

Matematika 1

pro PEF PaE

2. Inverzní funkce

Přemysl Jedlička

Katedra matematiky, TF ČZU

Motivace

Chci si půjčit 2.000.000 Kč na hypotéku. Nabízejí se dva typy otázek:

- Kolik mám měsíčně splácet, abych měl splaceno za 20 let?
- Jak dlouho budu splácet, když budu platit 10.000 Kč měsíčně?

Máme dvě funkce: $f(\text{čas}) = \text{splátka}$ a $g(\text{splátka}) = \text{čas}$.

Platí $g(f(\text{čas})) = \text{čas}$ a $f(g(\text{splátka})) = \text{splátka}$.

Takovéto funkce se nazývají inverzní.

Definice

Definice

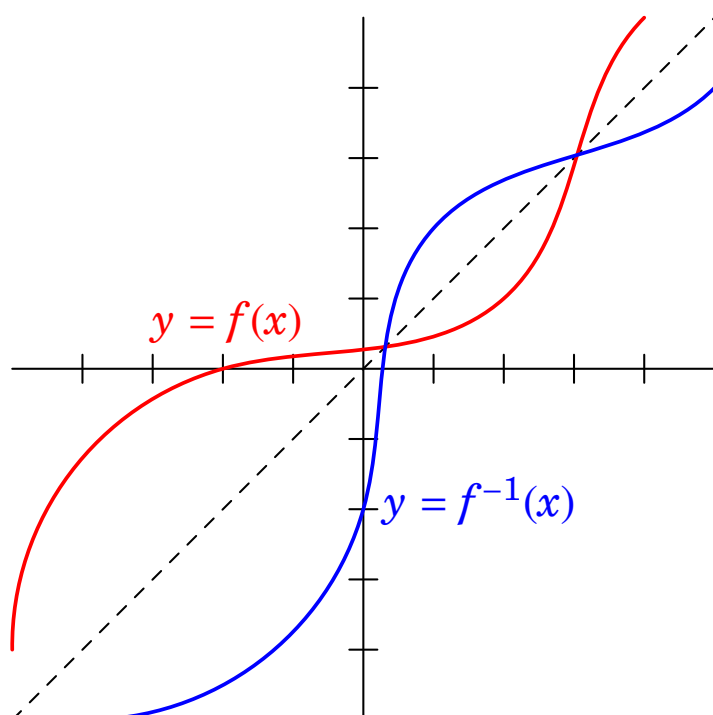
Buď f prostá reálná funkce jedné proměnné. Funkce f^{-1} definovaná $f^{-1}(y) = x$ pro $f(x) = y$ se nazývá funkce *inverzní*.

Tvrzení

Buď f prostá funkce a f^{-1} její funkce inverzní.

- Funkce f^{-1} je prostá.
- Je-li f rostoucí, pak je i f^{-1} rostoucí.
- Je-li f klesající, pak je i f^{-1} klesající.
- $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f)$ a $\mathcal{H}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$.
- Grafy funkcí f a f^{-1} jsou osově souměrné přes osu 1. a 3. kvadrantu.
- Platí $f^{-1} \circ f(x) = x$ a $f \circ f^{-1}(y) = y$.

Ilustrační obrázek



Funkce $f(x)$ je rostoucí,
 $\mathcal{D}(f) = \langle -5, 4 \rangle$,
 $\mathcal{H}(f) = \langle -4, 5 \rangle$.

Funkce $f^{-1}(x)$ je rostoucí,
 $\mathcal{H}(f^{-1}) = \langle -5, 4 \rangle$,
 $\mathcal{D}(f^{-1}) = \langle -4, 5 \rangle$.

Hledání inverzní funkce

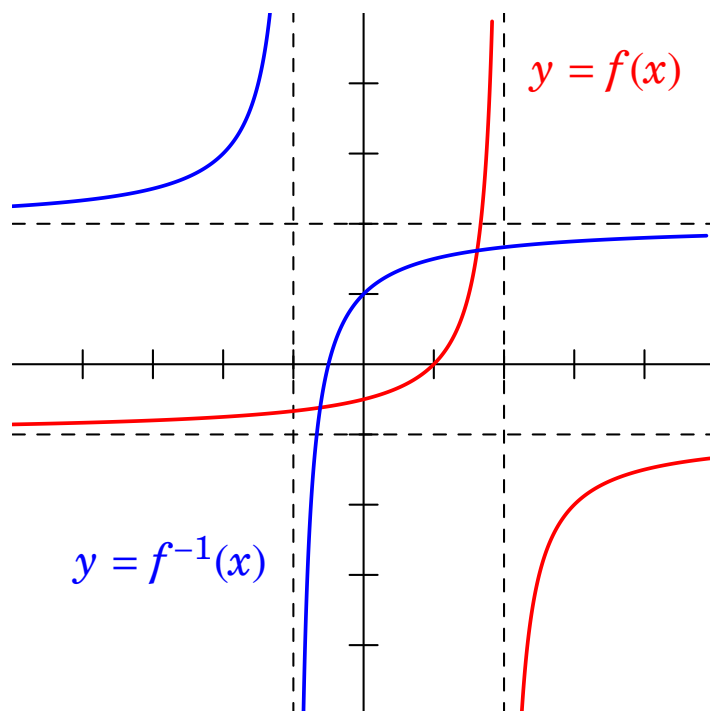
Úloha

Nalezněte inverzní funkci k funkci f a určete její definiční obor a obor hodnot.

$$f(x) = \frac{x-1}{2-x}$$

Řešení:

- Ⓐ Nalezneme $\mathcal{D}(f)$.
- Ⓑ Nalezneme funkční předpis funkce f^{-1} .
- Ⓒ Nalezneme $\mathcal{D}(f^{-1})$.



Hledání inverzní funkce

- Ⓐ Definiční obor funkce f :

$$2 - x \neq 0$$

$$x \neq 2$$

$$\mathcal{D}(f) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$$

$$\mathcal{H}(f^{-1}) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$$

- Ⓒ Definiční obor funkce f^{-1} :

$$1 + x \neq 0$$

$$x \neq -1$$

$$\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$$

$$\mathcal{H}(f) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$$

- Ⓑ Předpis inverzní funkce

$$y = \frac{x-1}{2-x} \quad | \cdot (2-x)$$

$$y \cdot 2 - y \cdot x = x - 1 \quad | -x - 2y$$

$$-x - yx = -1 - 2y \quad | \cdot (-1)$$

$$x + yx = 1 + 2y$$

$$x(1+y) = 1 + 2y \quad | : (1+y)$$

$$x = \frac{1+2y}{1+y}$$

$$f^{-1} : y = \frac{1+2x}{1+x}$$

Logaritmy

Přirozený logaritmus

$$e^y = x \Leftrightarrow \ln x = y$$

$$\mathcal{D}(\ln x) = (0, \infty), \mathcal{H}(\ln x) = \mathbf{R}$$

- je rostoucí
- $\ln 1 = 0$

Obdobně:

$$a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x.$$

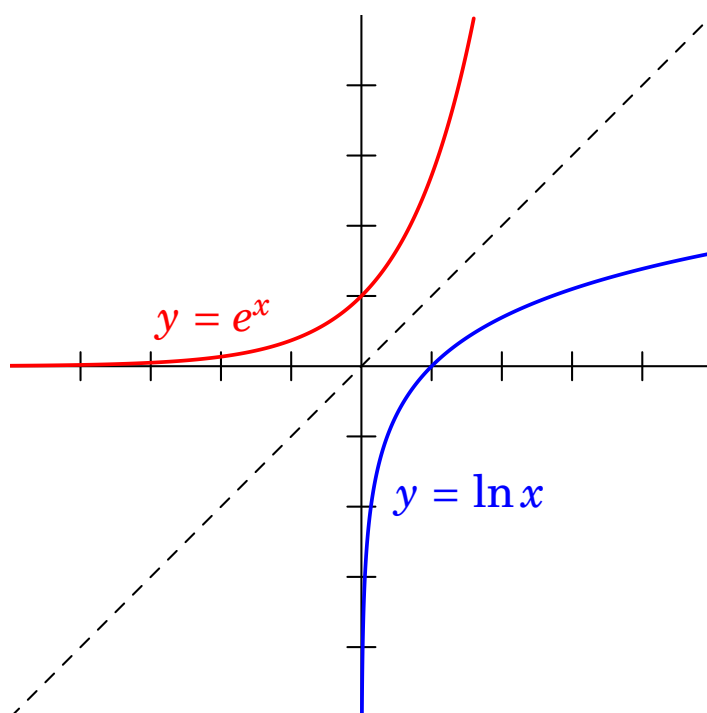
Platí:

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a(x/y)$$

$$\log_a x^b = b \cdot \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$



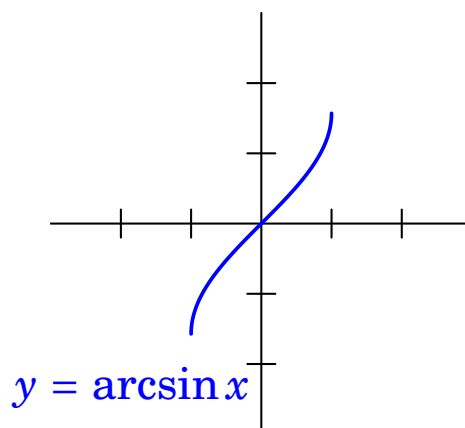
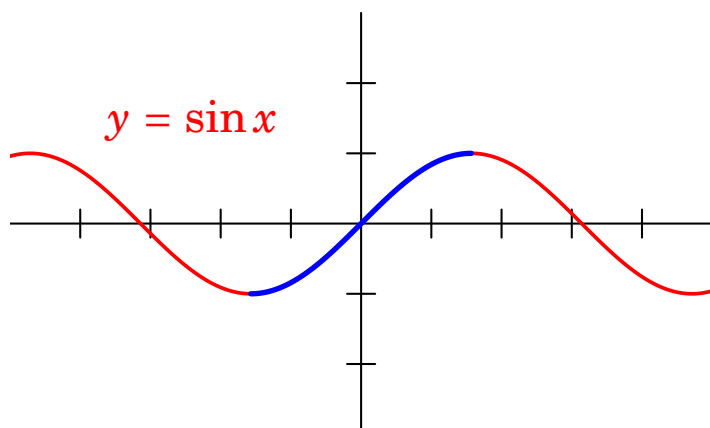
Cyklometrické funkce

Arkussinus

$$\sin y = x \Leftrightarrow \arcsin x = y \text{ pro } x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$\mathcal{D}(\arcsin x) = \langle -1, 1 \rangle$$

$$\mathcal{H}(\arcsin x) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$



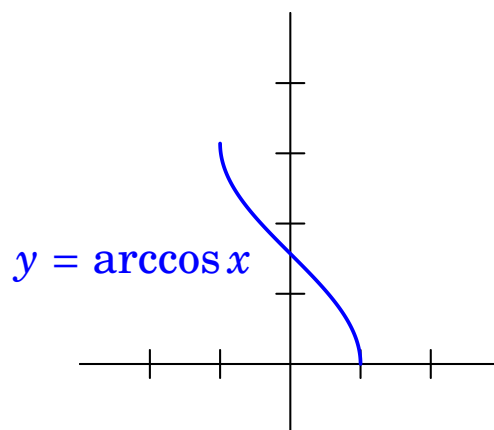
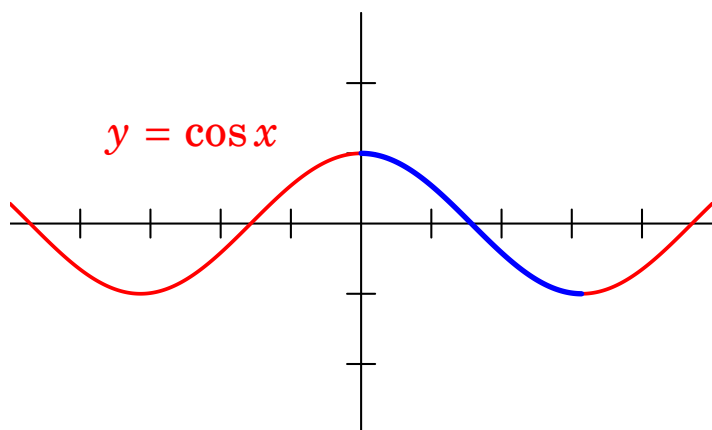
Cyklometrické funkce

Arkuskosinus

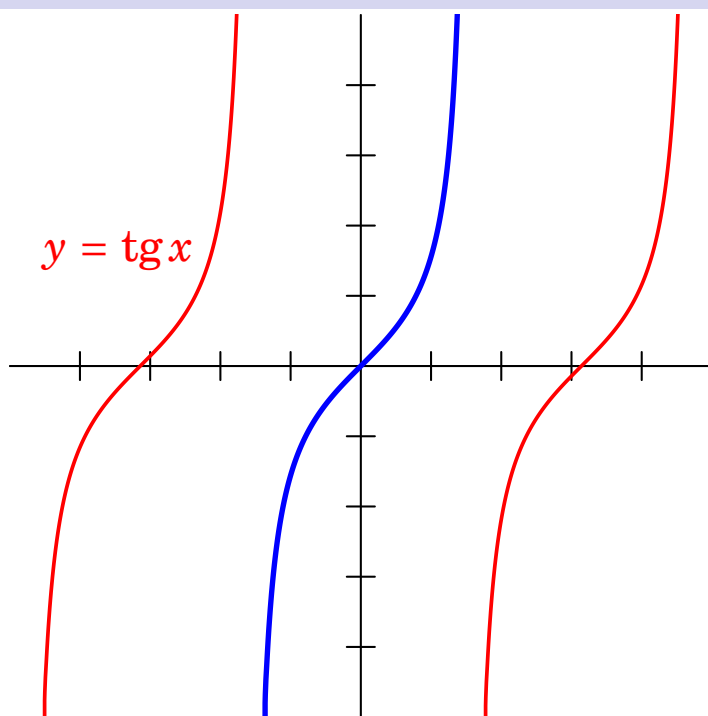
$$\cos y = x \Leftrightarrow \arccos x = y \text{ pro } x \in \langle 0, \pi \rangle$$

$$\mathcal{D}(\arccos x) = \langle -1, 1 \rangle$$

$$\mathcal{H}(\arccos x) = \langle 0, \pi \rangle$$



Cyklometrické funkce



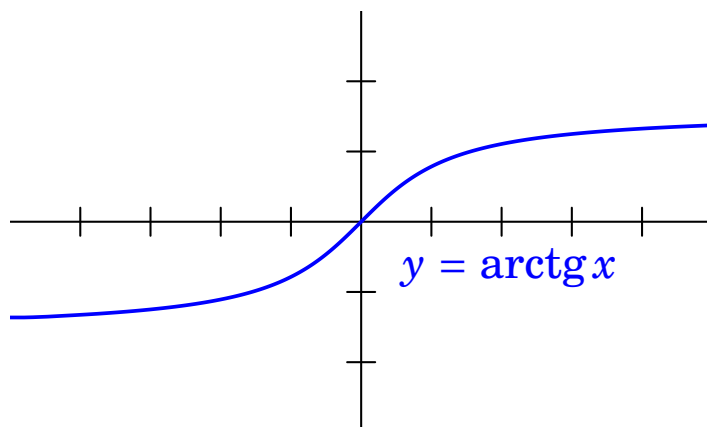
Arkustangens

$$\operatorname{tg} y = x \Leftrightarrow \operatorname{arctg} x = y$$

$$\text{pro } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\mathcal{D}(\operatorname{arctg} x) = \mathbf{R}$$

$$\mathcal{H}(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



Cyklometrické funkce

Arkuskotangens

$$\cot g y = x \Leftrightarrow \operatorname{arccotg} x = y$$

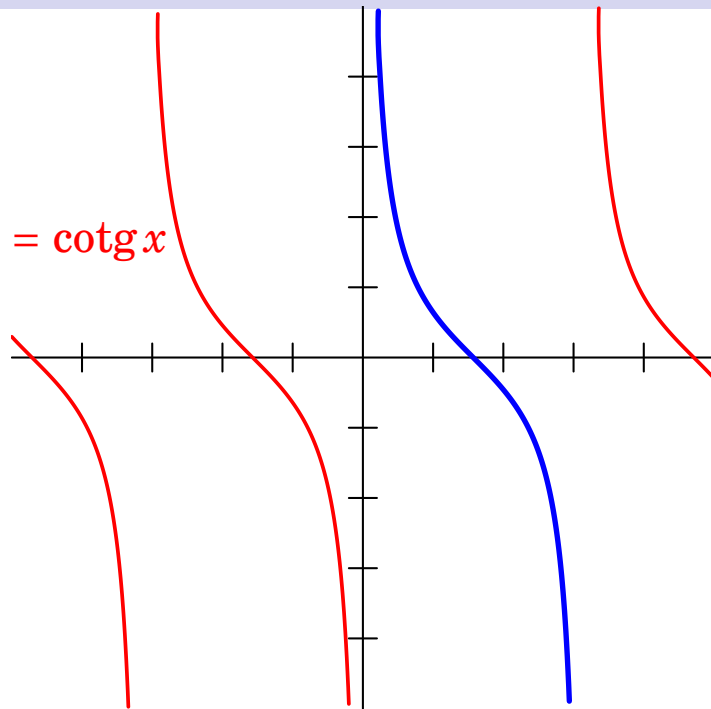
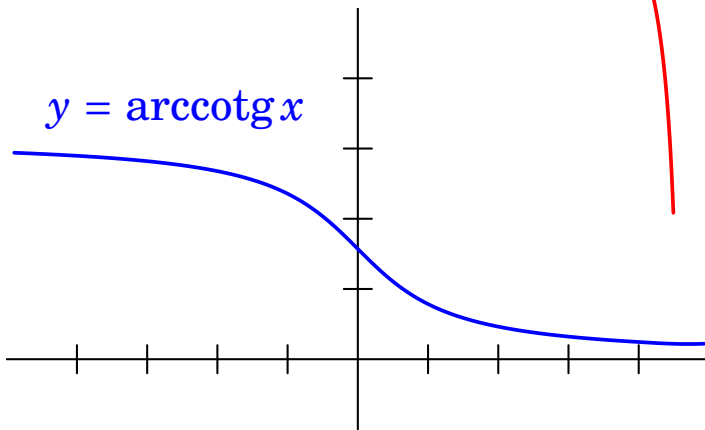
pro $x \in (0, \pi)$

$$\mathcal{D}(\operatorname{arctg} x) = \mathbf{R}$$

$$\mathcal{H}(\operatorname{arctg} x) = (0, \pi)$$

$$y = \cot g x$$

$$y = \operatorname{arccotg} x$$

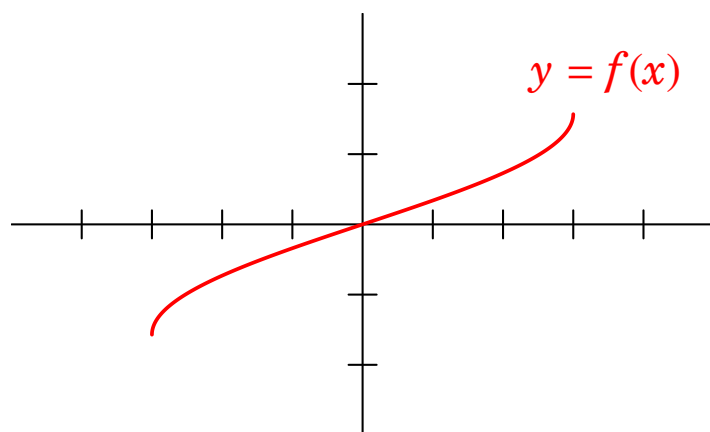


Hledání inverzní funkce složené funkce

Úloha

Nalezněte inverzní funkci k funkci f a určete její definiční obor a obor hodnot.

$$f(x) = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x+3}{6}} - \frac{\pi}{2}$$



Řešení: @ Nalezneme $\mathcal{D}(f)$.

$$\frac{x+3}{6} \geq 0$$

$$x \geq -3$$

$$\sqrt{\frac{x+3}{6}} \geq -1$$

O.K.

$$\sqrt{\frac{x+3}{6}} \leq 1$$

$$x \leq 3$$

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{H}(f^{-1}) = \langle -3, 3 \rangle.$$

Hledání inverzní funkce složené funkce

⑥ Funkční předpis $f^{-1} : y = 6 \sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 3$

$$y = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x+3}{6}} - \frac{\pi}{2} \quad | + \frac{\pi}{2}$$

$$y + \frac{\pi}{2} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x+3}{6}} \quad | : 2$$

$$\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \leftarrow$$

$$\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4} = \arcsin \sqrt{\frac{x+3}{6}}$$

$$y \in \left\langle -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$\sin\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\arcsin \sqrt{\frac{x+3}{6}}\right)$$

$$\sin\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \leftarrow$$

$$\sin\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{x+3}{6}} \quad |^2$$

$$\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4} \geq 0$$

$$\sin^2\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{x+3}{6} \quad | \cdot 6$$

$$y \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$6 \sin^2\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = x + 3 \quad | - 3$$

$$6 \sin^2\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 3 = x$$

Hledání inverzní funkce složené funkce

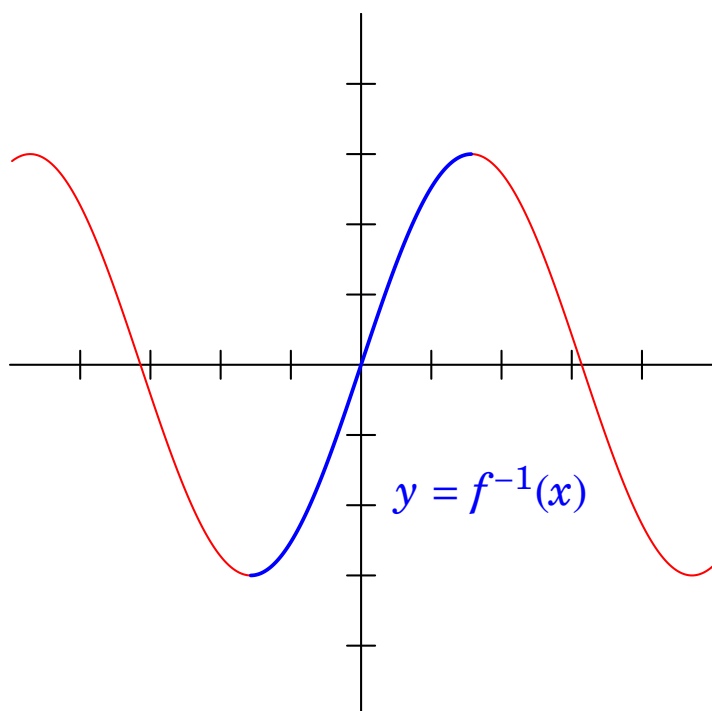
⑦ Nalezení $\mathcal{H}(f)$

$$\begin{aligned} f(-3) &= 2 \arcsin \sqrt{\frac{-3+3}{6}} - \frac{\pi}{2} \\ &= 2 \arcsin \sqrt{0} - \frac{\pi}{2} \\ &= 2 \arcsin 0 - \frac{\pi}{2} \\ &= 2 \cdot 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Obdobně $f(3) = \frac{\pi}{2}$.

Takže

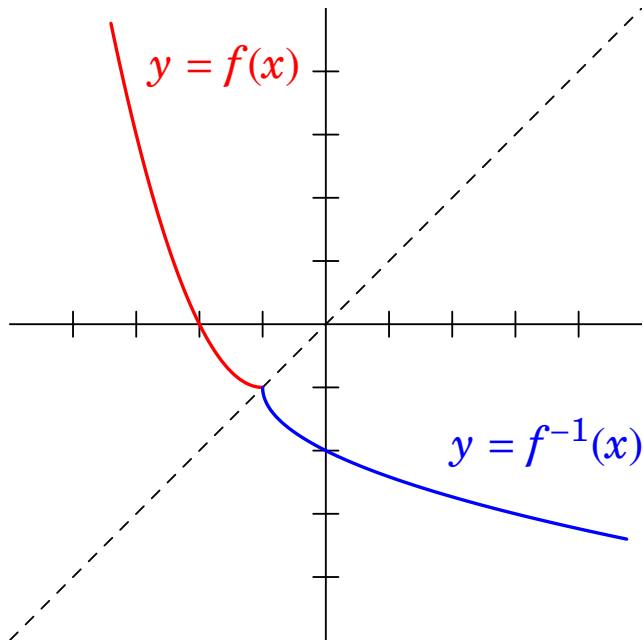
$$\mathcal{H}(f) = \mathcal{D}(f^{-1}) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$



Inverzní funkce ke kvadratickým funkcím

Úloha

Nalezněte inverzní funkci k funkci $f(x) = x^2 + 2x$ na intervalu $(-\infty, -1]$.



Řešení: Doplníme na čtverec.

$$y = x^2 + 2x$$

$$y = x^2 + 2x + 1 - 1$$

$$y = (x + 1)^2 - 1$$

$$y + 1 = (x + 1)^2$$

$$\sqrt{y + 1} = |x + 1|$$

$$\sqrt{y + 1} = -(x + 1)$$

$$\sqrt{y + 1} = -x - 1$$

$$x = -\sqrt{y + 1} - 1$$

$$f^{-1} : y = -\sqrt{x + 1} - 1$$