Matematika 1
pro PEF PaE

7. Tečny a tečné roviny

Přemysl Jedlička

Katedra matematiky, TF ČZU

Tečny a normály grafů funkcí

Definice

Buď f funkce mající v bodě a derivaci. *Tečna* grafu funkce f v bodě a je přímka procházející bodem $[a, f(a)]$ a mající směrnici rovnu $f'(a)$. *Normála* grafu funkce f v bodě a je přímka procházející bodem $[a, f(a)]$ kolmá k tečně v tomto bodě.

Tvrzení

Je-li k směrnice tečny, pak $-\dfrac{1}{k}$ je směrnice příslušné normály.

Důkaz.

Směrnice k znamená, že směrový vektor přímky je $(1, k)$. Kolmý vektor je $(k, -1)$. Vydělíme, aby první souřadnice byla 1 a dostaneme směrový vektor normály $\left(1, -\frac{1}{k}\right)$. $\square$

Rovnice přímek

Fakt

Rovnice přímky o směrnici k, procházející bodem $[a, b]$ je

$$(y - b) = k \cdot (x - a)$$

Věta

Buď f funkce mající v bodě a derivaci. Pak rovnice tečny f v a je

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

a rovnice normály f v a je

$$y - f(a) = \frac{a - x}{f'(a)}.$$

Příklad na tečnu ke grafu funkce

Úloha

Najděte rovnice tečny a normály ke grafu funkce $y = \sin 2x$ s dotykovým bodem $T = [\frac{\pi}{8}, ?]$.

Řešení: $y_T = \sin(2 \cdot x_T) = \sin(2 \cdot \frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$(\sin 2x)' = \cos 2x \cdot 2 = 2 \cos 2x$

$$k_t = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \qquad k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$t: \quad y - y_T = k_t(x - x_T) \qquad n: \quad y - y_T = k_n(x - x_T)$$

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \qquad y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$$

Příklad na hledání rovnoběžných tečen

Úloha

Nalezněte tečny ke grafu funkce $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x + 2$ rovnoběžné s přímkou $p : y = -x + 3$.

Řešení: Derivace funkce je $x^2 - 2x - 4$. Směrnice přímky p je -1. Rovnoběžné přímky mají shodné směrnice.

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2x - 4 &= -1 \\
x^2 - 2x - 3 &= 0 \\
(x-3)(x+1) &= 0 \qquad\qquad x_1 = 3, \quad x_2 = -1
\end{aligned}
$$

Dopočítáme ypsilonové souřadnice: $y_1 = -10$, $y_2 = \frac{16}{3}$. Máme dva body dotyku $T_1 = [3, -10]$ a $T_2 = [-1, \frac{16}{3}]$. Rovnice tečen:

$$
t_1: \quad y + 10 = -1 \cdot (x - 3) \qquad\qquad t_2: \quad y - \frac{16}{3} = -1 \cdot [x - (-1)]
$$

$$
y = -x - 7 \qquad\qquad\qquad y = -x + \frac{13}{3}
$$

Rovnice tečen procházejících obecným bodem

Úloha

Napište rovnice tečen ke grafu $y = \frac{x+9}{x+5}$, procházející bodem $A = [0, 0]$.

Řešení: Derivace funkce je $\frac{1\cdot(x+5)-(x+9)\cdot 1}{(x+5)^2} = \frac{-4}{(x+5)^2}$. Po dosazení bodu A dostaneme dvě rovnice o dvou neznámých: x_T, y_T:

$$
\begin{aligned}
y - y_T &= f'(x_T)(x - x_T) & \qquad y_T &= f(x_T) \\
0 - y_T &= \frac{-4}{(x_T+5)^2} \cdot (0 - x_T) & \qquad y_T &= \frac{x_T+9}{x_T+5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{x_T+9}{x_T+5} &= \frac{4x_T}{(x_T+5)^2} \\
-(x_T+9)(x_T+5) &= 4x_T \\
-x_T^2 - 14x_T - 45 &= 4x_T \\
x_T^2 + 18x_T + 45 &= 0
\end{aligned}
$$

Rovnice tečen procházejících obecným bodem

Diskriminant $D = 18^2 - 4 \cdot 1 \cdot 45 = 324 - 180 = 144$, $\sqrt{D} = 12$.

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm 12}{2} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = -3 \\ x_2 = -15 \end{array} \right. \qquad y_1 = \tfrac{6}{2} = 3, \quad y_2 = \tfrac{-6}{-10} = \tfrac{3}{5}$$

V bodě $T_1 = [-3, 3]$ je směrnice $k_1 = \frac{-4}{2^2} = -1$. V bodě $T_2 = \left[-15, \frac{3}{5}\right]$ je směrnice $k_2 = \frac{-4}{(-10)^2} = -\frac{1}{25}$. Rovnice tečen jsou:

$$t_1: \quad y - y_1 = k_1 \cdot (x - x_1) \qquad t_2: \quad y - y_2 = k_2 \cdot (x - x_2)$$
$$y - 3 = -1 \cdot [x - (-3)] \qquad y - \tfrac{3}{5} = -\tfrac{1}{25}[x - (-15)]$$
$$x + y = 0 \qquad x + 25y = 0$$

Tečna k implicitní funkci

Úloha

Napište rovnici tečny a normály ke grafu $x \cdot 2^y - y \cdot e^x + 2x + 2 = 0$ v bodě $T = [0, 2]$.

Řešení: Zderivujeme implicitní funkci:

$$(1 \cdot 2^y + x \cdot 2^y \cdot \ln 2 \cdot y') - (y' \cdot e^x + y \cdot e^x) + 2 = 0$$
$$y' \left(x \cdot 2^y \cdot \ln 2 - e^x\right) + (2^y - y \cdot e^x + 2) = 0$$
$$y' = -\frac{2^y - y \cdot e^x + 2}{x \cdot 2^y \cdot \ln 2 - e^x}$$

$k_t = -\frac{2^2 - 2 \cdot e^0 - 2}{0 \cdot 2^2 \cdot \ln 2 - e^0} = 0$, takže směrnice normály neexistuje
Tečna je vodorovná přímka $y = 2$, popř. $y - 2 = 0 \cdot (x - 0)$.
Normála je svislá přímka $x = 0$.

Tečna k implicitní funkci vodorovná s přímkou

Úloha

Nalezněte tečny ke grafu $y^2 = x^3 - x + 1$ vodorovné s $x - y = -7$.

Řešení: Rovnice přímky je $y = x + 7$, takže směrnice je 1.

Derivací funkce dostaneme $2y \cdot y' = 3x^2 - 1$. Dosadíme $y' = 1$.

$$2 \cdot y \cdot 1 = 3x^2 - 1$$
$$y = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

$$y^2 = x^3 - x + 1$$
$$\left(\frac{3x^2 - 1}{2}\right)^2 = x^3 - x + 1$$
$$\tfrac{9}{4}x^4 - \tfrac{6}{4}x^2 + \tfrac{1}{4} = x^3 - x + 1$$
$$9x^4 - 6x^2 + 1 = 4x^3 - 4x + 4$$
$$9x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x - 3 = 0$$
$$(x - 1)(x + 1)(9x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$x_{1,2} = \pm 1$$

Tečna k implicitní funkci vodorovná s přímkou

$x_1 = 1$, pak $y = \frac{3 \cdot 1^2 - 1}{2} = 1$, $T_1 = [1, 1]$.

$$t_1 : (y - 1) = 1 \cdot (x - 1)$$
$$y = x$$

$x_2 = -1$, pak $y = \frac{3 \cdot (-1)^2 - 1}{2} = 1$, $T_2 = [-1, -1]$.

$$t_2 : (y - 1) = 1 \cdot [x - (-1)]$$
$$y = x + 2$$

Tečné roviny a normály

Definice

Buď $F = 0$ graf plochy v $\mathbf{R}^3$ a T bod na této ploše. *Tečná plocha* grafu f v bodě T je rovina procházející bodem T a s normálovým vektorem $\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(T), \frac{\partial F}{\partial y}(T), \frac{\partial F}{\partial z}(T)\right)$. *Normála* grafu f v bodě T je přímka procházející bodem T a směrem $\vec{n}$.

Pozorování

Definice odpovídá definici pro $\mathbf{R}^2$: normálový vektor tečny je $(f'(a), -1)$, což je násobek vektoru $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(a, f(a)), \frac{\partial F}{\partial y}(a, f(a))\right)$, neboť podle věty o parciálních derivacích složené funkce máme

$$f'(x) = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \qquad \text{a} \qquad -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -1$$

Normálový vektor u grafů zadaných explicitně

Tvrzení

Nechť má reálná funkce dvou proměnných f spojité parciální derivace v bodě A. Pak normálový vektor tečné roviny ke grafu f v bodě A je

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A), -1\right).$$

Důkaz.

Graf $z = f(x,y)$ lze napsat ve tvaru $f(x,y) - z = 0$. Označme $F(x,y,z) = f(x,y) - z$. Pak $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$ a $\frac{\partial F}{\partial z} = -1$. $\square$

Příklad na tečnou rovinu

Úloha

Napište rovnici tečné roviny a normály grafu funkce $z = e^{x-y} \cdot y$ v bodě $T = [2, 1, ?]$.

Řešení: $T_z = e^{2-1} \cdot 1 = e$. Parciálně zderivujeme funkci:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-y} \cdot 1 \cdot y \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(T) = e^{2-1} \cdot 1 = e$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x-y} \cdot (-1) \cdot y + e^{x-y} \cdot 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(T) = e^{2-1} \cdot (-1) + e^{2-1} = 0$$

Normálový vektor je $(e, 0, -1)$.

$$\begin{aligned} \rho: \ e \cdot (x - x_T) + 0 \cdot (y - y_T) - 1 \cdot (z - z_T) &= 0 \\ e \cdot (x - 2) - (z - e) &= 0 \\ ex - z - 2 + e &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} n: \ x &= e \cdot t + 2 \\ y &= 0 \cdot t + 1 \\ z &= -t + e \quad t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Tečná rovina k implicitní funkci

Úloha

Napište rovnice tečné roviny a normály ke grafu $\sin(xy) + y\cos(zx) = 1$ v bodě $T = [\pi, 1, 2]$.

Řešení: Spočteme parciální derivace

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y\cos(xy) - yz\sin(zx) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(T) = 1 \cdot \cos(\pi) - 2 \cdot \sin(2\pi) = -1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x\cos(xy) + \cos(zx) \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(T) = \pi \cdot \cos(\pi) + \cos(2\pi) = -\pi + 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -xy\sin(zx) \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(T) = -2\pi \cdot \sin(2\pi) = 0$$

Normálový vektor je $(-1, 1 - \pi, 0)$.

$$\begin{aligned} \rho: \ -1(x - \pi) + (1 - \pi)(y - 1) + 0 &= 0 \\ -x + (1 - \pi)y + 2\pi - 1 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} n: \ x &= -t + \pi \\ y &= (1 - \pi) \cdot t + 1 \\ z &= 2 \qquad t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Tečná rovina rovnoběžná s rovinou

Úloha

Nalezněte tečné roviny grafu $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 36$ rovnoběžné s rovinou $2x + y + 6z = 5$.

Řešení: Spočteme parciální derivace: $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{9}$ $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{9}$ a $\frac{\partial F}{\partial z} = 2z$.
Normálový vektor má směr $(2, 1, 6)$.

$$\left(\frac{2x}{9}, \frac{2y}{9}, 2z\right) = k \cdot (2, 1, 6)$$

$$\begin{aligned} \frac{2x}{9} &= 2k & &\Rightarrow y = 9k \\ \frac{2y}{9} &= k & &\Rightarrow x = \frac{9}{2}k \\ 2z &= 6k & &\Rightarrow z = 3k \end{aligned}$$

Tečná rovina rovnoběžná s rovinou

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + z^2 &= 36 \\ \frac{(9k)^2}{9} + \frac{\left(\frac{9}{2}k\right)^2}{9} + (3k)^2 &= 36 \\ 9k^2 + \tfrac{9}{4}k^2 + 9k^2 &= 36 \\ \tfrac{81}{4}k^2 &= 36 \\ k^2 &= \tfrac{16}{9} & k_{1,2} &= \pm\tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

$x_1 = 9 \cdot \frac{4}{3} = 12, y_1 = \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{3} = 6, z_1 = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$

$$\begin{aligned} \rho_1 : 2 \cdot (x - 12) + 1 \cdot (y - 6) + 6 \cdot (z - 4) &= 0 \\ 2x + y + 6z - 54 &= 0 \end{aligned}$$

$x_2 = 9 \cdot (-\frac{4}{3}) = -12, y_2 = \frac{9}{2} \cdot (-\frac{4}{3}) = -6, z_2 = 3 \cdot (-\frac{4}{3}) = -4$

$$\begin{aligned} \rho_2 : 2 \cdot (x + 12) + 1 \cdot (y + 6) + 6 \cdot (z + 4) &= 0 \\ 2x + y + 6z + 54 &= 0 \end{aligned}$$