

Matematika 1

pro PEF PaE

5. Derivace funkcí více proměnných

Přemysl Jedlička

Katedra matematiky, TF ČZU

Definice parciální derivace

Definice

Řekneme, že funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ má v bodě $(a_1, \dots, a_n)$ *parciální derivaci* podle proměnné x_i , pro $1 \leq i \leq n$, rovnou hodnotě A , pokud platí

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \Delta x, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{\Delta x} = A$$

Definice

Symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$ značíme funkci n proměnných, která každému bodu $(a_1, \dots, a_n)$ vrátí hodnotu parciální derivace podle x_i v příslušném bodě.

Výpočet parciálních derivací

Fakt

Funkční předpis parciální derivace funkce f podle x_i se spočte derivováním, při kterém se derivuje podle x_i a všechny ostatní proměnné se považují za konstanty.

Úloha

Spočtěte parciální derivace funkce $f(x, y) = \log_y(3x - y)$.

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{(3x - y) \ln y} \cdot (3 - 0) = \frac{3}{(3x - y) \ln y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\ln(3x - y)}{\ln y} = \frac{\frac{1}{3x - y} \cdot (-1) \cdot \ln y - \ln(3x - y) \cdot \frac{1}{y}}{\ln^2 y} = \frac{-\frac{\ln y}{3x - y} - \frac{\ln(3x - y)}{y}}{\ln^2 y}$$

Parciální derivace složených funkcí

Věta

Bud' f funkce k proměnných, která má spojité parciální derivace na nějakém okolí U a bud'te $u_1, \dots, u_k$ funkce n proměnných mající spojité parciální derivace na nějaké oblasti V a splňující $u_i(V) \subseteq U$, pro $1 \leq i \leq k$. Potom má složená funkce

$$h(x_1, \dots, x_n) = f(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_k(x_1, \dots, x_n))$$

spojité parciální derivace na oblasti V a platí, pro všechna $1 \leq i \leq n$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$

Parciální derivace složených funkcí

Úloha

Napište parciální derivaci podle x funkce $h(x, y) = (x \cdot \sin y)^{y \cdot \sin x}$.

Řešení: V návaznosti na předchozí větu máme $u_1(x, y) = x \cdot \sin y$, $u_2(x, y) = y \cdot \sin x$ a $f(u_1, u_2) = u_1^{u_2}$. Takže

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ &= (u_2 \cdot u_1^{u_2-1}) \cdot \sin y + (u_1^{u_2} \cdot \ln u_1) \cdot (y \cdot \cos x) \\ &= y \cdot \sin x \cdot (x \cdot \sin y)^{y \cdot \sin x - 1} \cdot \sin y + (x \cdot \sin y)^{y \cdot \sin x} \cdot \ln(x \cdot \sin y) \cdot y \cdot \cos x \\ &= y \cdot (x \cdot \sin y)^{y \cdot \sin x} \left(\frac{\sin x}{x} + \ln(x \cdot \sin y) \cdot \cos x \right) \end{aligned}$$

Parciální derivace druhého řádu

Definice

Parciální derivací druhého řádu funkce f podle x_i a x_j rozumíme parciální derivaci podle x_j parciální derivace podle x_i funkce f . Tuto funkci značíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Fakt

Máme čtyři parciální derivace druhého řádu u funkcí dvou proměnných:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y}$$

Rovnost smíšených druhých parciálních derivací

Věta

Má-li funkce f spojité obě parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ v bodě (a, b) , pak platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a + \Delta x, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a + \Delta x, b)}{\Delta y} - \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta y}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x}}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{\Delta y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \quad \square \end{aligned}$$

Počítání druhých parciálních derivací

Úloha

Spočtěte všechny druhé parciální derivace funkce $f(x, y) = \frac{y}{x}$.

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} y \cdot \frac{1}{x} = -\frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{x} \cdot y = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} -y \cdot x^{-2} = 2yx^{-3} = \frac{2y}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{x^2} \cdot y \right) = -\frac{1}{x^2}$$

Implicitní funkce

Definice

Grafem v $\mathbf{R}^n$ zadaným explicitně se rozumí množina bodů $(x_1, \dots, x_n)$ splňující $x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$ pro nějakou funkci f .

Grafem v $\mathbf{R}^n$ zadaným implicitně se rozumí množina bodů $(x_1, \dots, x_n)$, splňující $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ pro nějakou funkci F .

Věta

Nechť je $F(x_1, \dots, x_n)$ funkce n proměnných a nechť je $F(a_1, \dots, a_n) = 0$. Předpokládejme, že má F na okolí bodu a všechny parciální derivace spojitě až do řádu n a že $\frac{\partial F}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n) \neq 0$. Pak existuje okolí U bodu $(a_1, \dots, a_{n-1})$ a funkce f ($n - 1$) proměnných mající spojitě parciální derivace až do řádu n taková, že $F(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$ pro všechny body $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in U$.

Příklad implicitní funkce

Příklad

Mějme graf $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Pro $y > 0$ platí $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Pro $y < 0$ platí $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

V okolí bodů s $y = 0$ platí $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$ a neexistuje žádná explicitní funkce popisující graf funkce implicitní.

Derivace implicitní funkce

Tvrzení

Bud' F funkce n proměnných a f funkce $n - 1$ proměnných splňující $F(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$ na nějakém okolí bodu $(a_1, \dots, a_{n-1})$. Pokud má F spojité všechny parciální derivace, pak platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_{n-1}) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n)}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n)}$$

pro všechna $1 \leq i \leq n - 1$, kde $a_n = f(a_1, \dots, a_{n-1})$.

Důkaz věty o derivaci implicitní funkce

Důkaz.

Zderivujeme rovnici grafu podle x_i :

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_n)) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} &= 0 \\ 0 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot 1 + \dots + 0 + \frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} &= - \frac{\partial F}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f}{\partial x_i} &= - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial x_n}} \end{aligned}$$



Derivace implicitní funkce

Úloha

Spočtěte parciální derivace explicitní funkce ke grafu $x^{y-z} - 1 = 0$.

Řešení: $\frac{\partial F}{\partial x} = (y - z) \cdot x^{y-z-1}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = x^{y-z} \cdot \ln x$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -x^{y-z} \cdot \ln x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{(y - z)x^{y-z-1}}{-x^{y-z} \ln x} = \frac{y - z}{x \ln x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^{y-z} \ln x}{-x^{y-z} \ln x} = 1$$

Alternativně lze výpočet provést úvahou, že $z = f(x, y)$

$$x^{y-z} - 1 = 0$$

$$e^{(y-z) \ln x} - 1 = 0$$

$$x^{y-z} \cdot \ln x \cdot \left(1 - \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

$$e^{(y-z) \ln x} \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \ln x + (y - z) \cdot \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$1 - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$-\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \ln x + (y - z) \cdot \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y-z}{x \ln x}$$