

Matematika 1

pro PEF PaE

8. Průběh funkce

Přemysl Jedlička

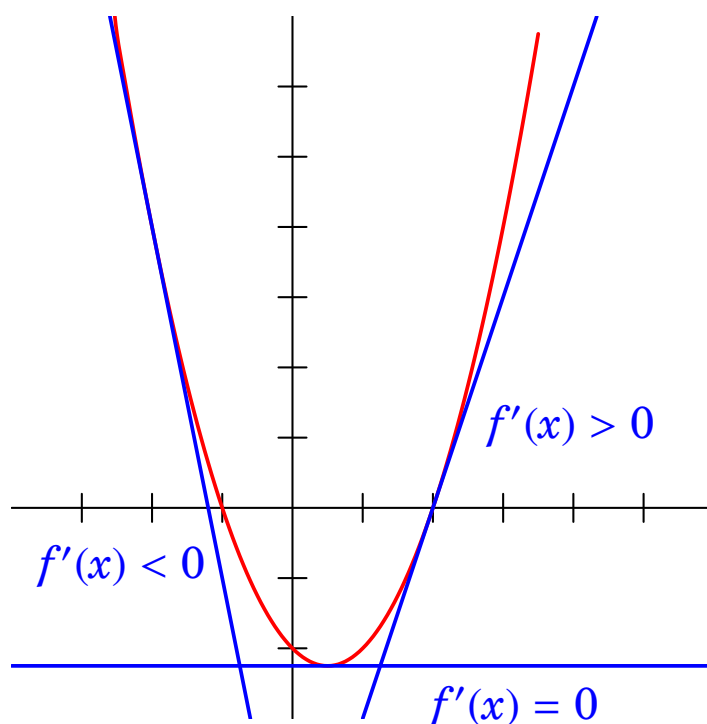
Katedra matematiky, TF ČZU

Intervaly monotonie

Věta

Bud' $f(x)$ funkce mající na otevřeném intervalu I spojitou derivaci.

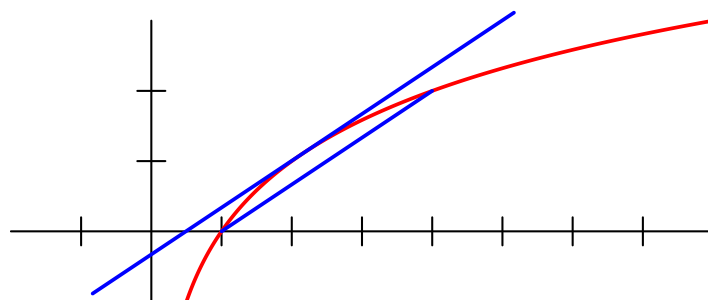
- *Pokud je $f(x)$ na I rostoucí, pak je $f'(x) \geq 0$ na I .*
- *Pokud je $f(x)$ na I klesající, pak je $f'(x) \leq 0$ na I .*



Věta o střední hodnotě

Věta (Lagrange)

Má-li funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitou derivaci, pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Důkaz věty o střední hodnotě

Důkaz.

Definujme funkci $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a) - f(a)$.

Platí $g(a) = g(b) = 0$ a $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Jsou dvě možnosti:

- ① $g(x) = 0$ na $\langle a, b \rangle$. Pak je $g'(x) = 0$ a $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ všude na $\langle a, b \rangle$.
- ② $g(x) \neq 0$. Pak funkce někde roste a někde klesá na (a, b) . Takže existují $\bar{a}, \bar{b}$ na (a, b) takové, že $g'(\bar{a}) < 0$ a $g'(\bar{b}) > 0$. Podle Bolzanovy věty existuje $c \in (a, b)$ takové, že $g'(c) = 0$. Tím pádem $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Podmínky pro monotonii

Věta

Bud' f funkce mající na intervalu I spojitou derivaci.

- Je-li $f'(x) > 0$ na I , pak je f na I rostoucí.
- Je-li $f'(x) < 0$ na I , pak je f na I klesající.
- Je-li $f'(x) = 0$ na I , pak je f na I konstantní.

Důkaz.

Rostoucí: mějme $f'(x) > 0$ na I a předpokládejme sporem, že existují $a < b$ v I splňující $f(a) \geq f(b)$. Pak $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq 0$ a podle věty o střední hodnotě existuje v (a, b) bod c mající $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq 0$. A to je spor s vlastností $f'(x) > 0$ na I . Takže f je rostoucí na I .

Obdobně se to dokáže pro klesající a konstantní. □

Hledání intervalů monotonie

Úloha

Nalezněte maximální intervaly monotonie funkce $\ln \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$.

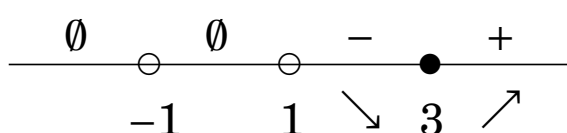
Řešení: Nejdříve nalezneme $\mathcal{D}(f)$: $\frac{x^2-2x+5}{x-1} > 0 \Rightarrow x \in (1, \infty)$

Poté zderivujeme:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2-2x+5}{x-1}} \cdot \frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+5)}{(x-1)^2} =$$

$$\frac{x-1}{x^2-2x+5} \cdot \frac{2x^2-4x+2-x^2+2x-5}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x^2-2x+5)(x-1)} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x^2-2x+5)(x-1)}$$

Kořeny derivace jsou 3 a -1. Nulové body jsou 3, -1 a 1.



Funkce je klesající na $(1, 3)$

Funkce je rostoucí na $\langle 3, \infty$

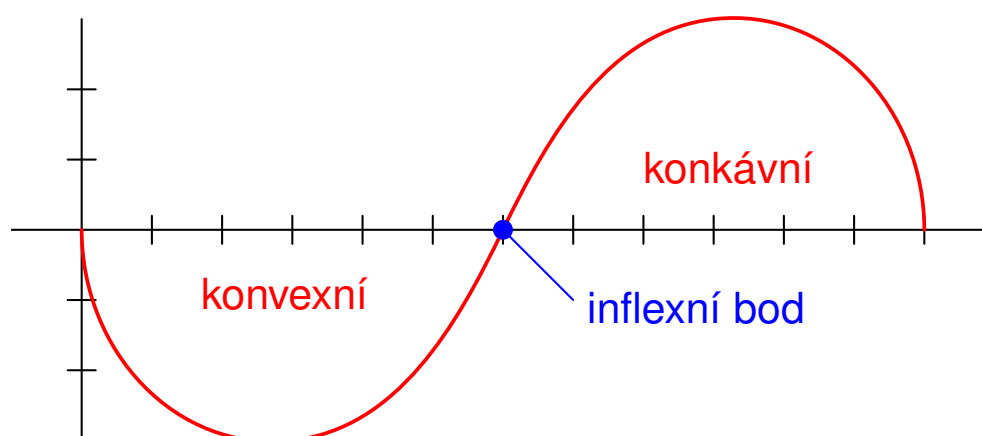
Konvexní a konkávní funkce

Definice

Řekneme, že funkce je na intervalu I *konvexní*, když pro všechna $a < c < b$ z intervalu I platí

$$f(c) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (c - a)$$

a že je *konkávní*, když platí totéž s obrácenou nerovností.



Podmínky pro konvexitu a konkávnost

Věta

Nechť má funkce $f(x)$ na intervalu I druhou derivaci.

- ① Je-li $f''(x) > 0$ na I , pak je $f(x)$ na I konvexní.
- ② Je-li $f(x)$ na I konvexní, pak je $f''(x) \geq 0$ na I .
- ③ Je-li $f''(x) < 0$ na I , pak je $f(x)$ na I konkávní.
- ④ Je-li $f(x)$ na I konkávní, pak je $f''(x) \leq 0$ na I .
- ⑤ Je-li $f''(x) = 0$ na I , pak je $f(x)$ na I lineární.

Důsledek

Má-li funkce $f(x)$ v bodě a inflexní bod, pak je $f''(a) = 0$, anebo funkce nemá v bodě a druhou derivaci.

Příklad na konvexitu a konkávnosti

Úloha

Nalezněte maximální intervaly monotonie, konvexity a konkávnosti funkce

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Řešení: $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{0 - 1 \cdot 2 \cdot (1-x) \cdot (-1)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f''(x) = \frac{0 - 2 \cdot 3 \cdot (1-x)^2 \cdot (-1)}{(1-x)^6} = \frac{6}{(1-x)^4}$$

Nulovým bodem derivace i druhé derivace je 1.

$$\begin{array}{c} + \quad \quad - \\ \hline \nearrow \quad \circ \quad \searrow \\ \quad \quad 1 \end{array}$$

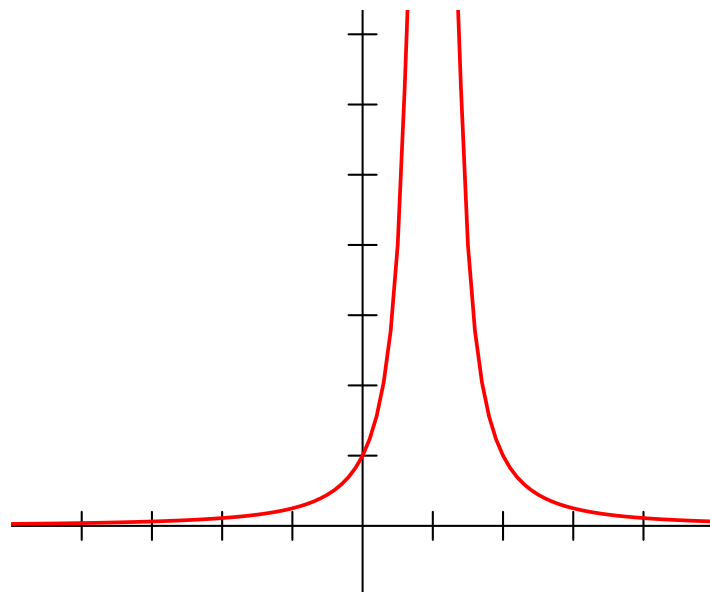
Funkce je rostoucí na $(-\infty, 1)$

Funkce je klesající na $(1, \infty)$

Příklad na konvexitu a konkávnosti

$$\begin{array}{c} + \quad \quad + \\ \hline \cup \quad \circ \quad \cup \\ \quad \quad 1 \end{array}$$

Funkce je konvexní
na $(-\infty, 1)$ a na $(1, \infty)$.



Příklad na konvexitu a konkávnosti

Úloha

Nalezněte maximální intervaly monotonie, konvexity a konkávnosti funkce

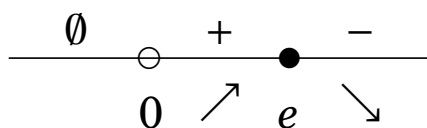
$$f(x) = \frac{\ln x^9}{x}$$

Řešení: $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$

$$f'(x) = \left(9 \cdot \frac{\ln x}{x}\right)' = 9 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = 9 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = 9 \cdot \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = 9 \cdot \frac{-x - 2x + 2x \ln x}{x^4} = 9 \cdot \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

Kořeny derivace: $1 - \ln x = 0 \Rightarrow x = e$.



Funkce je rostoucí na $(0, e)$

Funkce je klesající na $\langle e, \infty)$

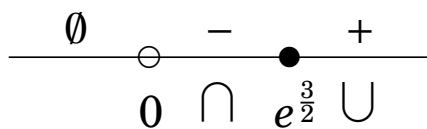
Příklad na konvexitu a konkávnosti

Kořeny druhé derivace:

$$2 \ln x - 3 = 0$$

$$\ln x = \frac{3}{2}$$

$$x = e^{\frac{3}{2}}$$



Funkce je konkávní na $(0, e^{\frac{3}{2}})$.

Funkce je konvexní na $\langle e^{\frac{3}{2}}, \infty)$.

