

Matematika 1

pro PEF PaE

1. Reálné funkce

Přemysl Jedlička

Katedra matematiky, TF ČZU

Definice funkce

Definice

Zobrazení z množiny $\mathfrak{A}$ do množiny $\mathfrak{B}$ je množina f uspořádaných dvojic (x, y) , kde $x \in \mathfrak{A}$ a $y \in \mathfrak{B}$, takových že kdykoliv $(x, y_1) \in f$ a $(x, y_2) \in f$, pak $y_1 = y_2$.

Definice

Reálná funkce jedné proměnné je zobrazení z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}$.

Úmluva

Místo $(x, y) \in f$ píšeme $f(x) = y$.

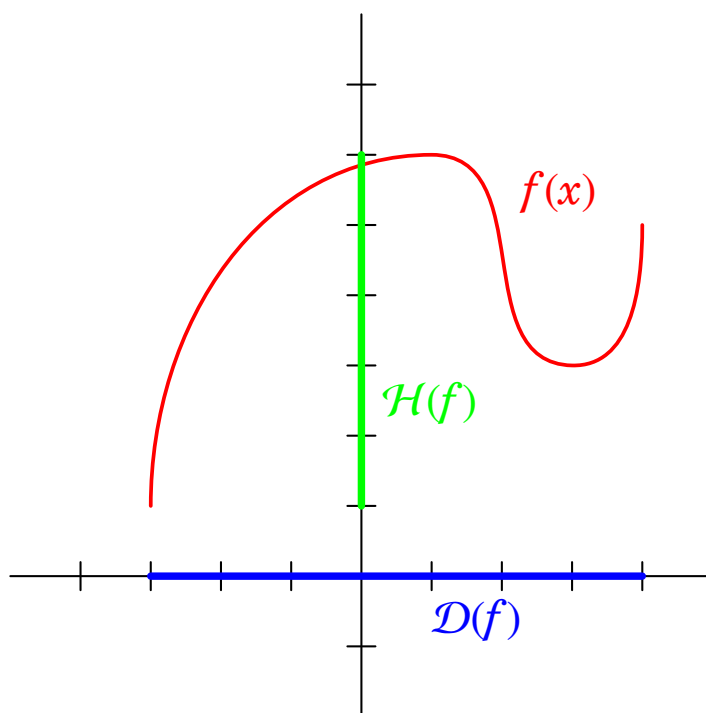
Funkční obory

Definice

Definiční obor reálné funkce f je množina takových $x \in \mathbf{R}$, že existuje (právě jedno) $y \in \mathbf{R}$, pro které $f(x) = y$. Značí se $\mathcal{D}(f)$.

Definice

Obor hodnot reálné funkce f je množina takových $y \in \mathbf{R}$, že existuje (alespoň jedno) $x \in \mathbf{R}$, pro které $f(x) = y$. Značí se $\mathcal{H}(f)$.



Vlastnosti funkcí

Definice

Reálná funkce f se nazývá *prostá*, pokud pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ existuje právě jedno $y \in \mathcal{H}(f)$ splňující $f(x) = y$.

Definice

Reálná funkce f se nazývá *rostoucí* (respektive *klesající*), pokud pro každou dvojici x_1, x_2 z $\mathcal{D}(f)$, splňující $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$ (respektive $f(x_1) > f(x_2)$).

Definice

Reálná funkce f se nazývá *sudá*, platí-li $f(-x) = f(x)$, pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$.
 Reálná funkce f se nazývá *lichá*, platí-li $f(-x) = -f(x)$, pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$.

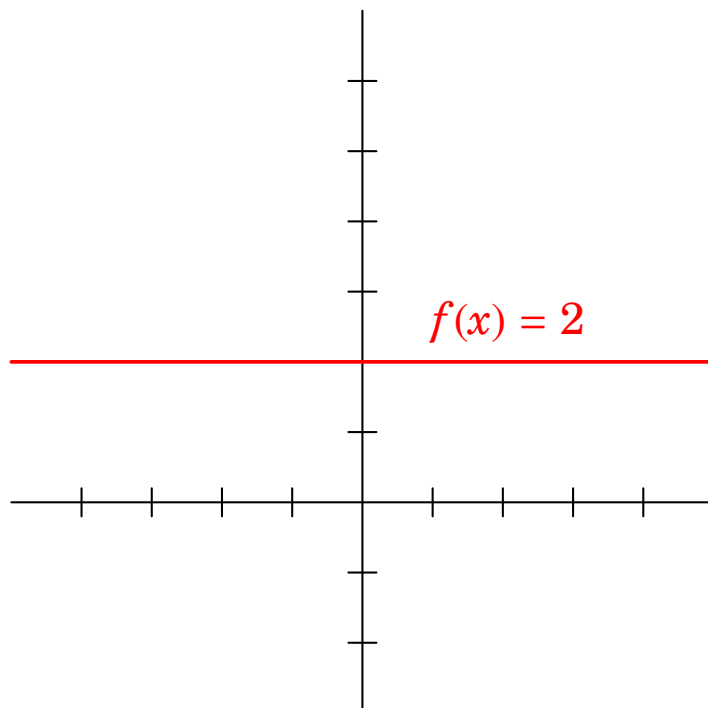
Konstantní funkce

Konstantní funkce

$$f(x) = a$$

$$\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}$$

- je sudá
- není prostá



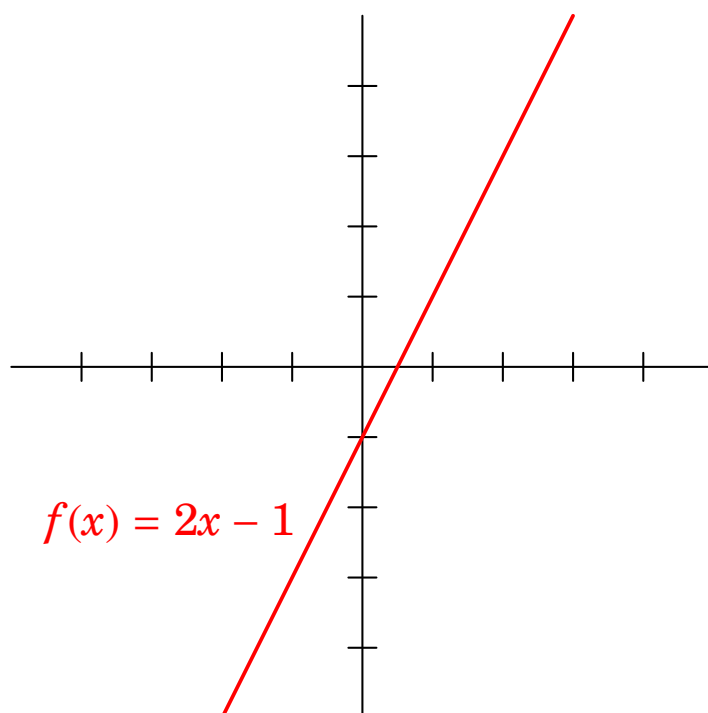
Lineární funkce

Lineární funkce

$$f(x) = ax + b, a \neq 0$$

$$\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}$$

- je rostoucí pro $a > 0$
- je klesající pro $a < 0$
- je lichá pro $b = 0$



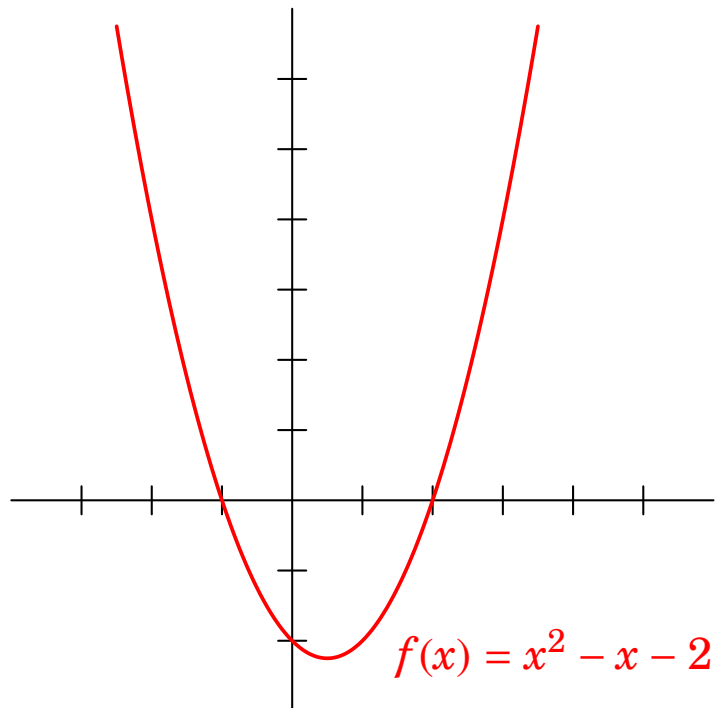
Kvadratické funkce

Kvadratická funkce

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

$$\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}$$

- pro $a > 0$ je to parabola obrácená vzhůru
- pro $a < 0$ je to parabola obrácená dolů
- pokud $b = 0$, pak se jedná o funkci sudou



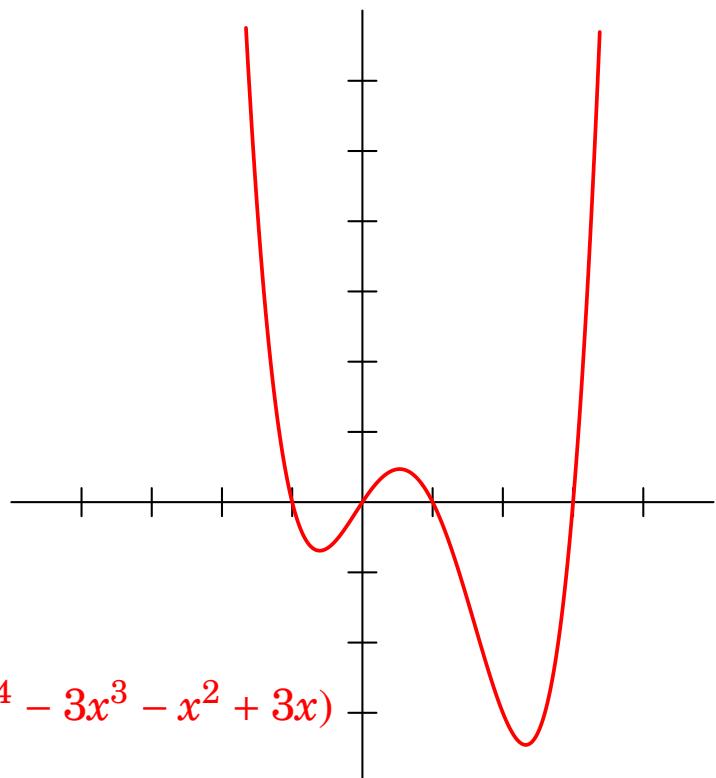
Polynomiální funkce

Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}$$

- číslo n se nazývá *stupeň* polynomu
- pokud jsou nenulové koeficienty jen u sudých mocnin, jedná se o sudou funkci
- pokud jsou nenulové koeficienty jen u lichých mocnin, jedná se o lichou funkci



$$f(x) = \frac{1}{2}(x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x)$$

Absolutní hodnota

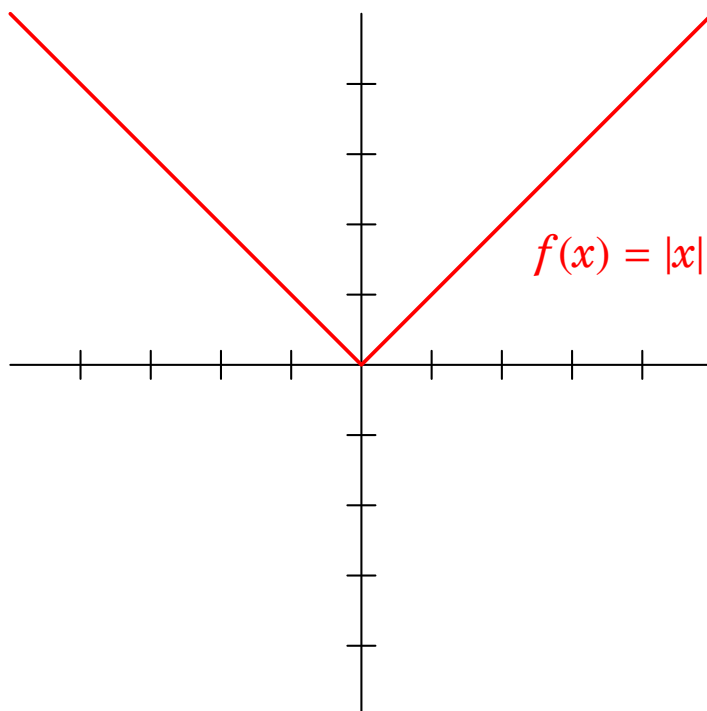
Absolutní hodnota

$$f(x) = |x|$$

$$\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}$$

$$\mathcal{H}(f) = \langle 0, \infty)$$

- je sudá
- je klesající na $(-\infty, 0)$
- je rostoucí na $\langle 0, \infty)$
- **není** elementární funkcí



Lomené funkce

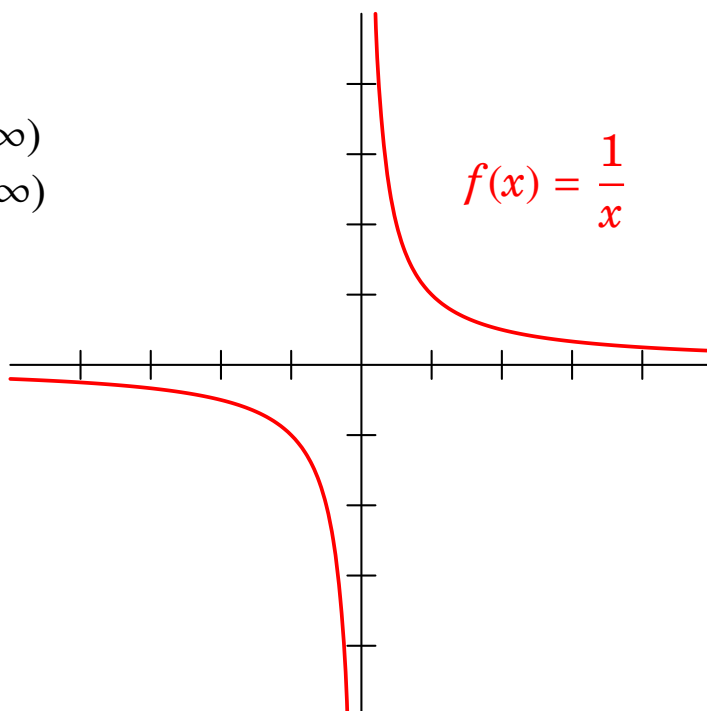
Lomená funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\mathcal{D}(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

$$\mathcal{H}(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

- je prostá
- **není** klesající na $\mathcal{D}(f)$
- je klesající na $(-\infty, 0)$
- je klesající na $(0, \infty)$
- je lichá
- nazývá se nepřímá úměrnost



Odmocniny

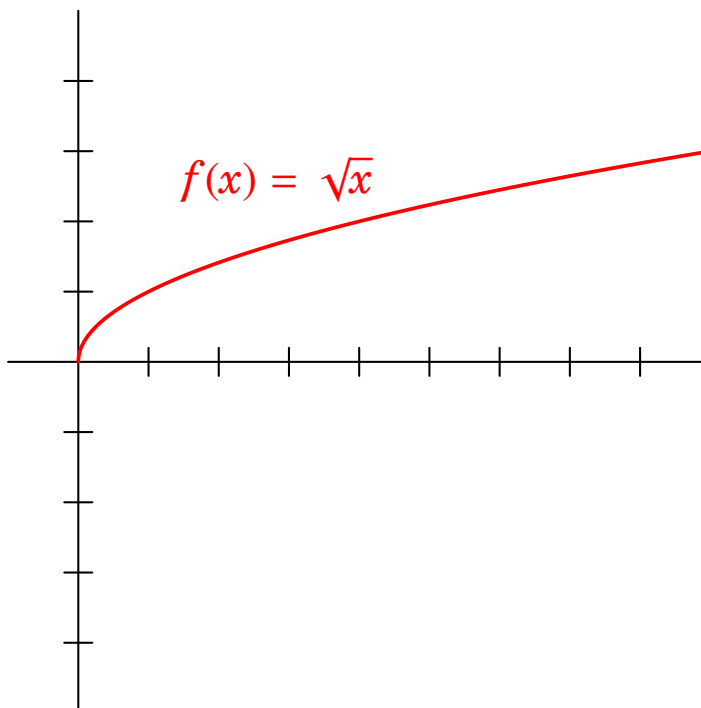
Druhá odmocnina

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathcal{D}(f) = \langle 0, \infty \rangle$$

$$\mathcal{H}(f) = \langle 0, \infty \rangle$$

- je prostá
- je rostoucí



Mocninné funkce

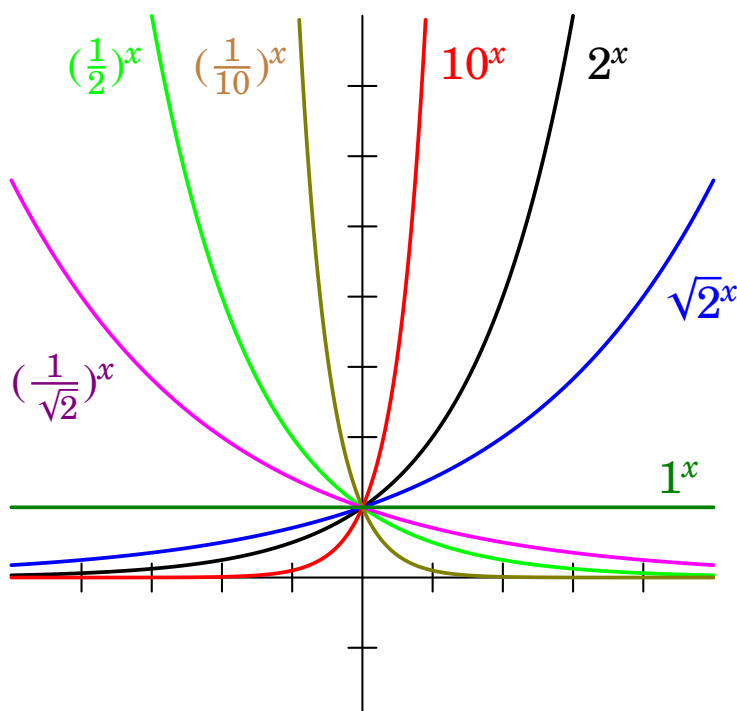
Mocninná funkce

$$f(x) = a^x, a > 0$$

$$\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}$$

$$\mathcal{H}(f) = (0, \infty), \text{ pro } a \neq 1$$

- je prostá pro $a \neq 1$
- je rostoucí pro $a > 1$
- je klesající pro $a < 1$



Exponenciální funkce

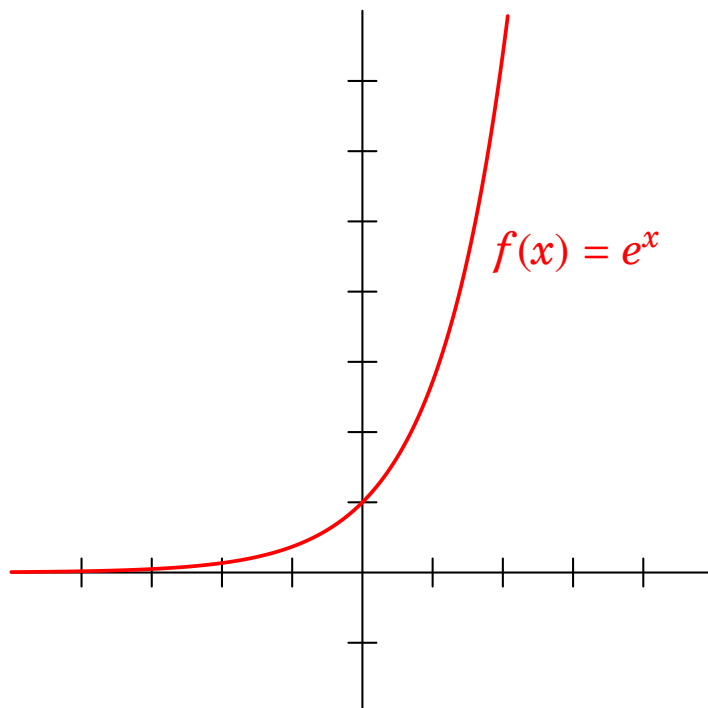
Exponenciální funkce

$$f(x) = e^x$$

$e = 2,71828182845904523$
 5360287471352662497757247
 093699959574966967627724076
 630353547594571382178525166427
 427466391932003059921817413596629
 04357290033429526059563073813232862794
 349076323382988075319525101901157383418793070
 21540891499348841675092447614606680622648001684774118537
 4234544243710753907744992069551702761838606261331384563000752044933826560 ...



Leonhard Euler
1707–1783



Goniometrické funkce

Sinus

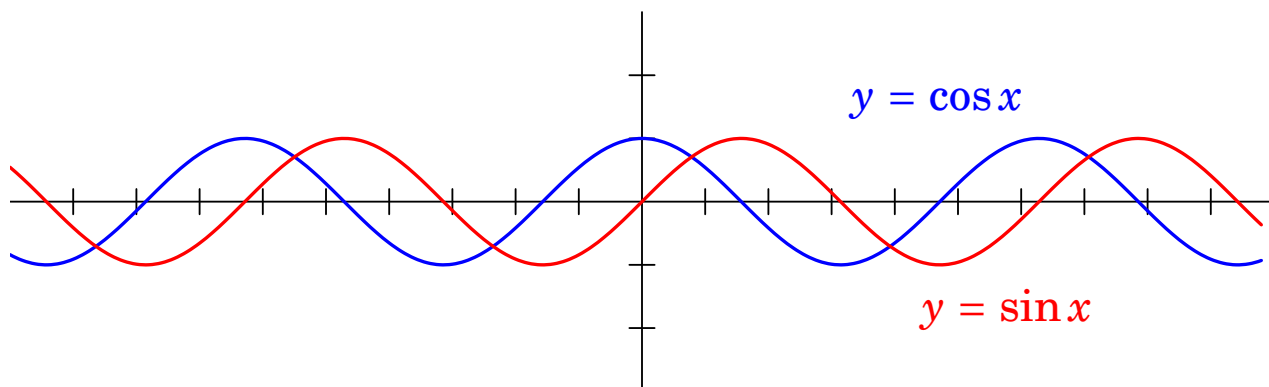
$$\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}, \mathcal{H}(f) = \langle -1, 1 \rangle$$

- je lichá funkce
- perioda je 2π
- kořeny jsou $0 + k\pi$, pro všechna $k \in \mathbf{Z}$

Kosinus

$$\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}, \mathcal{H}(f) = \langle -1, 1 \rangle$$

- je sudá funkce
- perioda je 2π
- kořeny jsou $\frac{\pi}{2} + k\pi$, pro všechna $k \in \mathbf{Z}$



Goniometrické funkce

Tangens

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\mathcal{D}(\operatorname{tg}(x)) = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$$

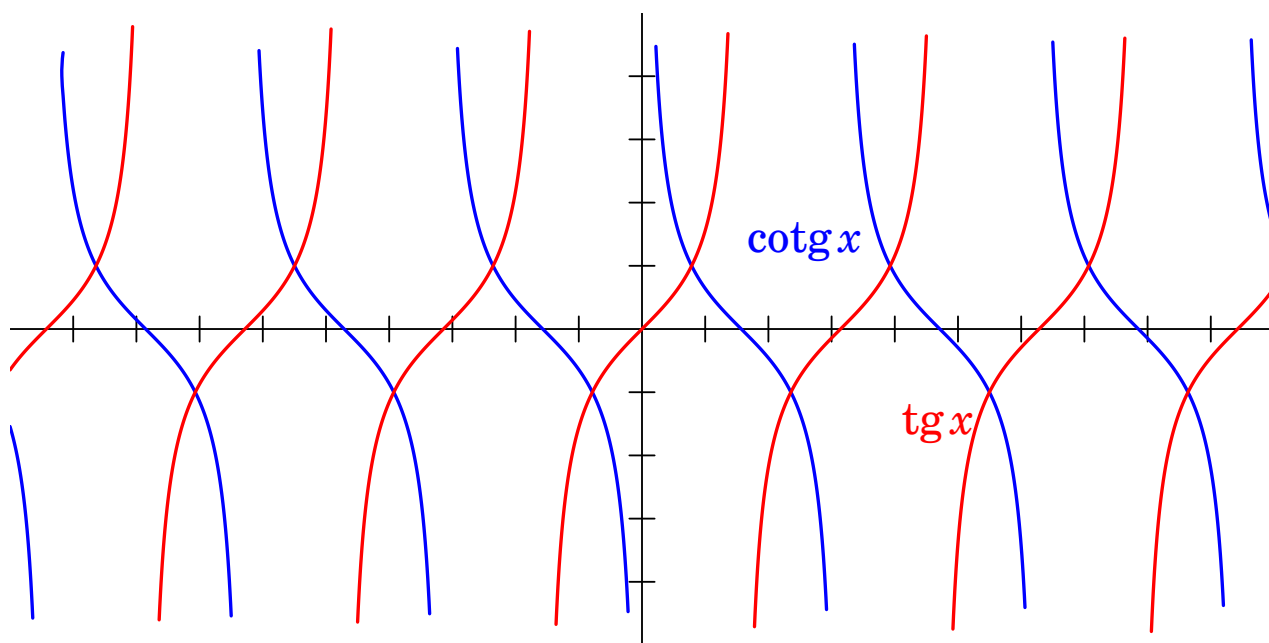
$$\mathcal{H}(\operatorname{tg}(x)) = \mathbf{R}$$

Kotangens

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\mathcal{D}(\operatorname{cotg}(x)) = \mathbf{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$$

$$\mathcal{H}(\operatorname{cotg}(x)) = \mathbf{R}$$



Operace s funkcemi

Tvrzení

Bud'te f, g dvě reálné funkce.

- pro $h(x) = f(x) + g(x)$ platí $\mathcal{D}(h) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$;
- pro $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ platí $\mathcal{D}(h) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$;
- pro $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ platí $\mathcal{D}(h) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) \setminus \{x; g(x) = 0\}$

Definice

Bud'te f, g dvě reálné funkce. Složená funkce $f \circ g$ je funkce, která každému x přiřadí $f(g(x))$.

Tvrzení

Bud'te f, g reálné funkce a bud' $h = f \circ g$. Pak

$$\mathcal{D}(h) = \{x \in \mathcal{D}(g); g(x) \in \mathcal{D}(f)\}.$$

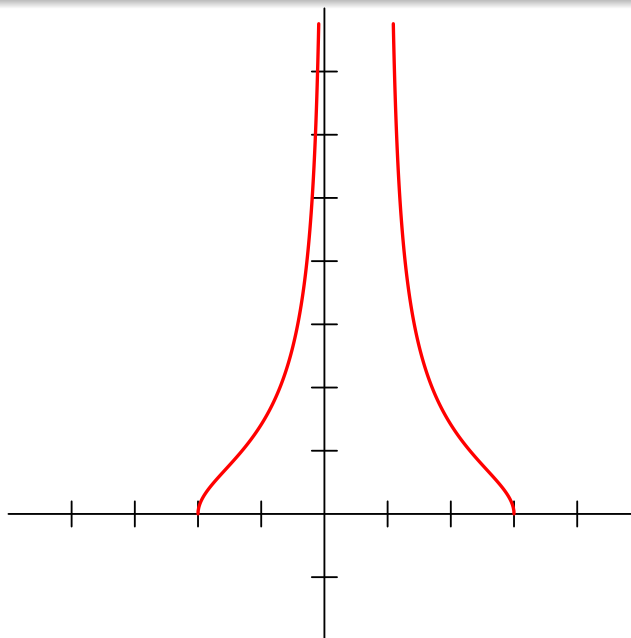
Příklad na hledání definičního oboru

Úloha

Nalezněte definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x - 6}{x - x^2}}$.

Řešení: Zkusíme-li zadat funkci do počítače, vytiskne takovýto graf:

z čehož se dá „uhodnout“, že definiční obor asi je $\langle -2, 0 \rangle \cup (1, 3 \rangle$. To ale není výpočet. Takže znovu a pořádně.

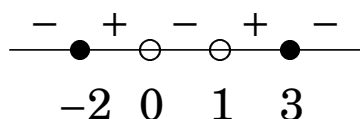


Příklad na hledání definičního oboru

Řešení: Sepíšeme podmínky

$$\frac{x^2 - x - 6}{x - x^2} \geq 0$$

$$\frac{(x - 3)(x + 2)}{x(1 - x)} \geq 0$$



$$x - x^2 \neq 0$$

$$x(1 - x) \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$x \neq 1$$

Výsledek musí vyhovovat všem podmínkám.

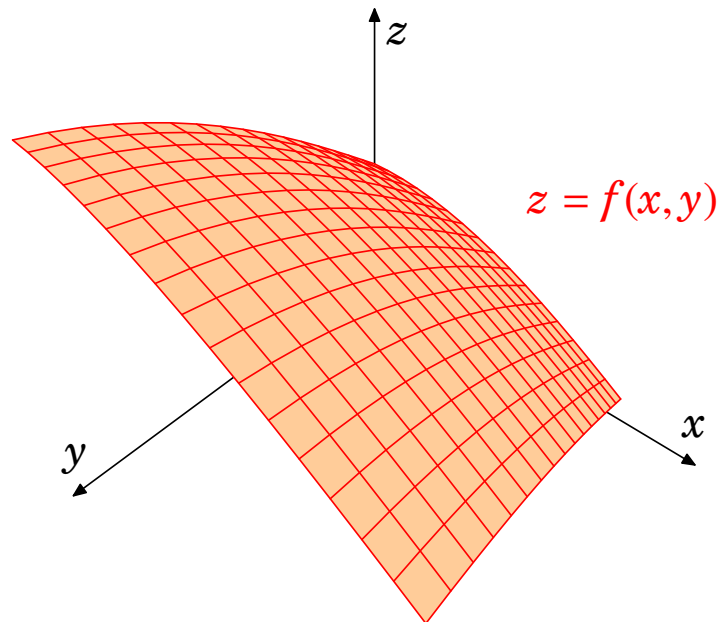
$$\mathcal{D}(f) = \langle -2, 0 \rangle \cup (1, 3 \rangle$$

$$x \in \langle -2, 0 \rangle \vee x \in (1, 3 \rangle$$

Definice funkce více proměnných

Definice

Reálná funkce n proměnných je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$.



Definiční obory funkcí více proměnných

Úloha

Načrtněte definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - 16}{2y - x^2}} - \sqrt{4 - x^2}$.

Řešení: Sepíšeme a vyřešíme podmínky

$$4 - x^2 \geq 0$$

$$-x^2 \geq -4$$

$$x^2 \leq 4$$

$$|x| \leq 2$$

$$2y - x^2 \neq 0$$

$$y \neq \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{x^2 + y^2 - 16}{2y - x^2} \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \geq 16 \quad \vee \quad x^2 + y^2 \leq 16$$

$$y > \frac{x^2}{2}$$

$$y < \frac{x^2}{2}$$

$$x \leq 2 \quad \wedge \quad x \geq -2$$

Definiční obory funkcí více proměnných

