

Matematika 2

pro PEF PaE

8. Vektorové prostory

Přemysl Jedlička

Katedra matematiky, TF ČZU

Definice vektorového prostoru

Definice

Množina V s operacemi $+: V \times V \rightarrow V$ a $\cdot: \mathbf{R} \times V \rightarrow V$ se nazývá *vektorový prostor* (též *lineární prostor*) nad \mathbf{R} , pokud pro všechna $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ z V a všechna r, s z \mathbf{R} platí následující axiomy

- ① $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,
- ② $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$,
- ③ existuje prvek $\vec{o} \in V$ takový, že $\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$,
- ④ $r \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = r \cdot \vec{u} + r \cdot \vec{v}$,
- ⑤ $(r + s) \cdot \vec{u} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{u}$,
- ⑥ $(r \cdot s) \cdot \vec{u} = r \cdot (s \cdot \vec{u})$,
- ⑦ $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ a $0 \cdot \vec{u} = \vec{o}$.

Prvky prostoru V se nazývají *vektory*, prvky z \mathbf{R} se nazývají *skaláry*. Vektor \vec{o} se nazývá *nulový vektor*.

Příklady vektorových prostorů

Příklady

- \mathbf{R}

- V_n :

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

$$r \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (ra_1, ra_2, \dots, ra_n)$$

$$\vec{0} = (0, \dots, 0)$$

- $\mathcal{F}(\mathbf{R})$ = množina všech reálných funkcí

- $(\mathbf{R}^+, \oplus, \odot)$:

$$a \oplus b = a \cdot b$$

$$r \odot a = a^r$$

$$\vec{0} = 1$$

Definice vektorového podprostoru

Definice

Mějme vektorový prostor V . Podmnožina W vektorového prostoru V se nazývá *vektorový podprostor* prostoru V , pokud je *uzavřená* na sčítání a na násobení skalárem, tj. pokud platí

$$\vec{v} \in W \vee \vec{w} \in W \Rightarrow (\vec{v} + \vec{w}) \in W$$

$$\vec{v} \in W \Rightarrow (r \cdot \vec{v}) \in W \text{ pro libovolné } r \in \mathbf{R}.$$

a pokud W obsahuje nulový vektor.

Fakt

Každý vektorový prostor V má podprostory V a $\{\vec{0}\}$.

Příklady vektorových podprostorů

Příklady

- Podmnožina $\{(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 0); a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{R}\}$ je vektorový podprostor prostoru V_n .
- Podmnožina $\{(r, 2r); r \in \mathbf{R}\}$ je vektorový podprostor prostoru V_2 .
- Množina $C(\mathbf{R})$ všech spojitých reálných funkcí je vektorový podprostor prostoru $\mathcal{F}(\mathbf{R})$.
- Množina $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ všech reálných polynomů je vektorový podprostor prostoru $C(\mathbf{R})$, a tedy i podprostor prostoru $\mathcal{F}(\mathbf{R})$.

Lineární kombinace vektorů

Definice

Řekneme, že vektor \vec{v} je lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ prostoru V , pokud existují skaláry c_1, \dots, c_k takové, že

$$\vec{v} = c_1 \cdot \vec{u}_1 + c_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + c_k \cdot \vec{u}_k.$$

Definice

Množina všech vektorů z V , která lze vyjádřit jako lineární kombinace vektorů z množiny A se nazývá *lineární obal* množiny A a značí se $\mathcal{L}(A)$.

Koeficienty lineární kombinace

Úloha

Nalezněte jakou lineární kombinací vektorů $(3, 2)$ a $(-1, -5)$ je vektor $(-5, 1)$.

Řešení:

$$(-5, -1) = c_1 \cdot (3, 2) + c_2 \cdot (-1, -5)$$

$$(-5, -1) = (3c_1, 2c_1) + (-c_2, -5c_2)$$

$$(-5, -1) = (3c_1 - c_2, 2c_1 - 5c_2)$$

$$3c_1 - c_2 = -5$$

$$2c_1 - 5c_2 = -1$$

$$c_1 = -2 \quad c_2 = -1$$

Lineární závislost a nezávislost

Definice

Řekneme, že je množina $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ vektorů je *lineárně nezávislá*, pokud

$$c_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{u}_k = \vec{0}$$

nutně znamená $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$. V opačném případě je množina *lineárně závislá*.

Příklad

- Množina $\{\vec{u}\}$ je lineárně závislá právě když $\vec{u} = \vec{0}$.
- Množina $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ je lineárně závislá právě když $\vec{u} = r \cdot \vec{v}$ anebo $\vec{v} = r \cdot \vec{u}$ pro nějaké $r \in \mathbf{R}$.

Jednoznačné určení koeficientů lineární kombinace

Tvrzení

Mějme vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ a vektor \vec{v} , který je jejich lineární kombinací. Pak jsou koeficienty lineární kombinace určeny jednoznačně právě tehdy, když jsou vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ lineárně nezávislé.

Důkaz.

$$\vec{v} = c_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + c_k \cdot \vec{u}_k = d_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + d_1 \cdot \vec{u}_k$$

$$\vec{0} = (c_1 - d_1) \cdot \vec{u}_1 + \dots + (c_k - d_k) \cdot \vec{u}_k$$

Vektory jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $c_i = d_i$, pro všechna i . □

Podprostor generovaný podmnožinou

Tvrzení

Průnik libovolné množiny podprostorů prostoru V je opět podprostor prostoru V .

Definice

Podprostor prostoru V generovaný množinou A se definuje jakožto průnik všech podprostorů, které obsahují A .

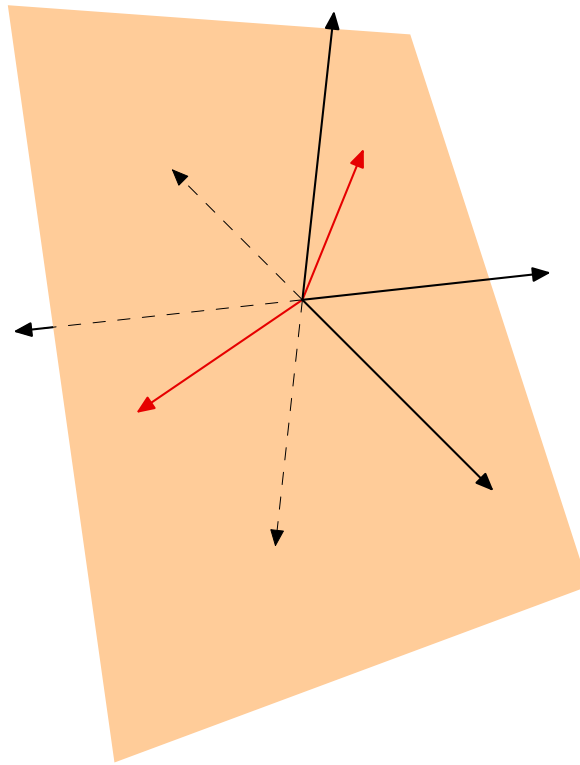
Věta

Podprostor prostoru V generovaný množinou A je roven $\mathcal{L}(A)$.

Báze vektorových prostorů

Definice

Báze vektorového podprostoru V je lineárně nezávislá množina, která generuje vektorový prostor V .



Dimenze vektorových prostorů

Věta

Bud' V vektorový prostor. Potom existuje M , báze vektorového prostoru. Je-li N jiná báze vektorového prostoru, pak $|M| = |N|$.

Definice

Dimenze vektorového prostoru V je počet prvků jeho (libovolné) báze. Značí se $\dim V$.

Příklad

Množina $\mathcal{P}_n(\mathbf{R})$ všech reálných polynomů stupně nanejvýš n tvoří vektorový podprostor prostoru $C(\mathbf{R})$. Báze tohoto prostoru je $\{x^n, x^{n-1}, \dots, x^2, x, 1\}$. Prostor $\mathcal{P}_n(\mathbf{R})$ má tedy dimenzi $n + 1$.

Úmluva

U prostoru $\{\vec{0}\}$ říkáme, že má bázi \emptyset a dimenzi 0.

Vztah dimenze, lineární závislosti a generátorů

Věta

Nechť je V vektorový prostor dimenze n a necht' $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$ jsou vektory z V .

- Jsou-li $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$ lineárně nezávislé, pak je $m \leq n$.
- Generují-li $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$ prostor V , pak $m \geq n$.
- Je-li W podprostor prostoru V , pak $\dim W \leq \dim V$, přičemž $\dim W = \dim V$ právě tehdy, když $W = V$.

Věta

Bud'te $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ vektory z prostoru V dimenze n . Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:

- 1 vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ jsou lineárně nezávislé;
- 2 vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ generují V ;
- 3 vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ tvoří bázi V .

Homomorfismus vektorových prostorů

Definice

Zobrazení φ z vektorového prostoru V do vektorového prostoru W se nazývá *homomorfismus* (též *lineární zobrazení*), když pro všechna \vec{u}, \vec{v} z V a všechna r z \mathbf{R} platí

$$\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}) \quad \text{a} \quad \varphi(r \cdot \vec{u}) = r \cdot \varphi(\vec{u})$$

Příklad

Zobrazení $'$ z prostoru $C(\mathbf{R})$ do prostoru $C(\mathbf{R})$ je homomorfismus vektorových prostorů. Platí totiž

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad \text{a} \quad (r \cdot f(x))' = r \cdot f'(x).$$

Izomorfismus vektorových prostorů

Definice

Bud' φ homomorfismus z prostoru V do prostoru W . Pokud je φ *prostý* homomorfismus (platí $\varphi(\vec{u}) \neq \varphi(\vec{v})$ kdykoliv $\vec{u} \neq \vec{v}$) a pokud je φ *na* prostor W (pro každé $\vec{w} \in W$ existuje \vec{v} , takové, že $\varphi(\vec{v}) = \vec{w}$), pak říkáme, že φ je *izomorfismus* prostorů V a W .

Příklad

Zobrazení $\varphi(a) = 2^a$ je izomorfismus prostorů \mathbf{R} a $(\mathbf{R}^+, \oplus, \odot)$. Totiž

$$\varphi(a + b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$$

$$\varphi(r \cdot a) = 2^{r \cdot a} = (2^a)^r = r \odot \varphi(a)$$

a φ je homomorfismus. Je evidentně prostý. Máme $c = 2^{\log_2 c}$, neboli $c = \varphi(\log_2 c)$, pro všechna $c \in \mathbf{R}^+$, takže φ je na.

Jednoznačné určení homomorfismu na bázi

Věta

Bud' φ homomorfismus z V do W , bud' M báze prostoru V a bud' f zobrazení z M do W . Pak existuje právě jeden homomorfismus φ z V do W takový, že $\varphi(\vec{u}) = f(\vec{u})$ pro všechny vektory $\vec{u} \in M$.

Příklad

Zadáme homomorfismus ψ z V_2 do V_3 dvěma způsoby: na bázi a předpisem. Zvolíme bázi $\{(1, 0), (0, 1)\}$ prostoru V_2 .

$$(1, 0) \mapsto (2, -3, -1) \quad (0, 1) \mapsto (1, -2, -4)$$

Lze spočítat, kam se homomorfismem zobrazí obecný prvek (a, b) .

$$\begin{aligned} \psi((a, b)) &= \psi(a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1)) \\ &= a \cdot (2, -3, -1) + b \cdot (1, -2, -4) = (2a + b, -3a - 2b, -a - 4b). \end{aligned}$$

Izomorfismus prostorů konečné dimenze

Věta

Každé dva prostory stejné konečné dimenze jsou navzájem izomorfní.

Důkaz.

Bud' $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ báze prostoru V a bud' $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ báze prostoru W . Zavedeme homomorfismus $\varphi : V \rightarrow W$ předpisem $\varphi(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$. Snadno se ověří, že tento homomorfismus je prostý a na. □