Matematika 1
pro PEF PaE

6. Použití derivací při výpočtu limit a asymptot

Přemysl Jedlička

Katedra matematiky, TF ČZU

L'Hospitalovo pravidlo

Věta (L'Hospitalovo pravidlo)

Buďte f, g dvě funkce splňující buďto $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, anebo $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. Pak platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

za předpokladu, že druhá limita existuje.

markýz Guillaume François Antoine de l'Hôpital
1661–1704

Limita vypočtená l'Hospitalovým pravidlem

Úloha

Spočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - e^x}{\operatorname{tg} x}$.

Řešení: Ověříme podmínky l'Hospitalova pravidla

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}(e^{2x} - e^x) = e^0 - e^0 = 0 \\ &\lim_{x\to 0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 0 = 0 \end{aligned}\right\} \text{typ } \frac{0}{0} \Rightarrow \text{ lze použít l'Hospital}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x} - e^x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{2 \cdot e^0 - e^0}{\frac{1}{(\cos 0)^2}} = \frac{2-1}{1} = 1$$

Limita vypočtená l'Hospitalovým pravidlem

Úloha

Spočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^x - \sin x}{\cos^2 x - 1}$

Řešení: Jedná se o limitu typu $\frac{0}{0}$, takže použijeme l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^x - \sin x}{\cos^2 x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + xe^x - \cos x}{-2\cos x \sin x}$$

Jedná se opět o limitu typu $\frac{0}{0}$, takže znovu použijeme l'Hospitalovo pravidlo:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^x + xe^x + \sin x}{-2(\cos^2 x - \sin^2 x)} = \frac{1 + 1 + 0 \cdot 1 + 0}{-2 \cdot (1 - 0)} = -1$$

Limita vypočtená l'Hospitalovým pravidlem

Úloha

Spočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

Řešení: Limitu upravíme:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}}$$

Jedná se o limitu typu $\frac{\infty}{\infty}$, takže lze použít l'Hospitalovo pravidlo:

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^0 = 1$$

Protipříklad na l'Hospitalovo pravidlo

Úloha

Spočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sin x}{x}$

Řešení: Jedná se o limitu typu $\frac{0}{0}$, takže zkusíme použít l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} \neq \lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1} = \text{neexistuje}$$

Budeme tedy muset spočítat limitu pomocí úprav:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 1 + 0 = 1$$

Asymptoty funkcí

Definice

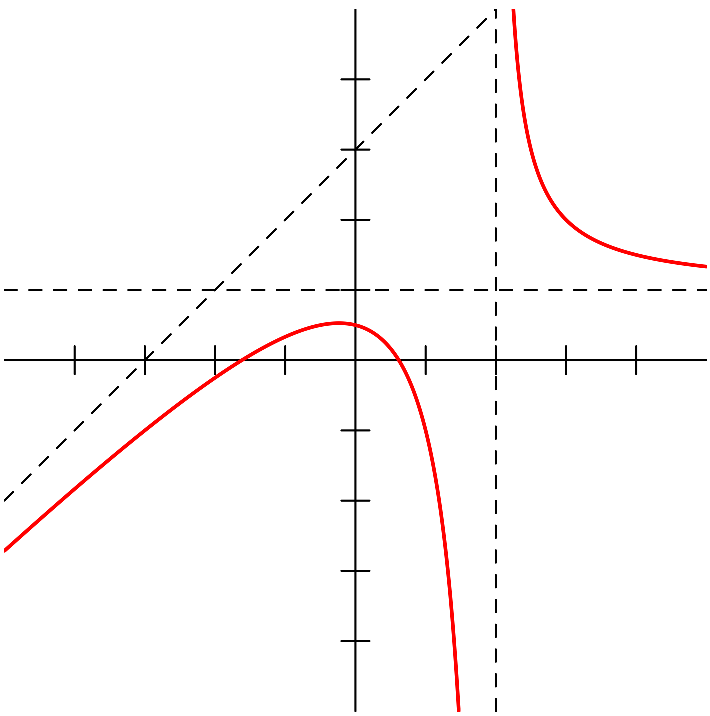
Přímku p nazveme *asymptotou* funkce f, pokud je limita vzdálenosti přímky p od grafu funkce f (když jdeme po přímce p do nekonečna) rovna 0.

Fakt

Rozeznáváme tři druhy asymptot:

- *svislé asymptoty, které mají rovnici* $x = a$, *pro nějaké* $a \in \mathbf{R}$;
- *vodorovné asymptoty, které mají rovnici* $y = b$, *pro nějaké* $b \in \mathbf{R}$;
- *šikmé asymptoty, které mají rovnici* $y = kx + q$, *pro nějaká* $k \neq 0$ *a* $q \in \mathbf{R}$.

Asymptoty funkcí



Svislá asymptota $x = 2$

Vodorovná asymptota $y = 1$

Šikmá asymptota $y = x + 3$

Počítání asymptot

Tvrzení

Přímka $x = a$ *je asymptotou grafu spojité funkce* f *tehdy a jen tehdy, pokud* $a \notin \mathcal{D}(f)$ *a* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ *nebo* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$.

Věta

Přímka $x = kx + q$ *je asymptotou funkce* f *v nekonečnu právě tehdy, když platí*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{a zároveň} \quad \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = q.$$

Důsledek

Přímka $x = b$ *je asymptotou funkce* f *právě tehdy, když platí* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ *nebo* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

Výpočet asymptot

Úloha

Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 5}{1 - x}$

Řešení: $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R} \smallsetminus 1$, takže prozkoumáme bod 1.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{5}{0^-} = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$, takže máme asymptotu $x = 1$.

Asymptota v nekonečnech je $y = -x$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x + 5}{x - x^2} = -1$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2 - x + 5}{1 - x} - (-1)\frac{x(1 - x)}{1 - x} \right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x + 5 + x - x^2}{1 - x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{1 - x} = 0$$

Výpočet asymptot

Úloha

Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = x \cdot \operatorname{arccotg} x$

Řešení: $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}$, takže funkce nemá žádné svislé asymptoty.

Asymptota v nekonečnu je $y = 1$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x \operatorname{arccotg} x}{x} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$$

$$q = \lim_{x\to\infty} (x \operatorname{arccotg} x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

Asymptota v minus nekonečnu je $y = \pi x + 1$.

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{x \operatorname{arccotg} x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} (x \operatorname{arccotg} x - \pi x) = \lim_{x\to-\infty} x\,(\operatorname{arccotg} x - \pi) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x - \pi}{\frac{1}{x}} = 1$$