

Matematika 1

pro PEF PaE

9. Extrémy funkcí jedné proměnné

Přemysl Jedlička

Katedra matematiky, TF ČZU

Definice lokálních extrémů

Definice

Funkce f má v bodě a *lokální minimum* (resp. *lokální maximum*), pokud existuje okolí U bodu a takové, že pro každé x z U platí

$$f(x) \geq f(a), \quad \text{resp.} \quad f(x) \leq f(a)$$

Funkce f má v bodě a *ostré lokální minimum* (resp. *ostré lokální maximum*), pokud pro každé $x \neq a$ z U platí

$$f(x) > f(a), \quad \text{resp.} \quad f(x) < f(a)$$

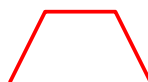
ostré

neostré

minimum



maximum



Kritéria lokálních extrémů

Věta

Funkce f má v bodě a lokální extrém, jedině pokud $f'(a) = 0$, anebo $f'(a)$ neexistuje.

Tvrzení

Nechť má funkce f v bodě a nulovou derivaci.

- *Pokud existuje U , levé okolí bodu a , kde $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in U$ a V , pravé okolí bodu a , kde $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in V$, pak v bodě a má funkce f lokální minimum.*
- *Pokud $f''(a) > 0$, pak má funkce f v bodě a lokální minimum.*

Důsledek

Pokud je $f'(a) = 0$, pak je v bodě a minimum, nebo maximum, nebo inflexní bod.

Hledání lokálních extrémů

Úloha

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = e^{\frac{x^2-x-10}{x}}$.

Řešení: $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Zderivujeme:

$$f'(x) = e^{\frac{x^2-x-10}{x}} \cdot \frac{(2x-1) \cdot x - (x^2-x-10) \cdot 1}{x^2} = e^{\frac{x^2-x-10}{x}} \cdot \frac{x^2-3x-10}{x^2}$$

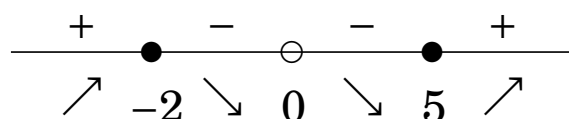
Určíme, kořeny derivace:

$$e^{\frac{x^2-x-10}{x}} \cdot \frac{x^2-3x-10}{x^2} = 0$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x - 5) \cdot (x + 2) = 0$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = -2$$



V bodě -2 má funkce f ostré lokální maximum.

V bodě 5 má funkce f ostré lokální minimum.

Hledání lokálních extrémů funkce

Úloha

Nalezněte lokální extrému funkce $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5$.

Řešení: $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}$. Dvakrát zderivujeme:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \quad f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

Hledáme kořeny derivace:

$$\begin{aligned} 4x^3 - 12x^2 &= 0 & f''(3) &= 36 \Rightarrow \\ 4x^2(x - 3) &= 0 & \text{V bodě 3 je lokální minimum} \\ x_1 = 0 \quad x_2 = 3 & & f''(0) &= 0 \Rightarrow ??? \end{aligned}$$

$$f'(1) = -8, f'(-1) = -16 \Rightarrow \text{bod 0 je inflexní bod}$$

Definice globálních extrémů

Definice

Funkce f má v bodě a *globální (absolutní) minimum*, resp. *maximum*, když pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$ platí

$$f(x) \geq f(a), \quad \text{resp.} \quad f(x) \leq f(a)$$

Funkce f má v bodě a *ostré globální (absolutní) minimum*, resp. *maximum*, když pro všechna $a \neq x \in \mathcal{D}(f)$ platí

$$f(x) > f(a), \quad \text{resp.} \quad f(x) < f(a)$$

Fakt

Funkce f má v bodě a *globální extrém*, jedině když je v a *lokální extrém*, anebo když je bod a *krajním bodem definičního oboru*.

Weierstrassova věta

Věta (Weierstraß)

Funkce f definovaná na uzavřené omezené množině má vždy globální maximum a globální minimum.



1815–1897

Karl Theodor Wilhelm Weierstraß

Hledání globálních extrémů

Úloha

Nalezněte globální extrémy funkce $f(x) = e^{x^2-2x} - x^2 + 2x$ na intervalu $\langle -5, 5 \rangle$.

Řešení: Nalezneme body s nulovou derivací:

$$f'(x) = e^{x^2-2x} \cdot (2x - 2) - 2x + 2 = (e^{x^2-2x} - 1) \cdot (2x - 2)$$

Hledáme kořeny derivace:

$$(e^{x^2-2x} - 1) \cdot (2x - 2) = 0$$

$$e^{x^2-2x} - 1 = 0$$

$$2x - 2 = 0$$

$$e^{x^2-2x} = 1$$

$$x = 1$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

Hledání globálních extrémů

Máme 3 body, kde může nastat lokální extrém: 0, 2, 1, plus máme dva krajní body definičního oboru: -5 , 5 . V těchto pěti bodech určíme funkční hodnoty.

x	$f(x)$
-5	$e^{35} - 35 \doteq 1586013452313395,73$
0	1
1	$e^{-1} + 1 \doteq 1,37$
2	1
5	$e^{15} - 15 \doteq 3269002,37$

V bodě -5 je ostré globální maximum. V bodech 0 a 2 jsou neostrá globální minima.

Příklad inspirovaný životem

Úloha: Vstupné na fotbal

V případě, že je cena vstupenky na stadión v Kč, přijde shlédnout ligové utkání $100 \cdot 10^{2 - \frac{v}{120}}$ diváků. Náklady na ligový zápas jsou 100.000 Kč. Maximální možná cena vstupenky je 1000 Kč. Jaká má být cena vstupenky, aby byla tržba co nejvyšší?

Řešení: Cílem je nalézt globální maximum zisku, jakožto funkce závislé na ceně vstupenky. Takže

cena vstupenky x

zisk y

hledám $\max y = f(x)$

definiční obor $\langle 0, 1000 \rangle$

Příklad inspirovaný životem

Sestavíme funkci:

zisk = počet vstupenek · cena vstupenky – náklady

$$f(x) = \left(100 \cdot 10^{2 - \frac{x}{120}}\right) \cdot x - 100000$$

Funkci zderivujeme

$$f'(x) = 100 \cdot \left(10^{2 - \frac{x}{120}} + 10^{2 - \frac{x}{120}} \cdot \ln 10 \cdot \frac{-1}{120} \cdot x\right) = 100 \cdot 10^{2 - \frac{x}{120}} \left(1 - \frac{\ln 10}{120} \cdot x\right)$$

Kořeny derivace:

$$1 - \frac{\ln 10}{120} \cdot x = 0$$

$$\frac{\ln 10}{120} \cdot x = -1$$

$$x = \frac{120}{\ln 10}$$

Funkční hodnoty:

cena	zisk
0	-100.000
$\frac{120}{\ln 10}$	91.721
1000	-100.000

Optimální cena je $\frac{120}{\ln 10}$ Kč, což je asi 52 Kč.