

Matematika 2

pro PEF PaE

12. Matice

Přemysl Jedlička

Katedra matematiky, TF ČZU

Operace s maticemi

Definice

Bud'te $\mathbf{A} = (a_{ij})$ a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ dvě matice rozměru $n \times m$. *Součet* těchto matic $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ je $(a_{ij} + b_{ij})$. *Rozdíl* těchto matic $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ je $(a_{ij} - b_{ij})$.

Definice

Bud' $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matice rozměru $n \times m$ a $c \in \mathbf{R}$. *Násobek* matice \mathbf{A} číslem c je $c\mathbf{A} = (c \cdot a_{ij})$.

Věta

Množina M_{nm} je vektorový prostor dimenze $n \cdot m$.

Násobení matic

Definice

Nechť jsou $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matice rozměru $k \times n$ a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ matice rozměru $n \times m$. *Součin* matic $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je matice rozměru $k \times m$, jejíž prvky se spočtou jako

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

Pozorování

Označme \vec{a}_i i -tý řádek matice \mathbf{A} a \vec{b}_j j -tý sloupec matice \mathbf{B} . Pak platí $c_{ij} = \vec{a}_i \cdot \vec{b}_j$.

Úloha

Spočtěte oba součiny (v různém pořadí) matic

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$-1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 = -6$$

$$-1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) = 6$$

$$4 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 5$$

$$4 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = -2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ 13 & -11 & 5 \\ -6 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti násobení matic

Definice

Pro každé přirozené n zavádíme *nulovou* matici \mathbf{O}_n a *jednotkovou* matici \mathbf{E}_n jakožto matice rozměru $n \times n$

$$\mathbf{O}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Věta

Bud'te \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} matice a $r \in \mathbf{R}$. Pak

- | | |
|--|---|
| ① $r(\mathbf{AB}) = (r\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(r\mathbf{B})$ | ④ $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ |
| ② $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ | ⑤ $\mathbf{OA} = \mathbf{O}$ a $\mathbf{AO} = \mathbf{O}$ |
| ③ $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ | ⑥ $\mathbf{EA} = \mathbf{A}$ a $\mathbf{AE} = \mathbf{A}$ |

Motivace pro inverzní matici

Jsou-li dány matice \mathbf{A} a \mathbf{B} , jak spočítat matici \mathbf{X} takovou, aby $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$? A co, pokud je \mathbf{A} čtvercová a šířka \mathbf{B} rovna 1?

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

To se dá řešit Jordanovou eliminací

$$(\mathbf{A} | \mathbf{B}) \sim \text{elementární úpravy na řádky} \sim (\mathbf{E} | \mathbf{X})$$

Úloha

Nalezněte matici \mathbf{X} , aby platilo $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, když

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ -5 & 6 & 6 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -3 & 0 & -6 \\ -1 & 4 & 1 & -5 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 4 & -8 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -7 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Zkouška: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ -5 & 6 & 6 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Inverzní matice

Definice

Bud'te \mathbf{A} a \mathbf{B} čtvercové matice. Matici \mathbf{B} nazýváme *inverzní* maticí k matici \mathbf{A} , pokud platí $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$. Tento vztah značíme $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Algoritmus

Matice \mathbf{A}^{-1} se hledá jakožto matice \mathbf{X} , splňující $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$:

$$(\mathbf{A} | \mathbf{E}) \sim \text{elementární úpravy na řádky} \sim (\mathbf{E} | \mathbf{A}^{-1})$$

Definice

Čtvercová matice rozměru $n \times n$ se nazývá *regulární*, je-li její hodnost rovna n .

Vlastnosti inverzních matic

Věta

Nechť je \mathbf{A} čtvercová matice. Pak jsou následující vlastnosti ekvivalentní:

- ① matice \mathbf{A} je regulární;
- ② k matici \mathbf{A} existuje matice inverzní;
- ③ existuje matice \mathbf{B} splňující $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$;
- ④ existuje matice \mathbf{B} splňující $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$.

Tvrzení

Bud'te \mathbf{A} a \mathbf{B} regulární matice. Pak \mathbf{AB} je také regulární matice a platí $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Hledání inverzní matice

Úloha

Nalezněte inverzní matici k matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -6 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -14 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 8 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Zkouška: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -14 & 6 & -3 \\ 8 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení soustavy pomocí inverzní matice

Úloha

Najděte jediné řešení soustavy

$$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ 2x + y + 4z &= -3 \\ -x + 2y - 6z &= 7 \end{aligned}$$

Řešení: Soustavu lze ekvivalentně přepsat jako

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad | \cdot \mathbf{A}^{-1}.$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{E}\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} -14 & 6 & -3 \\ 8 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -39 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Řešení maticových rovnic

Úloha

Nalezněte matici \mathbf{X} splňující $\mathbf{XA} + \mathbf{B} = 3\mathbf{A} + 2\mathbf{X}$ pro

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Vyjádříme matici \mathbf{X} :

$$\mathbf{XA} + \mathbf{B} = 3\mathbf{A} + 2\mathbf{X}$$

$$\mathbf{XA} - 2\mathbf{X} = 3\mathbf{A} - \mathbf{B}$$

$$\mathbf{XA} - 2\mathbf{XE} = 3\mathbf{A} - \mathbf{B}$$

$$\mathbf{X}(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) = 3\mathbf{A} - \mathbf{B}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - 2\mathbf{E}$$

$$\mathbf{XC} = 3\mathbf{A} - \mathbf{B}$$

$$\mathbf{X} = (3\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{C}^{-1}$$

$$3\mathbf{A} - \mathbf{B} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 9 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Řešení maticových rovnic

Spočteme matici \mathbf{C}^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 9 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Zkouška:

$$\text{L: } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 7 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{P: } 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$