_0^\pi x \cdot \sin \frac{x}{2} \, dx$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \cdot \sin \frac{x}{2} \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u' = \sin \frac{x}{2} & v = x \\ u = -2 \cos \frac{x}{2} & v' = 1 \end{array} \right|_0^\pi \\ &= \left[-2 \cos \frac{x}{2} \cdot x \right]_0^\pi - \int_0^\pi -2 \cos \frac{x}{2} \, dx \\ &= \left[-2 \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot \pi - \left(-2 \cdot \cos \frac{0}{2} \cdot 0 \right) \right] - \left| \begin{array}{ll} t = \frac{x}{2} & 0 \rightarrow 0 \\ dt = \frac{1}{2} dx & \pi \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right| \\ &= 0 - 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2 \cos t \cdot 2 dt = 4 \cdot [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4 \cdot \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right] = 4 \cdot [1 - 0] = 4 \end{aligned}$$

Příklad na určitý integrál

Úloha

Spočtěte $\int_0^{\pi} \sin^3 x \cdot \cos^4 x \, dx$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^3 x \cdot \cos^4 x \, dx &= \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x \cdot \cos^4 x \, dx \\ &= \left| \begin{array}{ll} t = \cos x & 0 \rightarrow 1 \\ dt = -\sin x dx & \pi \rightarrow -1 \end{array} \right| \\ &= \int_1^{-1} (1 - t^2) \cdot \sin x \cdot t^4 \cdot \frac{dt}{-\sin x} \\ &= - \int_1^{-1} (t^4 - t^6) \, dt = - \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} \right]_1^{-1} \\ &= - \left[\left(\frac{-1}{5} - \frac{-1}{7} \right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right] = \frac{4}{35} \end{aligned}$$