

Matematika 1

pro PEF PaE

12. Diferenciály funkcí

Přemysl Jedlička

Katedra matematiky, TF ČZU

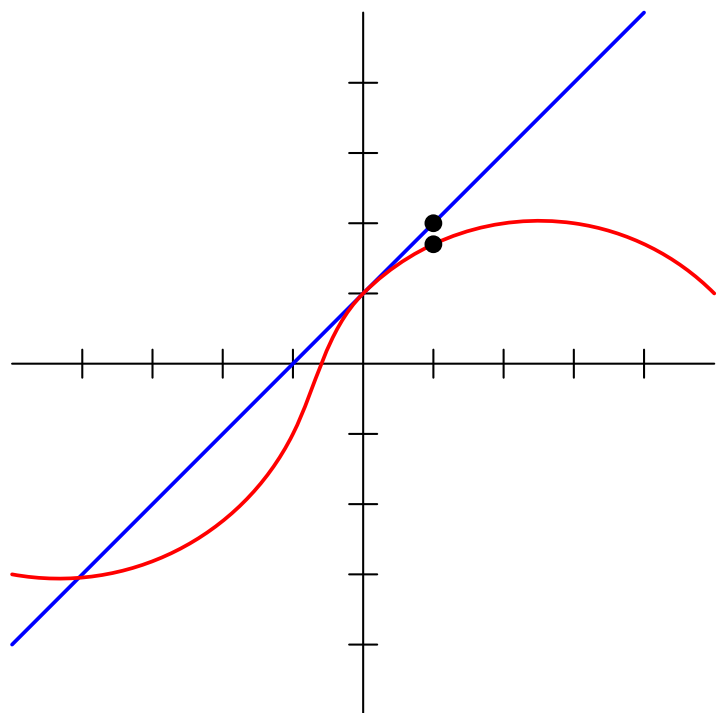
Aproximace funkcí

Jak spočítat přibližné hodnoty funkcí, které neznáme přesně?

Kolik je $\sqrt{145}$?

Kolik je $e^{\frac{1}{10}}$?

Kolik je $\arctg 1.1$?



Definice diferenciálu

Definice

Diferenciál funkce f v bodě a je lineární funkce $\Delta x \mapsto K \cdot \Delta x$, definovaná jako

$$f(a + \Delta x) - f(a) = K \cdot \Delta x + \omega(\Delta x),$$

kde $\omega(\Delta x)$ je funkce drobné chyby splňující $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\omega(\Delta x)}{\Delta x} = 0$.

Diferenciál funkce f v bodě a se značí df_a .

Definice

Diferenciál funkce f , značen df , je funkce, která každému x vrací diferenciál funkce f v bodě x .

Diferenciál jako derivace

Tvrzení

Pokud diferenciál funkce f v bodě a existuje a je tvaru $\Delta x \mapsto K \cdot \Delta x$, pak $K = f'(a)$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} f(a + \Delta x) - f(a) &= K \cdot \Delta x + \omega(\Delta x) \\ \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} &= K + \frac{\omega(\Delta x)}{\Delta x} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} &= K + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\omega(\Delta x)}{\Delta x} \\ f'(a) &= K \end{aligned}$$



Výpočet diferenciálu

Úmluva

Píšeme $df_a = f'(a) \cdot dx$ a obdobně $df = f'(x) \cdot dx$.

Příklady

$$d(x^3 + x^2) = (3x^2 + 2x) \cdot dx$$

$$d \sin 2x = 2 \cdot \cos 2x \cdot dx$$

$$d \ln(3 - x) = -\frac{1}{3 - x} \cdot dx$$

Výpočet přibližných hodnot pomocí diferenciálu

Úloha

Kolik je přibližně $\sqrt{145}$?

Řešení: Víme, že $\sqrt{144} = 12$. Spočítáme diferenciál funkce:

$$d \sqrt{x} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot dx.$$

$$f(a + \Delta x) - f(a) = df_a \cdot \Delta x + \omega(\Delta x)$$

$$f(144 + 1) - f(144) = df(144) \cdot 1 + \omega(1)$$

$$\sqrt{145} - \omega(1) = \sqrt{144} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{144}}$$

$$\sqrt{145} \doteq 12 + \frac{1}{24} = 12,041\bar{6}$$

Pro úplnost: $\sqrt{145} = 12,041594578792295480128241030379 \dots$

Diferenciál vyššího řádu

Definice

Druhým diferenciálem funkce f v bodě a rozumíme funkci

$$d^2f_a = f''(a) \cdot (dx)^2.$$

Druhý diferenciál funkce f je funkce

$$d^2f = f''(x) \cdot (dx)^2.$$

Definice

n -tý diferenciál funkce f je funkce

$$d^n f = f^{(n)}(x) \cdot (dx)^n.$$

Definice totálního diferenciálu

Definice

Totálním diferenciálem funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ v bodě A rozumíme funkci

$$df_A = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \cdot dx_n$$

Definice

Druhým totálním diferenciálem funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ v bodě A rozumíme funkci

$$d^2f_A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) \cdot dx_i dx_j$$

Užití totálního diferenciálu

Úloha

Spočtěte přibližnou hodnotu $\ln(0,9^3 + 0,1^3)$.

Řešení: Označíme $f(x, y) = \ln(x^3 + y^3)$. Známe $f(1, 0) = 0$. Parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2}{x^3 + y^3} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2}{x^3 + y^3}$$

Výpočet přibližné hodnoty:

$$\begin{aligned} f(0,9; 0,1) &\doteq f(1; 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1; 0) \cdot (-0,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1; 0) \cdot 0,1 \\ &= 0 + 3 \cdot (-0,1) + 0 \cdot 0,1 = -0,3 \end{aligned}$$

Ve skutečnosti: $\ln(0,9^3 + 0,1^3) = -0,31471074483970023894 \dots$