

# Matematika 2

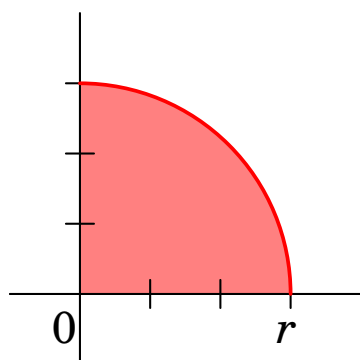
## pro PEF PaE

### 4. Užití určitého integrálu v geometrii

Přemysl Jedlička

Katedra matematiky, TF ČZU

## Obsah kruhu



$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & v = \sqrt{r^2 - x^2} \\ u = x & v' = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \end{array} \right|_0^r \\ &= \left[ x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \right]_0^r - \int_0^r \frac{-x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, dx \\ &= 0 - 0 - \int_0^r \frac{r^2 - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, dx + \int_0^r \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, dx \end{aligned}$$

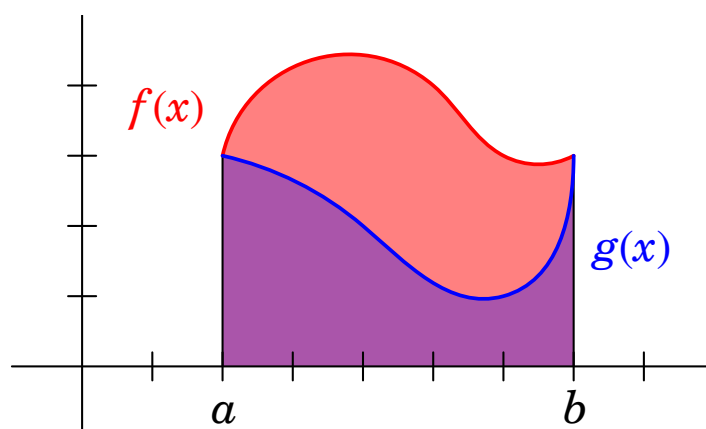
# Obsah kruhu

$$\begin{aligned}
 2 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx &= \int_0^r \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, dx = \left| \begin{array}{ll} rt = x & 0 \rightarrow 0 \\ r dt = dx & r \rightarrow 1 \end{array} \right| \\
 &= \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - r^2 t^2}} \cdot r dt = \int_0^1 \frac{r^3 \, dt}{r \cdot \sqrt{1 - t^2}} \\
 &= r^2 \cdot [\arcsin t]_0^1 = r^2 \cdot \left[ \frac{\pi}{2} - 0 \right] = \frac{\pi r^2}{2}
 \end{aligned}$$

Obsah dvou čtvrcí je  $\frac{\pi r^2}{2}$ , takže obsah kruhu je  $\pi r^2$ .

Správně bychom měli počítat  $\lim_{a \rightarrow r} \int_0^a \sqrt{r^2 - x^2} \, dx$ .

# Plocha ohraničená křivkami



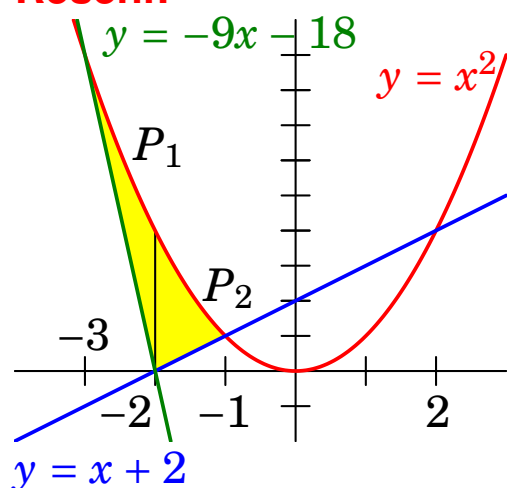
$$S = \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx$$

# Plocha ohraničená křivkami

## Úloha

Určete obsah obrazce ohraničeného křivkami  $y = x^2$ ,  $y = x + 2$  a  $y = -9x - 18$ .

## Řešení:



$$\begin{aligned}
 x^2 &= x + 2 \\
 x^2 - x - 2 &= 0 & x + 2 &= -9x - 18 \\
 (x - 2) \cdot (x + 1) &= 0 & 10x &= -20 \\
 & & x &= -2 \\
 x^2 &= -9x - 18 \\
 x^2 + 9x + 18 &= 0 \\
 (x + 3) \cdot (x + 6) &= 0
 \end{aligned}$$

# Plocha ohraničená křivkami

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \int_{-3}^{-2} x^2 \, dx - \int_{-3}^{-2} (-9x - 18) \, dx = \int_{-3}^{-2} (x^2 + 9x + 18) \, dx \\
 &= \left[ \frac{x^3}{3} + 9 \cdot \frac{x^2}{2} + 18x \right]_{-3}^{-2} \\
 &= \left( \frac{-8}{3} + 9 \cdot \frac{4}{2} - 36 \right) - \left( \frac{-27}{3} + 9 \cdot \frac{9}{2} - 54 \right) = -\frac{62}{3} + \frac{45}{2} = \frac{11}{6} \\
 P_2 &= \int_{-2}^{-1} x^2 \, dx - \int_{-2}^{-1} (x + 2) \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^{-1} \\
 &= \left( \frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left( \frac{-8}{3} - \frac{4}{2} + 4 \right) = \frac{7}{6} + \frac{2}{3} = \frac{11}{6} \\
 P &= P_1 + P_2 = \frac{11}{6} + \frac{11}{6} = \frac{11}{3}
 \end{aligned}$$

## Délka oblouky křivky

### Věta

Nechť má funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  spojitou derivaci. Pak je délka oblouku křivky od  $a$  do  $b$  rovna

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

### Důkaz.

Vezmeme dělení  $D$  a aproximujeme  $f$  po částech lineární funkcí.

$$\begin{aligned} l(D) &= \sum \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sum \sqrt{\Delta x^2 + (f'(c_i) \cdot \Delta x)^2} \\ &= \sum \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x \quad \text{pro nějaké } c_i \in (x_i, x_{i+1}) \end{aligned}$$

Limitním přechodem dostaneme  $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$ . □

## Délka kružnice

Kružnice:  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}$ .

$$\begin{aligned} \frac{l}{4} &= \int_0^r \sqrt{1 + \left( \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right)^2} \, dx = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \, dx \\ &= \int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} \, dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, dx \\ &= \left| \begin{array}{ll} rt = x & 0 \rightarrow 0 \\ rdt = dx & r \rightarrow 1 \end{array} \right| = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - r^2 t^2}} \cdot r \, dt \\ &= \int_0^r \frac{r}{\sqrt{1 - t^2}} \, dt = r \cdot [\arcsin t]_0^1 = r \cdot \left[ \frac{\pi}{2} - 0 \right] = \frac{\pi r}{2} \end{aligned}$$

Délka kružnice je  $2\pi r$ .

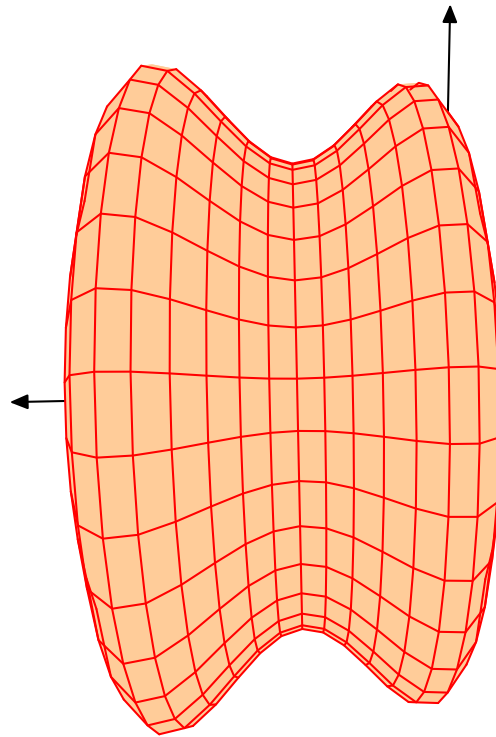
# Rotační tělesa

## Definice

*Rotačním tělesem*, které vznikne rotací funkce  $f(x)$  kolem osy  $x$  myslíme množinu

$$y^2 + z^2 \leq f^2(x)$$

v  $\mathbf{R}^3$ .



## Objem rotačního tělesa

## Věta

Objem tělesa, které vznikne rotací spojitě funkce  $f(x)$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , je

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) \, dx.$$

## Důkaz.

Vezmeme dělení  $D$  a aproximujeme těleso pomocí válců

$$V(D) = \sum_{i=1}^n \pi \cdot f^2(x_i) \cdot \Delta x.$$

Limitním přechodem dostaneme  $V = \int_a^b \pi \cdot f^2(x) \, dx.$

□

# Objem koule

Koule:  $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ , neboli  $y^2 + z^2 \leq (\sqrt{r^2 - x^2})^2$ .

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 \, dx = \pi \cdot \int_{-r}^r (r^2 - x^2) \, dx \\ &= \pi \cdot \left[ r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \pi \cdot \left[ \left( r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \left( -r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right] = \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

# Plášť rotačního tělesa

## Fakt

*Povrch rotačního tělesa sestává z pláště a dvou podstav.*

## Věta

*Nechť má nezáporná funkce  $f(x)$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  spojitou derivaci. Velikost pláště tělesa, které vznikne rotací oblouku křivky grafu funkce  $f(x)$  kolem osy  $x$ , je*

$$S = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

# Povrch koule

Koule je rotační těleso, které má triviální podstavy, takže povrch koule je plášť koule.

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \cdot \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right)^2} dx \\ &= 2\pi \cdot \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi \cdot \int_{-r}^r r dx = 2\pi \cdot [rx]_{-r}^r \\ &= 2\pi \cdot [r^2 + r^2] = 4\pi r^2 \end{aligned}$$