

Matematika 1

pro PEF PaE

3. Limity a spojitost funkcí

Přemysl Jedlička

Katedra matematiky, TF ČZU

Neformální definice limity

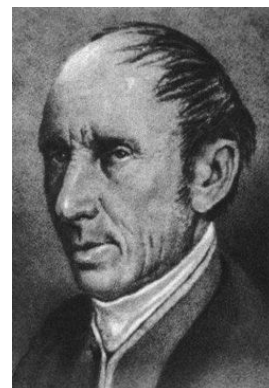
Definice

Bud' $y = f(x)$ reálná funkce. Řekneme, že funkce f má v bodě a limitu b , pokud je splněno: kdykoliv se hodnoty x „blíží“ k hodnotě a , pak se hodnoty y „blíží“ k hodnotě b . Tato situace se zapíše

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$



Jean le Rond d'Alembert
1718–1783



1789–1857
Augustin Louis Cauchy

Formální definice limity

Definice

Okolím bodu a nazveme otevřený interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ pro nějaké (maličké) číslo $\varepsilon > 0$.

Definice (definice limity pomocí okolí)

Bud' $f(x)$ reálná funkce. Řekneme, že f má v bodě a limitu b , pokud pro každé U , okolí bodu b , existuje V , okolí bodu a , takové, že pro každé $x \in V$ platí $f(x) \in U$.

Definice (ε - δ definice limity)

Bud' $f(x)$ reálná funkce. Funkce f má v bodě a limitu b , pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; \forall x > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Příklad limity

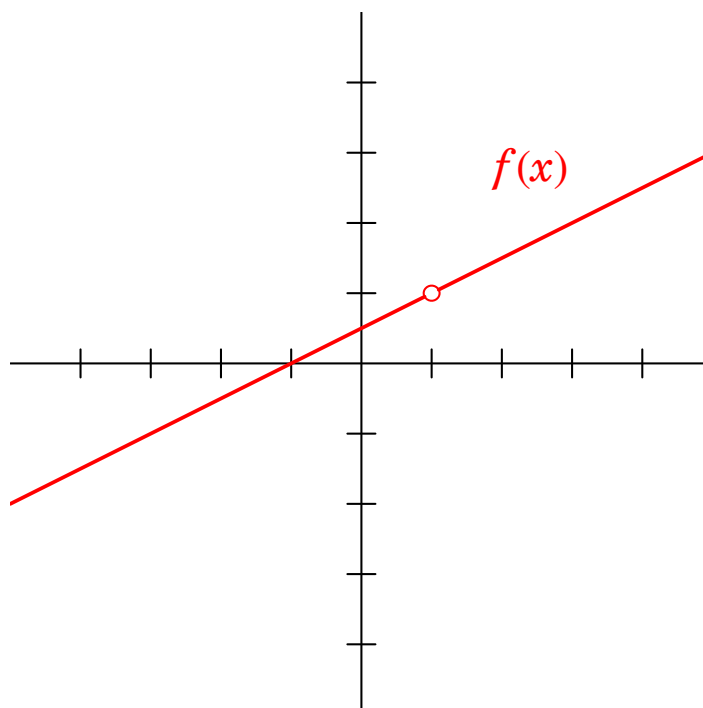
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 2}$$

$$\mathcal{D}(f) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{2(x - 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{2} = 1$$



Vlastnosti limit

Tvrzení

Bud'te f a g dvě funkce mající v bodě a limity. Pak platí

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x),$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x),$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x),$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) / \lim_{x \rightarrow a} g(x),$ *pokud se nedělí nulou.*

Věta

Mějme reálný bod a a reálné funkce f , g a h , splňující

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, *pro nějaké b*
- $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *na nějakém okolí bodu a .*

Pak je limita $h(x)$, pro $x \rightarrow a$, rovna b .

Definice jednostranných a nevlastních limit

Definice

Levým okolím (resp. pravým okolím) bodu a rozumíme interval $(a - \varepsilon, a)$, respektive $(a, a + \varepsilon)$, pro nějaké $\varepsilon > 0$.

Definice

Číslo b je *limitou zleva* funkce f v bodě a , pokud pro každé U , okolí bodu b , existuje V , levé okolí bodu b , takové, že kdykoliv x leží ve V , pak $f(x)$ leží v U . Píšeme $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$.

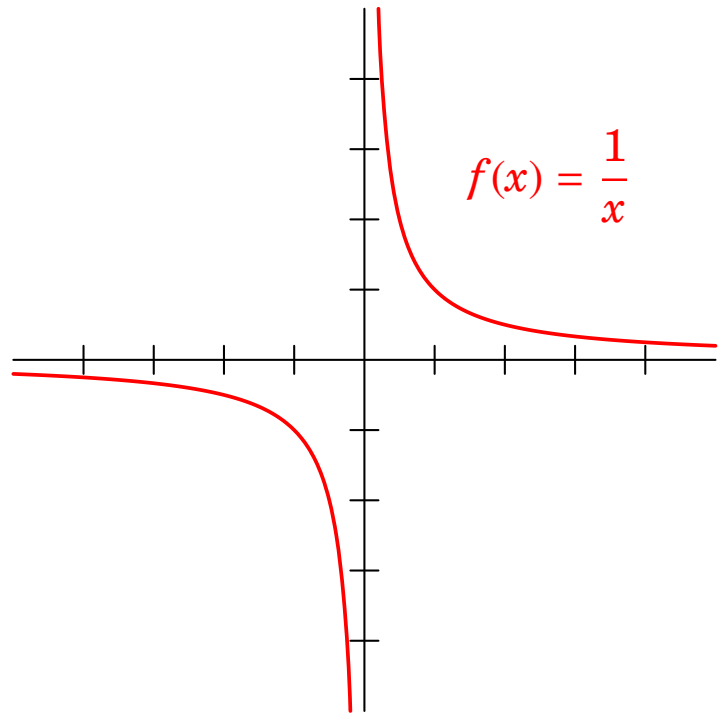
Obdobně u limity zprava píšeme $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$.

Definice

Okolím nekonečna myslíme interval (K, ∞) pro nějaké (veliké) $K \in \mathbf{R}$. Analogicky, okolím minus nekonečna myslíme interval $(-\infty, K)$ pro nějaké $K \in \mathbf{R}$.

Příklad na jednostranné a nevlastní limity

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} &= 0\end{aligned}$$



Výpočty s nevlastními hodnotami

Pro kladné reálné číslo a platí

$$\infty \pm a = \infty$$

$$\infty \cdot a = \infty$$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$\frac{\infty}{a} = \infty$$

$$\frac{a}{\infty} = 0$$

$$\frac{a}{0^+} = \infty$$

$$\frac{a}{0^-} = -\infty$$

$$\infty - \infty = ?$$

$$\frac{\infty}{\infty} = ?$$

$$\infty \cdot 0 = ?$$

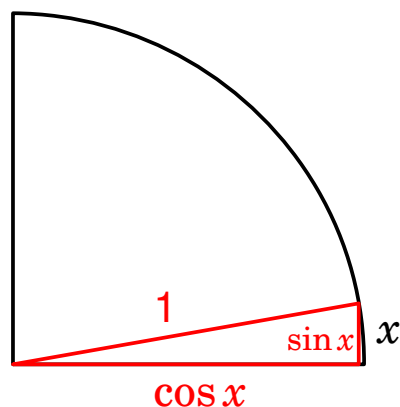
$$\frac{0}{0} = ?$$

Limity funkce $\sin x/x$

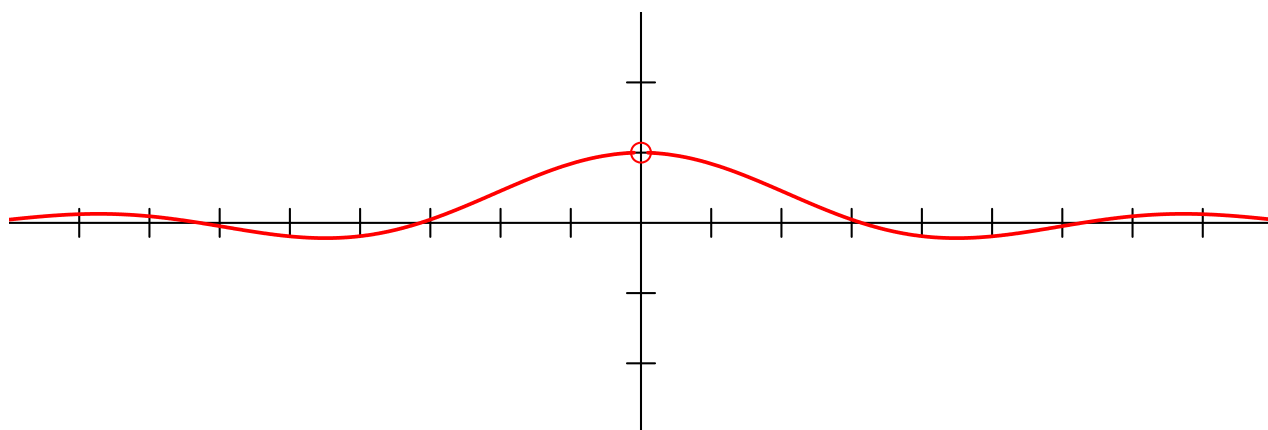
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$



pro malá x je $\sin x \doteq x$ a $\cos x \doteq 1$



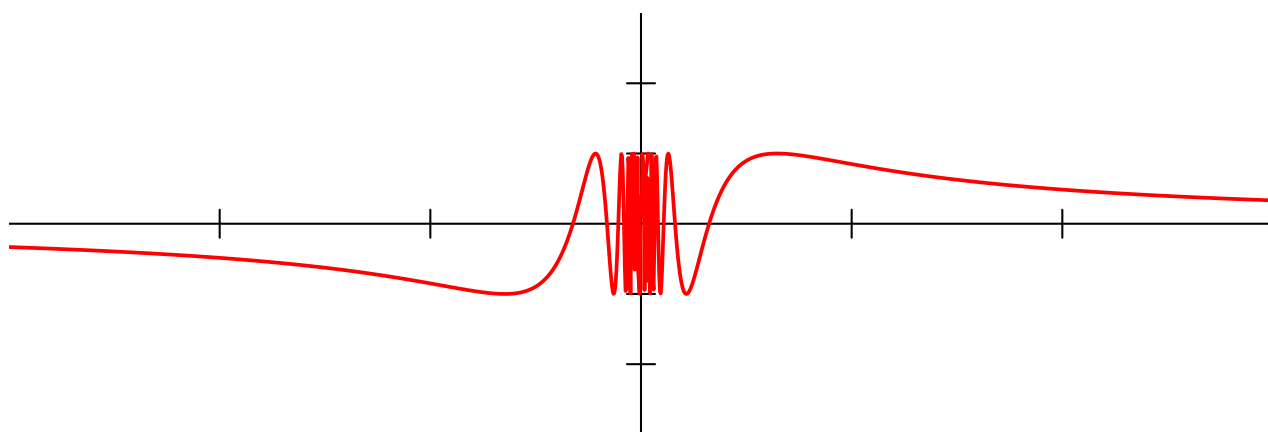
Limity funkce $\sin(1/x)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x} \text{ neexistuje}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin \frac{1}{x} \text{ neexistuje}$$



Definice limity funkce dvou proměnných

Definice

Okolím bodu (a, b) v $\mathbf{R}^2$ nazveme množinu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \times (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ pro nějaké číslo $\varepsilon > 0$.

Definice

Bud' $f(x, y)$ reálná funkce dvou proměnných. Řekneme, že f má v bodě (a, b) limitu c , pokud pro každé U , okolí bodu c , existuje V , okolí bodu (a, b) , takové, že pro každé $(x, y) \in V$ platí $f(x, y) \in U$.

Definice spojitosti

Definice

Reálná funkce f je *spojitá* v bodě a pokud je funční hodnota v bodě a rovna limitě v bodě a .

Řekneme, že f je *spojitá*, pokud je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru.

Definice

Reálná funkce f (více proměnných) je *spojitá* v bodě a pokud je funční hodnota v bodě a rovna limitě bodě a .

Řekneme, že f je *spojitá*, pokud je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru.

Fakt

Každá elementární funkce je spojitá.

Limity složených funkcí

Věta

Mějme dvě reálné funkce f a g . Pokud platí

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow b} f(x) = c,$$

pak máme $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c$.

Speciálně, je-li funkce f spojitá v bodě b , pak platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right).$$

Definice čísla e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} \doteq 2.717$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{ay} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^a = \\ &= \left[\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^a = e^a \end{aligned}$$

Položíme $\frac{a}{x} = \frac{1}{y}$, tedy $x = ay$. Pokud $x \rightarrow \pm\infty$, pak i $y \rightarrow \pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{0}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1^x = 1 = e^0.$$

Bolzanova věta

Věta (Bolzano)

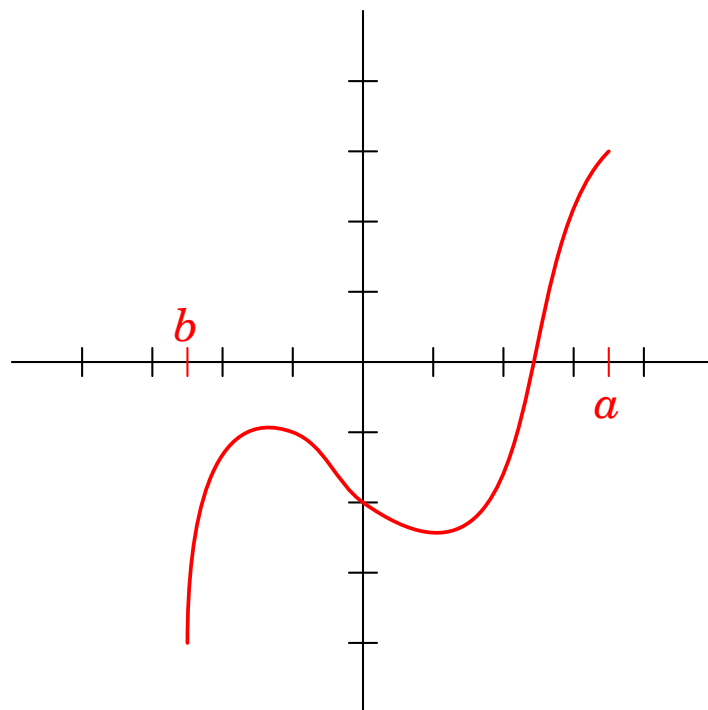
Bud' f reálná funkce spojitá na intervalu I . Mějme dva body $a, b \in I$ splňující $f(a) > 0$ a $f(b) < 0$. Pak existuje mezi body a a b bod c , kořen funkce f .



1781–1848

Bernard Bolzano

Ilustrace k Bolzanově větě



Nelze obecně spočítat kořeny polynomu

Věta (Abel)

Neexistuje žádné obecné pravidlo, jak nalézt kořeny polynomu n -tého stupně pro $n \geq 5$.



Niels Abel
1802–1829



1811–1832
Évariste Galois

Hledání kořenů polynomu

Hledejme kořeny polynomu $f(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6x + 3$.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-3217	-981	-177	11	15	3	-1	3	111	635	2223

Polynom má aspoň 3 kořeny, a to v intervalech $(-3, -2)$, $(0, 1)$ a $(1, 2)$.
Najděme ten poslední.

$$f(1,5) \doteq -2,34$$

$$f(1,8) \doteq -0,70$$

$$f(1,9) \doteq 0,80$$

$$f(1,85) \doteq -0,026$$

$$f(1,86) \doteq 0,127$$

$$f(1,852) \doteq 0,004$$

$$f(1,851) \doteq -0,011$$

Jeden z kořenů funkce f je přibližně 1,852.