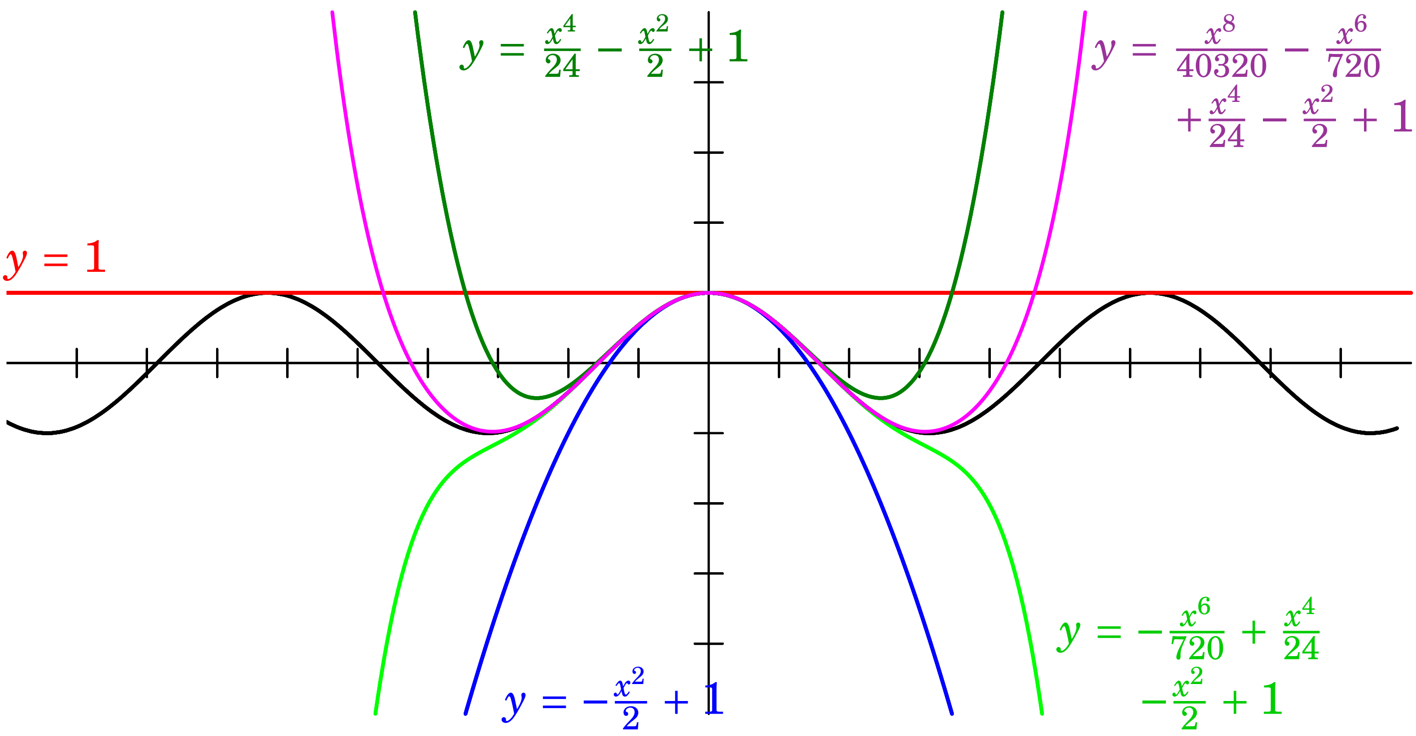
Matematika 1
pro PEF PaE

13. Taylorovy polynomy

Přemysl Jedlička

Katedra matematiky, TF ČZU

Rozvoj funkce kosinus



Maclaurinův rozvoj

Definice

Faktoriál přirozeného čísla n je číslo $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

Věta (Maclaurin)

Nechť má funkce f spojité derivace až do $(n+1)$-ho řádu. Pak

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + R_{n+1}(x),$$

kde $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$, pro nějaké c mezi 0 a x.

1698–1746
Colin Maclaurin

Rozvoje elementárních funkcí

Příklad

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{e^0}{1!} \cdot x + \frac{e^0}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{e^0}{n!} \cdot x^n + R_{n+1}(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x) \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Příklady

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Výpočet přibližné hodnoty

Úloha

Určete hodnotu čísla e s přesností na 5 desetinných míst.

Řešení: Budeme počítat e jakožto hodnotu funkce e^x v bodě 1.
Určíme takové n, aby $|R_{n+1}(1)| < 0,000005$.
Víme, že $R_{n+1}(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot 1^n$, pro nějaké $0 < c < 1$.
Poněvadž $e < 3$, určitě platí $R_{n+1}(1) < \frac{3}{(n+1)!}$.
Pro $n = 8$ platí $R_9(1) < \frac{3}{362880} < 0,00000083$.

$$e = e^1 \doteq \sum_{n=0}^{8} \frac{1^n}{n!} \doteq 2,71828$$

Taylorův rozvoj

Věta (Taylor)

Nechť má funkce f spojité derivace až do $(n+1)$-ho řádu a buď $a \in \mathcal{D}(f)$. Pak na každém okolí bodu a, které je v $\mathcal{D}(f)$ platí

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + R_{n+1}(x),$$

kde $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$, pro nějaké c mezi body a a x.

1685–1731
Brook Taylor

Určení Taylorova polynomu

Úloha

Určete Taylorův rozvoj třetího řádu funkce $\sqrt[3]{x^2-3}$ bodě 2.

Řešení: Spočteme derivace funkce:

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}(x^2-3)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \tfrac{2}{3}x \cdot (x^2-3)^{-\frac{2}{3}}$$
$$f''(x) = \tfrac{2}{3}(x^2-3)^{-\frac{2}{3}} + \tfrac{2}{3}x \cdot \left[-\tfrac{2}{3}(x^2-3)^{-\frac{5}{3}} \cdot 2x\right]$$
$$f^{(3)}(x) = \tfrac{2}{3} \cdot \left(-\tfrac{2}{3}(x^2-3)^{-\frac{5}{3}} \cdot 2x\right) - \tfrac{8}{9} \cdot \Big\{2x \cdot (x^2-3)^{-\frac{5}{3}} + x^2 \cdot \left[-\tfrac{5}{3}(x^2-3)^{-\frac{8}{3}} \cdot 2x\right]\Big\}$$

Určíme hodnoty derivací: $f(2) = 1$, $f'(2) = \frac{4}{3}$, $f''(2) = \frac{2}{3} - \frac{8}{9} \cdot 2^2 = -\frac{26}{9}$, $f^{(3)}(2) = -\frac{8}{9} \cdot 2 - \frac{8}{9} \cdot \left\{4 - \frac{80}{3}\right\} = \frac{496}{27}$. Výsledek:

$$T_3(x) = 1 + \frac{\frac{4}{3}}{1!} \cdot (x-2) + \frac{-\frac{26}{9}}{2!} \cdot (x-2)^2 + \frac{\frac{496}{27}}{3!} \cdot (x-2)^3$$

Výpočet přibližné hodnoty

Úloha

Určete hodnotu $\sqrt{2}$ s chybou $\pm 0,02$.

Řešení: Provedeme rozvoj funkce $\sqrt{x}$ v bodě 1.

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \qquad f''(x) = -\tfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \qquad f^{(3)}(x) = \tfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$
$$f^{(4)}(x) = -\tfrac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} \qquad f^{(5)}(x) = \tfrac{105}{32}x^{-\frac{9}{2}} \qquad f^{(6)}(x) = -\tfrac{945}{64}x^{-\frac{11}{2}}$$

Pro $n = 5$ máme $R_6(x) \approx \frac{-\frac{945}{64}}{6!} \cdot 1^6 \doteq 0,02$. Taylorův rozvoj:

$$T_5(x) = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!} \cdot (x-1) - \frac{\frac{1}{4}}{2!} \cdot (x-2)^2 + \frac{\frac{3}{8}}{3!} \cdot (x-1)^3 - \frac{\frac{15}{16}}{4!} \cdot (x-1)^4 + \frac{\frac{105}{32}}{5!} \cdot (x-1)^5$$

$$\sqrt{2} \doteq T_5(2) = 1,42578125$$

Taylorův rozvoj funkcí více proměnných

Věta

Nechť má funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$ spojité parciální derivace až do řádu $k+1$ na nějakém okolí U bodu A. Pak pro každé X platí

$$f(X) = f(A) + \frac{\mathrm{d}f_A(X)}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2 f_A(X)}{2!} + \cdots + \frac{\mathrm{d}^k f_A(X)}{k!} + R_{k+1}(X),$$

kde $R_{k+1}(X) = \frac{\mathrm{d}^{k+1} f_B(X)}{(k+1)!}$, pro nějaký bod B mezi X a A.

Úloha

Určete Taylorův rozvoj druhého stupně funkce $f(x,y) = \ln(x+y^2)$ v bodě $A = (0,1)$.

Taylorův rozvoj funkcí více proměnných

Řešení: Spočteme první a druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x+y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-1}{(x+y^2)^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = -1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x-2y^2}{(x+y^2)^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2y}{(x+y^2)^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = -2$$

Spočteme první a druhý diferenciál v bodě:

$$\mathrm{d}f_A(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)\cdot(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)\cdot(y-1) = x + 2y - 2$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 f_A(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)\cdot(x-0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot(x-0)\cdot(y-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)\cdot(y-1)^2 \\ &= -x^2 - 4x(y-1) - 2(y-1)^2 = -x^2 - 4xy - 2y^2 + 4x + 4y - 2\end{aligned}$$

Taylorův polynom je

$$T_2(x,y) = 0 + \frac{x+2y-2}{1!} + \frac{x^2 - 4xy - 2y^2 + 4x + 4y - 2}{2!}$$