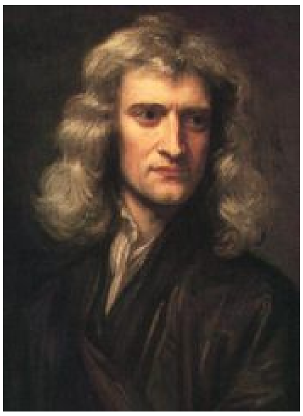
Matematika 1
pro PEF PaE

4. Derivace funkcí jedné proměnné

Přemysl Jedlička

Katedra matematiky, TF ČZU

Derivace ve fyzice



Isaac Newton
1643–1727

Průměrná rychlost

$$v = \frac{s}{t}$$

Okamžitá rychlost

$$v = \lim_{dt \to 0} \frac{ds}{dt}$$

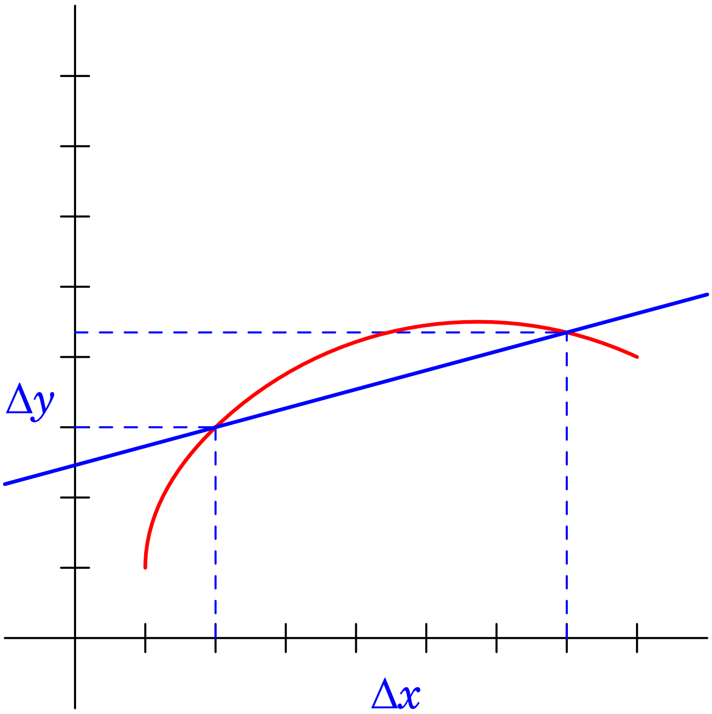
ds

Derivace v geometrii

Gottfried Wilhelm Leibniz
1646–1716

Směrnice tečny

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Derivace funkce

Definice

Buď f reálná funkce spojitá v bodě a. Derivace funkce f v bodě a, značená $f'(a)$, je definována jako

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Definice

Buď f reálná funkce. Derivace funkce $f(x)$ je reálná funkce $f'(x)$, neboli funkce, která každému bodu přiřadí derivaci v příslušném bodě.

Nejjednodušší derivace

Příklad

$$x' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Příklad

$$K' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{K - K}{\Delta x} = 0$$

Derivace mocnin

Příklad

$$\left(x^2\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Příklad

$$\left(x^3\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2$$

Fakt

Pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$ platí $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$.

Derivace goniometrických funkcí

Příklad

$$\begin{aligned}\sin' x &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos\Delta x+\cos x\cdot\sin\Delta x-\sin x}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cdot 1+\cos x\cdot\Delta x-\sin x}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x\cdot\Delta x}{\Delta x}=\cos x\end{aligned}$$

Příklad

$$\begin{aligned}\cos' x &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x\cdot\cos\Delta x-\sin x\cdot\sin\Delta x-\cos x}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x\cdot 1-\sin x\cdot\Delta x-\cos x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\sin x\cdot\Delta x}{\Delta x}=-\sin x\end{aligned}$$

Derivace přirozeného logaritmu

Příklad

$$\begin{aligned}\ln' x &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\cdot\frac{1}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=\lim_{t\to\pm\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{x}}\\ &= \lim_{t\to\pm\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{\frac{1}{x}}=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

Substituce $\frac{1}{t}=\frac{\Delta x}{x}$, neboli $\Delta x=\frac{x}{t}$. Pro $\Delta x\to 0$ je $t\to\pm\infty$.

Derivování součtu a rozdílu

Věta

Buďte f, g dvě spojité funkce a k konstanta. Pak platí

- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$
- $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$

Důkaz.

$$((f \pm g)(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f \pm g)(x + \Delta x) - (f \pm g)x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x) \pm [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} = f'(x) \pm g'(x).$$

$$(kf(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{kf(x+\Delta x) - kf(x)}{\Delta x} = k \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = kf'(x)$$

□

Derivace obecného logaritmu

Příklad

$$\log_a' x = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \left(\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln' x = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

Derivace součinu a podílu

Věta

Buďte f a g dvě spojité funkce. Pak platí

- $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$

Důkaz.

Součin:

$$\begin{aligned}
((f\cdot g)(x))' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x+\Delta x) + f(x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left(g(x+\Delta x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\
&= g(x)\cdot f'(x) + f(x)\cdot g'(x)
\end{aligned}$$

□

Derivace goniometrických funkcí 2

Příklad

$$\operatorname{tg}' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x\cos x - \sin x\cos' x}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Příklad

$$\operatorname{cotg}' x = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\cos' x\sin x - \cos x\sin' x}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{-\sin x\sin x - \cos x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Derivace inverzní funkce

Věta

Buď f spojitá prostá funkce a φ její funkce inverzní. Buď $x \in \mathcal{D}(f)$. Označíme-li $y = f(x)$, pak platí

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Důkaz.

Označme $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$, a tedy $x + \Delta x = \varphi(y + \Delta y)$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y + \Delta y - y}{x + \Delta x - x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\varphi(y+\Delta y) - \varphi(y)}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\varphi(y+\Delta y) - \varphi(y)}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)} \qquad \square$$

Vzorce pro derivaci element. inverzních funkcí 1

Příklady

$$(e^x)' = \frac{1}{\ln'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{(y^2)'} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Příklady

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(y)} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Vzorce pro derivaci element. inverzních funkcí 2

Příklady

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg}'(x) &= \frac{1}{\operatorname{tg}'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 y+\sin^2 y}{\cos^2 y}} = \\ &= \frac{1}{\frac{\cos^2 y}{\cos^2 y} + \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{arccotg}'(x) &= \frac{1}{\operatorname{cotg}'(y)} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{\frac{\sin^2 y+\cos^2 y}{\sin^2 y}} = \\ &= -\frac{1}{\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Derivace složené funkce

Věta

Buď g funkce spojitá v bodě x a f funkce spojitá v bodě $g(x)$. Pak

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Důkaz.

Označme $y = g(x)$ a $\Delta y = g(x+\Delta x) - g(x)$.

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta y}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= f'(y)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = f'(g(x))\cdot g'(x)\end{aligned}$$

□

Derivace mocninných funkcí

Příklad

$$(a^x)' = \left(e^{\ln a^x}\right)' = \left(e^{x\cdot\ln a}\right)' = e^{x\cdot\ln a}\cdot(x\cdot\ln a)' = e^{\ln a^x}\cdot 1\cdot\ln a = a^x\cdot\ln a$$

Důkaz věty o derivaci podílu.

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x)\cdot g(x)^{-1}\right) = f'(x)\cdot g(x)^{-1} + f(x)\cdot\left(g(x)^{-1}\right)'\\ &= f'(x)\cdot g(x)^{-1} + f(x)\cdot\left(-1\cdot g(x)^{-2}\right)\cdot g'(x)\\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}\end{aligned}$$

□

Derivace vyšších řádů

Definice

Druhou derivaci funkce f, značení $f''(x)$, dostaneme, když zderivujeme derivaci funkce f ještě jednou, neboli $f''(x) = (f'(x))'$.
n*-tá derivace* funkce f, značení $f^{(n)}(x)$, se dostane n postupnými derivacemi funkce x, neboli $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Příklad

$$\begin{aligned}f(x) &= x\cdot e^x\\ f'(x) &= x'\cdot e^x + x\cdot(e^x)' = 1\cdot e^x + x\cdot e^x = (1+x)e^x\\ f''(x) &= (1+x)'\cdot e^x + (1+x)(e^x)' = 1\cdot e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x\\ f^{(3)}(x) &= (2+x)'\cdot e^x + (2+x)(e^x)' = 1\cdot e^x + (2+x)e^x = (3+x)e^x\\ &\vdots\\ f^{(n)}(x) &= (n+x)\cdot e^x\end{aligned}$$

Příklad na derivace vyšších řádů

Úloha

Najděte druhou derivaci funkce $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Řešení: Dvakrát zderivujeme

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{(-1)\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2} \cdot \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{2\cdot\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{1+x}{2(1-x)} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-2}{2(1-x)\cdot(1+x)} = \frac{-1}{1-x^2}$$

$$f''(x) = \frac{0\cdot(1-x^2)-(-1)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{-2x}{1-2x^2+x^4}$$