

Matematika 1

pro PEF PaE

10. Extrémy funkcí více proměnných

Přemysl Jedlička

Katedra matematiky, TF ČZU

Definice lokálních extrémů

Definice

Funkce f má v bodě A *lokální minimum* (resp. *lokální maximum*), pokud existuje okolí U bodu A takové, že pro každé X z U platí

$$f(X) \geq f(A), \quad \text{resp.} \quad f(X) \leq f(A)$$

Funkce f má v bodě A *ostré lokální minimum* (resp. *ostré lokální maximum*), pokud pro každé $X \neq A$ z U platí

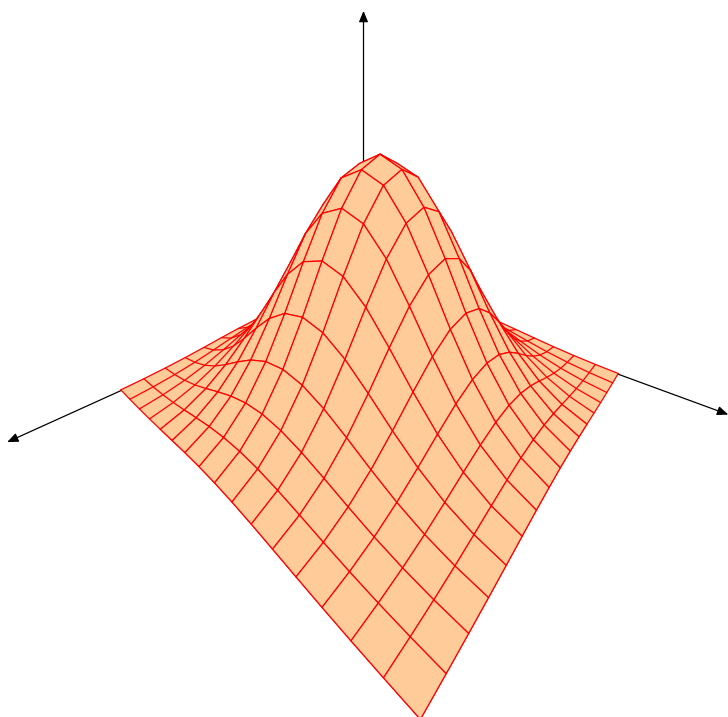
$$f(X) > f(A), \quad \text{resp.} \quad f(X) < f(A)$$

Tvrzení

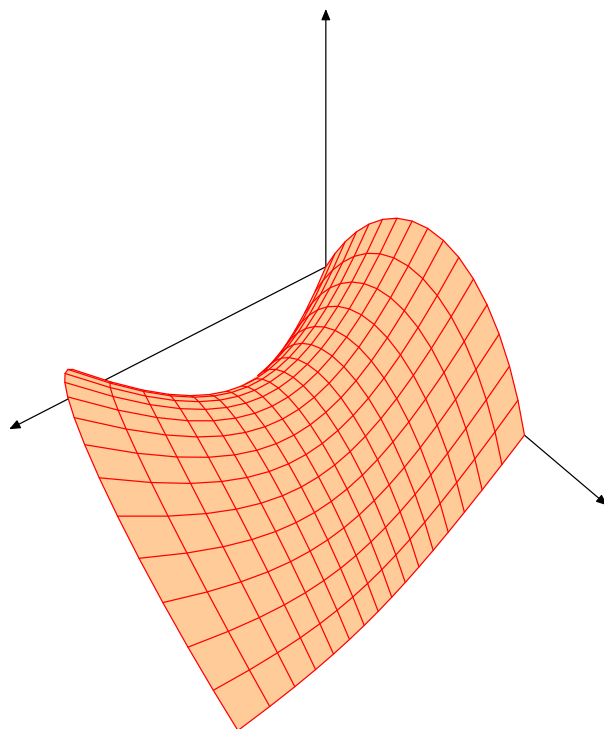
Funkce f má v bodě A *lokální extrém*, *jedině* pokud pro každé x_i platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0, \text{ anebo } \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) \text{ neexistuje.}$$

Ukázky modelových situací



maximum



sedlo

Kritérium pro extrémy

Věta

Bud' f funkce dvou proměnných mající v bodě A nulové druhé parciální derivace a spojitě druhé parciální derivace. Pak hodnota

$$D(A) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \right)^2$$

určuje kvalitu extrému následujícím způsobem:

- Je-li $D(A) > 0$, pak je v bodě A extrém, a to
 - ostré lokální minimum v případě, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) > 0$,
 - ostré lokální maximum v případě, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) < 0$.
- Je-li $D(A) < 0$, pak je A sedlovým bodem.
- Je-li $D(A) = 0$, pak metoda nic nevypovídá.

Hledání lokálních extrémů

Úloha

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + 6xy - y^2 + 5$.

Řešení: $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}^2$. Funkci parciálně zderivujeme:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6x + 6y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6x - 2y$$

Nalezneme body, kde jsou parciální derivace nulové:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x + 6y &= 0 & 6x - 2y &= 0 \\ 3x^2 - 6x + 6 \cdot (3x) &= 0 & -2y &= -6x \\ 3x^2 + 12x &= 0 & y &= 3x \\ x_1 = 0 \quad x_2 = -4 & & y_1 = 0 \quad y_2 = -12 \end{aligned}$$

Podezřelé body: $A = (0, 0)$ a $B = (-4, -12)$.

Hledání lokálních extrémů

Spočítáme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 6 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6$$

Určíme, zda-li je bod A extrém:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = -2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = 6$$

$$D(A) = -6 \cdot (-2) - 6^2 = 12 - 36 = -24 \Rightarrow \text{není to extrém.}$$

Určíme, zda-li je bod B extrém:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B) = 6 \cdot (-4) - 6 = -30 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(B) = -2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(B) = 6$$

$$D(B) = -30 \cdot (-2) - 6^2 = 60 - 36 = +24 \Rightarrow \text{je to extrém,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(B) < 0 \Rightarrow \text{je to maximum.}$$

Funkce f má jediný lokální extrém – ostré lokální maximum v bodě $(-4, -12)$.

Vlastnosti globálních extrémů

Věta (Weierstraß)

Funkce f definovaná na uzavřené omezené množině má vždy globální maximum a globální minimum.

Tvrzení

Globální extrémy jsou buďto lokálními extrémy, anebo hraničními body definičního oboru.

Fakt

Extrémy na hranici definičního oboru hledáme jakožto vázané extrémy.

Hledání globálních extrémů

Úloha

Nalezněte globální extrémy funkce $f(x, y) = \arcsin^2 x - \arccos^2 y$.

Řešení: $\mathcal{D}(f) = \langle -1, 1 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle$. Derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2 \arccos y \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Kořeny: $x = 0, y = 1$. Tento bod **není** vnitřním bodem $\mathcal{D}(f)$, takže funkce nemá žádný lokální extrém.

Extrémy na hranici:

Vázaný extrém pro $y = -1$:

$h(x) = \arcsin^2 x - \arccos^2 y = \arcsin^2 x - \pi^2$. $h'(x) = 2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, takže podezřelý bod má souřadnici $x = 0$. Označíme $A = (0, -1)$. Plus krajní body definičního oboru funkce $h(x)$: $B = (-1, -1)$, $C = (1, -1)$.

Hledání globálních extrémů

Vázaný extrém pro $y = 1$:

$$h(x) = \arcsin^2 x - \arccos^2 y = \arcsin^2 x - 0^2. \quad h'(x) = 2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

takže podezřelý bod má souřadnici $x = 0$. Označíme $D = (0, 1)$. Plus krajní body definičního oboru funkce $h(x)$: $E = (-1, 1)$, $F = (1, 1)$.

Vázaný extrém pro $x = -1$:

$$h(y) = \arcsin^2 x - \arccos^2 y = \frac{\pi^2}{4} - \arccos^2 y. \quad h'(y) = -2 \arccos y \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}},$$

takže podezřelý bod má souřadnici $y = 1$. Ten už máme, stejně jako druhý krajní bod definičního oboru.

Vázaný extrém pro $x = 1$:

$$h(y) = \arcsin^2 x - \arccos^2 y = \frac{\pi^2}{4} - \arccos^2 y. \quad h'(y) = -2 \arccos y \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}},$$

takže podezřelý bod má souřadnici $y = 1$. Ten už máme, stejně jako druhý krajní bod definičního oboru.

Hledání globálních extrémů

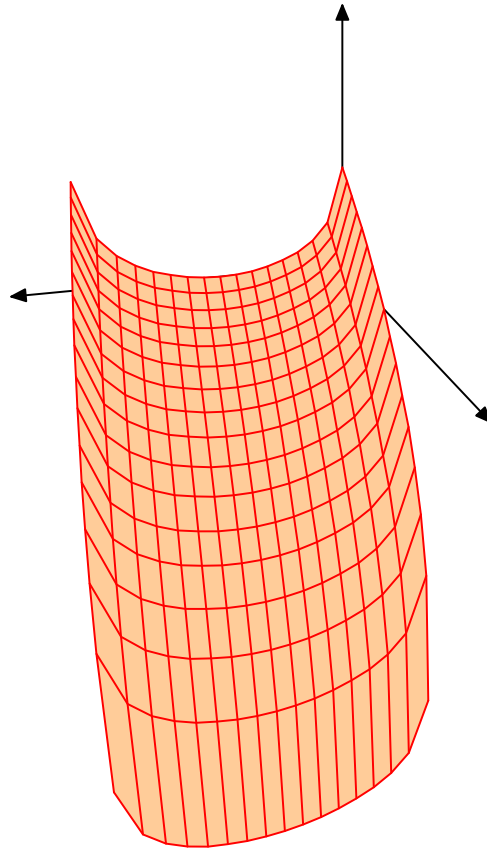
Určíme funkční hodnotu pro šest nalezených podezřelých bodů:

bod	funkční hodnota
$A = (0, -1)$	$\arcsin^2(0) - \arccos^2(-1) = 0 - \pi^2 = -\pi^2$
$B = (-1, -1)$	$\arcsin^2(-1) - \arccos^2(-1) = \frac{\pi^2}{4} - \pi^2 = -\frac{3}{4}\pi^2$
$C = (1, -1)$	$\arcsin^2(1) - \arccos^2(-1) = \frac{\pi^2}{4} - \pi^2 = -\frac{3}{4}\pi^2$
$E = (0, 1)$	$\arcsin^2(0) - \arccos^2(1) = 0 - 0 = 0$
$F = (-1, 1)$	$\arcsin^2(-1) - \arccos^2(1) = \frac{\pi^2}{4} - 0 = \frac{1}{4}\pi^2$
$G = (1, 1)$	$\arcsin^2(1) - \arccos^2(1) = \frac{\pi^2}{4} - 0 = \frac{1}{4}\pi^2$

V bodě $(0, -1)$ je ostré globální minimum, v bodech $(-1, 1)$ a $(1, 1)$ jsou neostrá globální maxima.

Hledání globálních extrémů

$$f(x, y) = \arcsin^2 x - \arccos^2 y$$



Hledání globálních extrémů

Úloha

Nalezněte globální extrémy funkce $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2$ na množině $x^2 + y^2 \leq 16$.

Řešení: Parciálně zderivujeme:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Parciální derivace jsou nulové jen v bodě $A = (0, 0)$.

Extrémy na hranici pomocí Lagrangeova multiplikátoru:

$$L(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = x^2 + 2\lambda x$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2\lambda y$$

Hledání globálních extrémů

Položíme rovno nule: $2y + 2\lambda y = 0$ má řešení $y = 0$ nebo $\lambda = -1$

① $y = 0$. Z rovnice kružnice $x^2 + 0^2 = 16$ dostanu body $B = (4, 0)$ a $C = (-4, 0)$.

② $\lambda = -1$. První rovnice $x^2 - 2x = 0$ má dvě řešení: $x = 0$ a $x = 2$. Dosazením do rovnice kružnice dostaneme

$$0^2 + y^2 = 16$$

$$y^2 = 16$$

$$y = \pm 4$$

$$2^2 + y^2 = 16$$

$$y^2 = 12$$

$$y = \pm 2\sqrt{3}$$

Čímž dostáváme body $D = (0, 4)$, $E = (0, -4)$, $F = (2, 2\sqrt{3})$ a $G = (2, -2\sqrt{3})$.

Hledání globálních extrémů

(x, y)	$f(x, y)$
A	0
B	$\frac{64}{3} = 21, \bar{3}$
C	$-\frac{64}{3} = -21, \bar{3}$
D	16
E	16
F	$\frac{44}{3} = 14, \bar{6}$
G	$\frac{44}{3} = 14, \bar{6}$

Ostré globální minimum je v bodě $(-4, 0)$, ostré globální maximum je v bodě $(4, 0)$.

