

Matematika 1

pro PEF PaE

11. Vázané extrémy funkcí více proměnných

Přemysl Jedlička

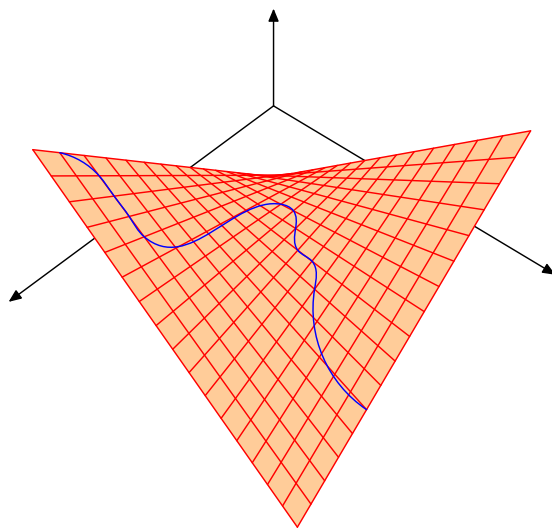
Katedra matematiky, TF ČZU

Definice vázaných extrémů

Definice

Řekneme, že funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ má v bodě A maximum vázané podmínkami

$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad g_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \dots \quad g_r(x_1, \dots, x_n) = 0,$
pokud platí $g_1(A) = g_2(A) = \dots = g_r(A) = 0$ a pro jakýkoliv bod B ,
splňující tutéž podmínku, platí $f(A) \geq f(B)$.



Hledání vázaných extrémů dosazením

Úloha

Nalezněte extrémů funkce $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ vázané podmínkou $y = x + 3$.

Řešení: Do funkce f dosadíme $x + 3$ za y .

$$h(x) = \frac{x(x+3)}{x^2 + (x+3)^2} = \frac{x^2 + 3x}{2x^2 + 6x + 9}$$

$$h'(x) = \frac{(2x+3) \cdot (2x^2 + 6x + 9) - (x^2 + 3x) \cdot (4x + 6)}{(2x^2 + 6x + 9)^2}$$

$$= \frac{4x^3 + 18x^2 + 36x + 27 - 4x^3 - 18x^2 - 18x}{(2x^2 + 6x + 9)^2} = \frac{18x + 27}{(2x^2 + 6x + 9)^2}$$

Funkce h má v bodě $-\frac{3}{2}$ lokální minimum.

Funkce f má v bodě $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ vázané lokální minimum.

Hledání vázaných extrémů dosazením

Úloha

Nalezněte extrémů funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ vázané podmínkou $x^2 + y^2 = 4$.

Řešení: Vyjádříme $y^2 = 4 - x^2$ a dosadíme do funkce f .

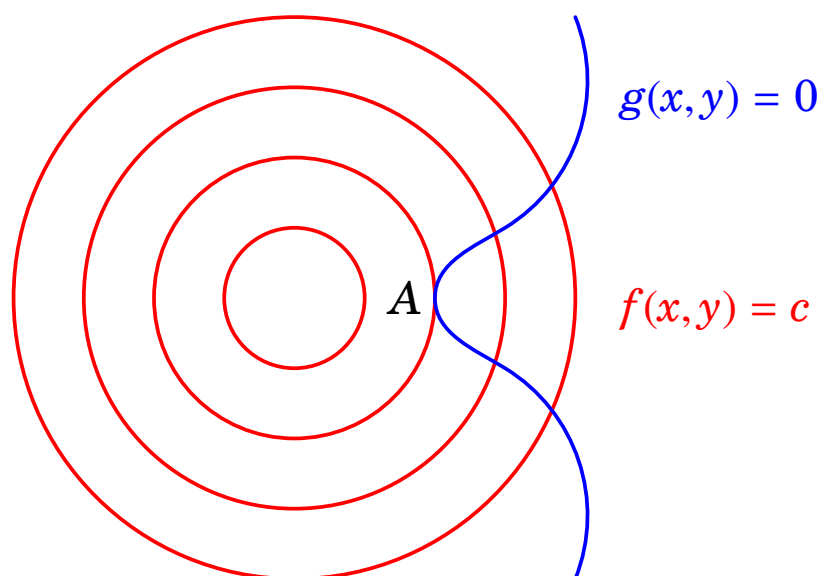
$$h(x) = x^2 - (4 - x^2) = 2x^2 - 4, \quad h'(x) = 2x$$

Kořen derivace je $x = 0$. Máme $h''(x) = 2$, takže funkce $h(x)$ má v bodě 0 lokální minimum. Funkce $f(x, y)$ má v bodech $(0, 2)$ a $(0, -2)$ vázaná lokální minima.

Dosazení, které jsme provedli, je vlastně $y = \pm \sqrt{4 - x^2}$, takže $\mathcal{D}(h) = \langle -2, 2 \rangle$. Takže funkce $h(x)$ má maxima v bodech -2 a 2 .

Funkce $f(x, y)$ má vázaná lokální maxima v bodech $(-2, 0)$ a $(2, 0)$.

Odvození Lagrangeova multiplikátoru



tečna k f v A = tečna k g v A

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A) \right) = \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x}(A), \frac{\partial g}{\partial y}(A) \right) \quad \text{pro nějaké } \lambda \neq 0$$

Metoda Lagrangeových multiplikátorů

Věta (Lagrange)

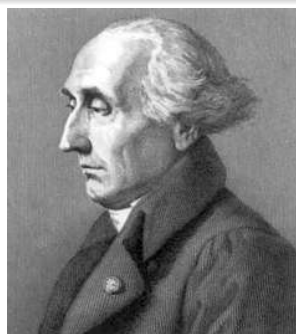
Mějte $f(x_1, \dots, x_n)$ a $g_1(x_1, \dots, x_n) \dots g_r(x_1, \dots, x_n)$ spojitě všechny parciální derivace. Sestavíme funkci

$$L(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 \cdot g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_r \cdot g_r(x_1, \dots, x_n)$$

o n proměnných a r parametrech. Pak řešení soustavy $n + r$ rovnic

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \text{ pro všechna } i, \quad g_j = 0, \text{ pro všechna } j$$

dává extrém funkce f vázaný podmínkami $g_1 = 0, \dots, g_r = 0$, pokud $\lambda_j \neq 0$, pro všechna j .



vévoda Joséph-Louis de Lagrange
(Giuseppe Lodovico Lagrangia)
1736–1813

Hledání extrémů metodou Lagrangeova multiplikátoru

Úloha

Nalezněte extrémů funkce $f(x, y) = xy$ vázané podmínkou $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$.

Řešení: Všimneme si, že $x \neq 0, y \neq 0$. Sestavíme funkci L :

$$L(x, y) = xy + \lambda \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 2 \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + \lambda \cdot \frac{-1}{x^2} \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = x + \lambda \cdot \frac{-1}{y^2}$$

Řešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$\begin{aligned} y - \lambda \cdot \frac{1}{x^2} &= 0 & x - \lambda \cdot \frac{1}{y^2} &= 0 & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 2 \\ \lambda &= yx^2 & \lambda &= xy^2 \end{aligned}$$

Hledání extrémů metodou Lagrangeova multiplikátoru

Máme $yx^2 = \lambda = xy^2$, z čehož plyne $x = y$. Dosazením do rovnice křivky dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{x} &= 2 \\ \frac{2}{x} &= 2 \\ x &= 1 & y &= 1 & \lambda &= 1 \end{aligned}$$

Spočteme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \lambda \cdot \frac{2}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \lambda \cdot \frac{2}{y^3} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1$$

$$D(1, 1) = \frac{2}{1^3} \cdot \frac{2}{1^3} - 1^2 = 4 - 1 = 3 > 0 \Rightarrow \text{je to extrém}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} > 0 \Rightarrow \text{je to minimum}$$

Funkce má v bodě $(1, 1)$ vázané lokální minimum.

Hledání extrémů metodou Lagrangeova multiplikátoru

Úloha

Nalezněte extrémů funkce $f(x, y) = x + y + 2$ vázané podmínkou $y^2 = x^3 + x^2$.

Řešení: Sestavíme funkci L :

$$L(x, y) = x + y + 2 + \lambda \cdot (y^2 - x^3 - x^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + \lambda \cdot (-3x^2 - 2x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + \lambda \cdot 2y$$

Řešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$1 + \lambda \cdot (-3x^2 - 2x) = 0 \quad 1 + \lambda \cdot 2y = 0 \quad y^2 = x^3 + x^2$$

Hledání extrémů metodou Lagrangeova multiplikátoru

Z druhé rovnice vyjádříme $\lambda = -\frac{1}{2y}$ a dosadíme do první:

$$1 - \frac{1}{2y} \cdot (-3x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot (-3x^2 - 2x)$$

Dosadíme do rovnice křivky

$$\left(\frac{-3x^2 - 2x}{2} \right)^2 = x^3 + x^2$$

$$\frac{9x^4 + 12x^3 + 4x^2}{4} = x^3 + x^2$$

$$9x^4 + 8x^3 = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{8}{9} \Rightarrow y_1 = 0 \quad y_2 = \frac{-3\frac{64}{81} + 2\frac{8}{9}}{2} = -\frac{8}{27}$$

$$A = (0, 0), B = \left(-\frac{8}{9}, -\frac{8}{27}\right)$$

Hledání extrémů metodou Lagrangeova multiplikátoru

Spočteme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \lambda \cdot (-6x - 2) \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$$

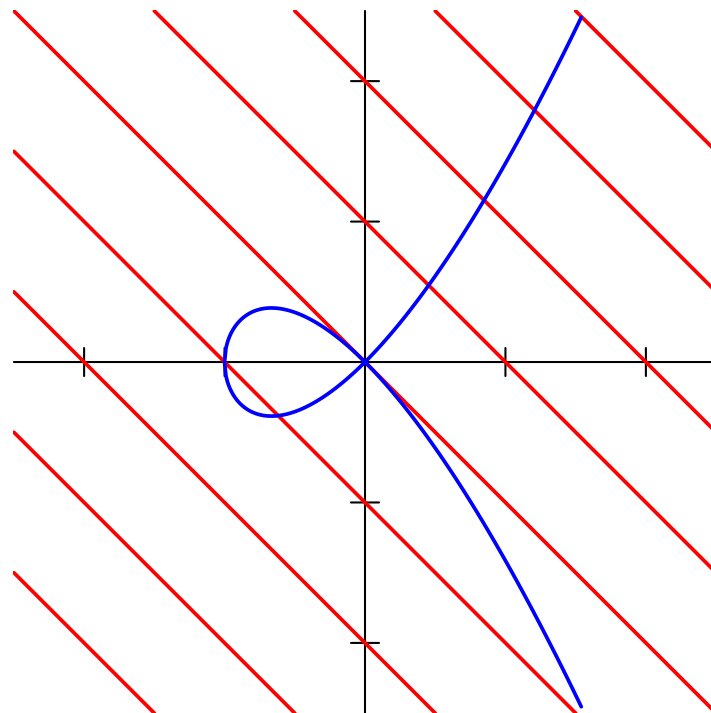
K bodu A neexistuje žádné λ . K bodu B máme $\lambda = -\frac{1}{-2 \cdot \frac{8}{27}} = \frac{27}{16}$.

$$D(B) = \frac{27}{16} \left(-6 \cdot \frac{-8}{9} - 2 \right) \cdot 2 \cdot \frac{27}{16} - 0^2 = \frac{27}{16} \cdot \frac{10}{3} \cdot 2 \cdot \frac{27}{16} > 0 \Rightarrow \text{je to extrém,}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} > 0 \Rightarrow \text{je to minimum.}$$

Funkce má v bodě $\left(-\frac{8}{9}, -\frac{8}{27}\right)$ vázané lokální minimum.

Hledání extrémů metodou Lagrangeova multiplikátoru



Úloha ze života na vázané extrém

Úloha

Jak má dítě utratit 200 Kč od maminky na pouti, když jedna jízda na kolotoči stojí 20 Kč, jedna porce sladkostí stojí 25 Kč, radost z kolotočů se popíše funkcí $r = 4j$, kde j je počet jízd, a radost z cukrovinek se popíše funkcí $r = \frac{35s}{s+3}$, kde s je počet sněžených sladkostí?

Řešení: Hledáme extrém funkce $f(j, s) = 4j + \frac{35s}{s+3}$ vázaný podmínkou $20 \cdot j + 25 \cdot s = 200$. Dosadíme $j = 10 - \frac{5}{4}s$ do funkce f :

$$h(j) = 4 \cdot \left(10 - \frac{5}{4}s\right) + \frac{35s}{s+3}$$

$$h'(j) = -5s + \frac{35(s+3)-35s}{(s+3)^2} = \frac{-5s^2-30s-45+105}{(s+3)^2} = -5 \cdot \frac{s^2+6s-12}{(s+1)^2}$$

Kořeny derivace: $s = -3 \pm \sqrt{21}$. Nás zajímá kladný kořen: $s \doteq 1,6$.
Nejlépe je peníze utratit za 8 jízd na kolotoči a 1,6 cukrovinek.