

Číselné soustavy a převody mezi nimi

- Základní požadavek na počítač je schopnost zobrazovat a pamatovat si čísla a provádět operace s těmito čísly. Čísla mohou být zobrazena v různých číselných soustavách. Většina lidí používá **desítkovou soustavu**. Tato soustava reprezentuje čísla v mocninách deseti a byla pravděpodobně vyvinuta vzhledem k faktu že člověk má 10 prstů. Základ této soustavy je 10, neboť je použito 10 základních číslic (0 - 9). Poloha číslice v čísle určuje jeho váhu, čímž je možné vyjádřit čísla větší než 10. Je ovšem možné vybudovat číselnou soustavu s libovolných celočíselným základem.
- Výpočetní stroje mohou být samozřejmě zkonstruovány na základě libovolné číselné soustavy, nicméně všechny počítače jsou založeny na **binární soustavě**. Je totiž mnohem snadnější rozlišit mezi dvěma stavy než např. mezi deseti. Ve všech oborech lidské činnosti se setkáváme s případy, kdy předměty nebo vlastnosti nebývají dvou užitečných stavů (spínač je zapnut nebo vypnut, proud obvodem protéká nebo neprotéká, díry v pásce nebo štítku jsou nebo nejsou vyděrovány, atd.). Je jednodušší a mnohem spolehlivější navrhnout obvody, které rozlišují pouze mezi dvěma stavy (binární 0 a binární 1) než mezi více, například deseti stavy. Nevýhodou dvojkové soustavy je, že čísla (posloupnosti bitů) jsou velmi dlouhá a obtížně zapamatovatelná. Pro její jednodušší zápis se proto používá **osmičková a šestnáctková soustava**.

■ Obecná definice soustavy

Obecná definice soustavy:
$$\check{C}_{10} = \sum_{e=n}^{-m} k_e \cdot Z^e$$

$\check{C}$ - hodnota čísla v desítkové soustavě
 Z - základ soustavy (10, 2, 8, 16, 60)

k - koeficient, cifra
 e - exponent základu = $(-m, n)$

■ **Rozvoj celé soustavy** - slouží k převodu z nedekadické do dekadické soustavy.

$$\check{C}_{10} = k_n \cdot Z^n + \dots + k_2 \cdot Z^2 + k_1 \cdot Z^1 + k_0 \cdot Z^0 + k_{-1} \cdot Z^{-1} + k_{-2} \cdot Z^{-2} + \dots + k_{-m} \cdot Z^{-m}$$

$$\begin{aligned}(71\,285,369)_{10} &= 7 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} \\(1234,56)_{16} &= 1 \cdot 16^3 + 2 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0 + 5 \cdot 16^{-1} + 6 \cdot 16^{-2} = (4660,333)_{10} \\(1010111,0011)_2 &= 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} = \\&= 64 + 0 + 16 + 0 + 4 + 2 + 1 + 0 + 0 + 0,125 + 0,0625 = \\&= (87,1875)_{10}\end{aligned}$$

■ **Cifry číselné soustavy:**

$$k_e \in \{0, 1, \dots, Z-1\}$$

$Z = 2$	$\rightarrow$	$\{0, 1\}$
$Z = 8$	$\rightarrow$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$Z = 16$	$\rightarrow$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A(10), B(11), C(12), D(13), E(14), F(15)\}$

Převod desítkového celého čísla

Do osmičkové soustavy

■ Mocniny základu $Z = 8$ jsou:

8^6	8^5	8^4	8^3	8^2	8^1	8^0
262 144	32 768	4096	512	64	8	1

■ **Postup:**

- Při převodu čísla v desítkové soustavě do čísla vyjádřeného v osmičkové soustavě nejprve zjistíme nejvyšší možnou mocninu základu $Z = 8$, kterou dané číslo obsahuje a dále kolikrát ji obsahuje,
- Toto číslo představuje první cifru převáděného čísla a proto její hodnotu zapíšeme,
- Odečteme od desítkového čísla násobek této cifry a zjistíme zbytek,
- Dále opět zjistíme, zda zbytek obsahuje v pořadí další možnou mocninu základu $Z = 8$ a kolikrát ji obsahuje. Pokud je zbytek menší než tato mocnina Z , na další pozici zapíšeme nulu. Pokud je hodnota zbytku větší než mocnina Z , na další pozici píšeme tuto mocninu,
- Postup opakujeme až do doby, kdy je zbytek nulový.

■ **Příklad**

Čísla v desítkové soustavě převed'te na čísla vyjádřená v soustavě osmičkové.

$$(250)_{10} \rightarrow 3 \cdot 64, 7 \cdot 8, 2 \cdot 1 \rightarrow (372)_8$$

Zbytky: 58, 2

$$(523)_{10} \rightarrow 1 \cdot 512, 0 \cdot 64, 1 \cdot 8, 3 \cdot 1 \rightarrow (1013)_8$$

Zbytky: 11, 3

$$(5324)_{10} \rightarrow 1 \cdot 4096, 2 \cdot 512, 3 \cdot 64, 1 \cdot 8, 4 \cdot 1 \rightarrow (12314)_8$$

Zbytky: 1228, 204, 12, 4

Do dvojkové soustavy

■ Mocniny základu $Z = 2$ jsou:

2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

■ **Postup:**

- Při převodu čísla v desítkové soustavě do čísla vyjádřeného v binární soustavě nejprve zjistíme nejvyšší možnou mocninu základu $Z = 2$, kterou dané číslo obsahuje,
- Na první pozici převáděného čísla zapíšeme logickou hodnotu 1,
- Odečteme od desítkového čísla tuto mocninu a zjistíme zbytek,
- Dále opět zjistíme, zda zbytek obsahuje v pořadí další možnou mocninu základu $Z = 2$. Pokud je zbytek menší než tato mocnina, na další pozici zapíšeme nulu. Pokud je hodnota zbytku větší než mocnina Z , na další pozici píšeme opět logickou hodnotu 1.
- Postup opakujeme až do doby, kdy je zbytek nulový.

■ Příklad

Čísla v desítkové soustavě převed'te na čísla vyjádřená v binárním kódu.

$$(38)_{10} \rightarrow 1 \cdot 32, 0 \cdot 16, 0 \cdot 8, 1 \cdot 4, 1 \cdot 2, 0 \cdot 1 \rightarrow (100110)_2$$

Zbytky: 6, 2

$$(715)_{10} \rightarrow (1011001011)_2$$

Zbytky: 203, 75, 11, 3

$$(3221)_{10} \rightarrow (110010010101)_2$$

Zbytky: 1173, 149, 21, 5, 1

Převod desítkového desetinného čísla

Do dvojkové soustavy

- Dané desetinné číslo rozdělíme na celočíselný základ a desetinný zbytek. U celočíselného základu postupujeme viz výše. U **desetinného zbytku můžeme postupovat dvojím způsobem:**

■ Postup 1:

- Opět zjistíme, kolikrát desetinný zbytek obsahuje, v tomto případě nejvyšší možnou zápornou mocninu základu $Z = 2$,
- Pokud toto desetinné desítkové číslo danou zápornou mocninu základu $Z = 2$ obsahuje, do příslušné pozice převáděného čísla zapíšeme logickou hodnotu 1. Pokud číslo vyjádřené desítkově tuto mocninu Z neobsahuje, na danou pozici zapíšeme logickou hodnotu 0.
- Postup opakujeme až do doby, kdy je zbytek nulový nebo případně do dosažení počtu desetinných míst, které z hlediska přesnosti vyžadujeme.

- **Záporné mocniny základu $Z = 2$ jsou:**

2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125

■ Příklad:

Desetinná čísla v desítkové soustavě převed'te na čísla vyjádřená v binární soustavě.

$$(27,125)_{10}: 27 \rightarrow 1 \cdot 16, 1 \cdot 8, 0 \cdot 4, 1 \cdot 2, 1 \cdot 1 \rightarrow 11011$$

Zbytek: 11, 3, 1

$$0,125 \rightarrow 0 \cdot 0,5, 0 \cdot 0,25, 1 \cdot 0,125 \rightarrow 001$$

$$(27,125)_{10} \rightarrow (11011,001)_2$$

$$(312,686)_{10}: 312 \rightarrow 1 \cdot 256, 0 \cdot 128, 0 \cdot 64, 1 \cdot 32, 1 \cdot 16, 1 \cdot 8, 0 \cdot 4, 0 \cdot 2, 0 \cdot 1 \rightarrow 100111000$$

Zbytek: 56, 24, 8

$$0,686 \rightarrow 1 \cdot 0,5, 0 \cdot 0,25, 1 \cdot 0,125, 0 \cdot 0,0625 \rightarrow 0,1010 \dots (\text{přesnost na 4 místa})$$

$$(312,686)_{10} \rightarrow (100111000,1010)_2$$

■ Postup 2:

U tohoto způsobu převádění není třeba znát záporné mocniny základu $Z = 2$. Jako v předchozím případě oddělíme celočíselný základ od desetinného zbytku. Celočíselný základ převádíme jako výše. U **desetinného zbytku postupujeme následovně:**

- Desetinný zbytek vynásobíme základem $Z=2$ a zjistíme, zda je výsledná hodnota větší než číslo 1,
- Pokud ano, na příslušnou pozici převáděného čísla zapíšeme cifru 1 a zároveň hodnotu 1 od hodnoty desetinného zbytku odečteme,
- Pokud hodnota desetinného zbytku nedosahuje hodnoty 1, na příslušnou pozici převáděného čísla zapíšeme hodnotu 0 a číslo 1 od zbytku neodečítáme.
- Daný zbytek (po odečtení i neodečtení hodnoty 1) opět vynásobíme základem $Z=2$ a taktéž zjišťujeme, zda je větší či menší než hodnota 1.
- Postup opakujeme opět do doby, kdy zbytek dosáhne nulové hodnoty nebo do počtu desetinných míst, které jsou vyžadovány.

$$N = \sum_{i=-1}^{-m} a_i \cdot Z^i \quad \text{kde } a_i = 0, 1$$

$$2 \cdot N = a_{-1} + \underbrace{\frac{1}{2}a_{-2} + \frac{1}{4}a_{-3} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}}a_{-m}}_{0 \leq M' < 1}$$

$$2N < 1 \Leftrightarrow a_{-1} = 0 \quad \text{a} \quad M' > 0$$

$$2N > 1 \Leftrightarrow a_{-1} = 1 \quad \text{a} \quad M' > 0$$

$$2N = 1 \Leftrightarrow a_{-1} = 1 \quad \text{a} \quad M' = 0$$

$$2M < 1 \Leftrightarrow a_{-2} = 0 \quad \text{a} \quad M' > 0$$

$$2M > 1 \Leftrightarrow a_{-2} = 1 \quad \text{a} \quad M' > 0$$

$$2M = 1 \Leftrightarrow a_{-2} = 1 \quad \text{a} \quad M' = 0$$

...

■ Příklad:

Desetinná čísla v desítkové soustavě převed'te na čísla vyjádřená v binární soustavě.

$(0,853)_{10}$: $0,853 \cdot 2 = 1,706 > 1$ píšeme 1
 $1,706 \cdot 2 = 1,412 > 1$ píšeme 1 a odečteme jedničku
 $0,412 \cdot 2 = 0,824 < 1$ píšeme 0 a jedničku neodečítáme
 $0,824 \cdot 2 = 1,648 > 1$ píšeme 1 a odečteme jedničku
 $0,648 \cdot 2 = 1,296 > 1$ píšeme 1 a odečteme jedničku
 $0,296 \cdot 2 = 0,592 < 1$ píšeme 0 a jedničku neodečítáme
takto pokračujeme až do požadovaného počtu desetinných míst.

$$(0,853)_{10} \rightarrow (0,110110)_2$$

Převod z osmičkové do dvojkové soustavy

■ Postup:

- Při převodu čísla vyjádřeného osmičkově na číslo ve dvojkové soustavě opět zjišťujeme (nyní ale pro každou pozici osmičkového čísla zvlášť) nejvyšší možnou mocninu základu $Z=2$, kterou číslo obsahuje,

- Tak jako v předchozích případech, pokud číslo danou mocninu základu obsahuje, zapíšeme na příslušnou pozici logickou hodnotu 1. Pokud osmičková číslice mocninu základu neobsahuje, zapíšeme na pozici logickou hodnotu 0,
- Takto postupujeme u všech cifer, ze kterých je číslo v osmičkové soustavě složeno. Každá cifra osmičkového čísla se pak převede **na trojici** cifer ve dvojkové soustavě.

■ Příklad:

Čísla vyjádřená v osmičkové soustavě převed'te na čísla v binárním kódu.

$(701)_8 \rightarrow (111\ 000\ 001)_2$
 $(3764)_8 \rightarrow (011\ 111\ 110\ 100)_2$
 $(1233)_8 \rightarrow (001\ 010\ 011\ 011)_2$

Převod z dvojkové do osmičkové soustavy

■ Postup:

- Posloupnost bitů rozdělíme od zadu do trojic, neboť abychom zapsali nejvyšší číslo v osmičkové soustavě, tj 7 (111), potřebujeme tři cifry.
- Jednotlivé bity ze vzniklých trojic násobíme mocninami základu $Z = 2$, které jsou umístěny na shodných pozicích.
***Poznámka:** Jestliže na počátku čísla ve dvojkové soustavě nedostaneme trojici bitů, doplníme do trojice logické hodnoty 0.*
- Všechny bity ve trojici vynásobíme mocninami základu Z na příslušných pozicích a hodnoty sečteme.
- Tímto způsobem postupujeme u všech trojic.

■ Příklad:

Čísla uložená v binárním kódu vyjádřete v osmičkové soustavě.

$(10\ 111\ 001\ 010)_2 \rightarrow 2, 4+2+1, 0+0+1, 0+2+0 \rightarrow (2712)_8$
 $(10\ 100\ 010\ 110)_2 \rightarrow 1, 4, 2, 6 \rightarrow (2426)_8$
 $(10\ 111\ 001\ 010)_2 \rightarrow 2, 7, 1, 2 \rightarrow (2712)_8$

Převod ze šestnáctkové do dvojkové soustavy

■ Postup:

- Při převodu čísla vyjádřeného šestnáctkově na číslo ve dvojkové soustavě opět zjišťujeme (nyní ale pro každou cifru šestnáctkového čísla zvlášť) nejvyšší možnou mocninu základu $Z = 2$, kterou číslo obsahuje,
- Pokud číslo danou mocninu základu obsahuje, zapíšeme na příslušnou pozici logickou hodnotu 1. Pokud šestnáctková číslice mocninu základu neobsahuje, zapíšeme na pozici logickou hodnotu 0,
- Takto postupujeme u všech cifer, ze kterých je číslo v šestnáctkové soustavě složeno. Každá cifra šestnáctkového čísla se pak převede **na čtveřici** cifer ve dvojkové soustavě.

■ **Příklad:**

Čísla vyjádřená v šestnáctkové soustavě převed'te na čísla v binárním kódu.

$(1A5)_{16} \rightarrow (0001\ 1010\ 0101)_2$
 $(3E68)_{16} \rightarrow (0011\ 1110\ 0110\ 1000)_2$
 $(B23D)_{16} \rightarrow (1011\ 0010\ 0011\ 1101)_2$

Převod z dvojkové do šestnáctkové soustavy

■ **Postup:**

- Číslo ve dvojkové soustavě rozdělíme od zadu po čtveřicích bitů (abychom mohli zapsat nejvyšší šestnáctkové číslo F (15), potřebujeme 4 cifry),
- Poté jednotlivé bity ve čtveřicích vynásobíme pozicí mocniny základu $Z = 2$, kterou zaujímají (opět od nejvyšší hodnoty mocniny základu $Z = 2$).
- Hodnoty bitů v každé čtveřici sečteme. Takto postupujeme se všemi vzniklými čtveřicemi.
- Cifry, které vznikly ze čtveřic bitů, pak převedeme do hexadecimálního tvaru.

■ **Příklad:**

Čísla ve dvojkové soustavě vyjádřete jako čísla v soustavě hexadecimální.

$(011010000)_2 \rightarrow 0\ 1101\ 0000 \rightarrow 0, 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1, 0 \rightarrow 13 \rightarrow (D0)_{16}$
 $(100001110011)_2 \rightarrow 100\ 0111\ 0011 \rightarrow 8, 4+2+1, 2+1 \rightarrow (873)_{16}$
 $(111110010100)_2 \rightarrow 1111\ 1001\ 0100 \rightarrow 15\ 9\ 4 \rightarrow (F94)_{16}$

Převod mezi osmičkovou a šestnáctkovou soustavou

■ Proč používáme osmičkovou a šestnáctkovou soustavu?

- Převod mezi osmičkovou, šestnáctkovou a dvojkovou soustavou je velmi snadný.
- Převod mezi uvedenými soustavami je vzájemně jednoznačný, tj. nehrozí situace, kdy číslo s konečným počtem desetinných míst v jedné soustavě by mělo nekonečný počet desetinných míst v jiné soustavě.

■ **Postup:**

Nejjednodušší způsob převodu mezi čísly v šestnáctkové a osmičkové soustavě je přes soustavu binární. Binární kód pak rozdělíme po trojicích (čtveřicích) bitů a opět vynásobíme mocninami základu $Z = 2$ na příslušných pozicích.

■ **Příklad:**

Čísla vyjádřená v hexadecimální soustavě převed'te do soustavy osmičkové a naopak.

$(1AC37F)_{16} \rightarrow 011\ 010\ 110\ 000\ 110\ 111\ 111 \rightarrow (6541577)_8$
 $(357231)_8 \rightarrow 0001\ 1101\ 1110\ 1001\ 1001 \rightarrow 1\ 13\ 14\ 9\ 9 \rightarrow (1DE99)_{16}$