

Simplexová metoda

Simplexová metoda, je jedním ze způsobů, jak řešit úlohy lineárního programování. Tato metoda vede k cíli, nalezení optimálního řešení, během konečného počtu kroků, pokud se při prvním kroku neukáže, že nemá přípustné řešení, nebo pakliže nemá řešení degenerované, nebo k tomu, že nám ukáže že nemá daná úloha optimální řešení vůbec.

Dále se pokusím popsat postup, jak pomocí simplexového algoritmu vyřešit úlohu lineárního programování.

Nejprve převedeme soustavu omezujících podmínek na rovnicový kanonický tvar pomocí doplňkových a pomocných proměnných. A sestavíme simplexovou tabulku. Pak provedeme test optimality, pro max: $z_j - c_j \geq 0$ pokud je tak pro všech j pak je řešení v simplexové tabulce optimální, pro min: je vše stejné jen obrácená nerovnost. Pokud test optimality nevyhovuje, vybereme sloupec s nejnižší hodnotou a provádíme test přípustnosti kde vybereme řádek, takto vzniklý prvek označíme jako pivot, pro jordanovu eliminační metodu a zařadíme ho do báze. Tento postup opakujeme tak dlouho, dokud nedostaneme optimální řešení.

Předpoklady pro simplexový algoritmus:

Soustava omezujících podmínek musí být vyjádřitelná v rovnicovém tvaru.

Proměnné musí mít kladné hodnoty pravých stran $\vec{b} \geq 0$

Soustava podmínek musí mít kanonický tvar.

Simplexová tabulka:

Záhlaví (účelová funkce)		
	$\tilde{A}$	$\vec{b}$
		$\frac{\beta_i}{\alpha_{ir}}$
	$z_j - c_j$	z_r

Lineární programování

Lineární programování je úloha při které se snažíme nalézt extrém lineární funkce více proměnných vyjádřených rovnicemi nebo nerovnicemi. Obecně to lze vyjádřit:

Účelová funkce:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

za podmínek:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

.

.

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_i \geq 0$$

řešení úlohy lineárního programování mohou být:

přípustné řešení, to je takové řešení lineárních rovnic které vyhovuje podmínkám nezápornosti.

Optimální řešení, to je takové přípustné řešení které maximalizuje účelovou funkci.

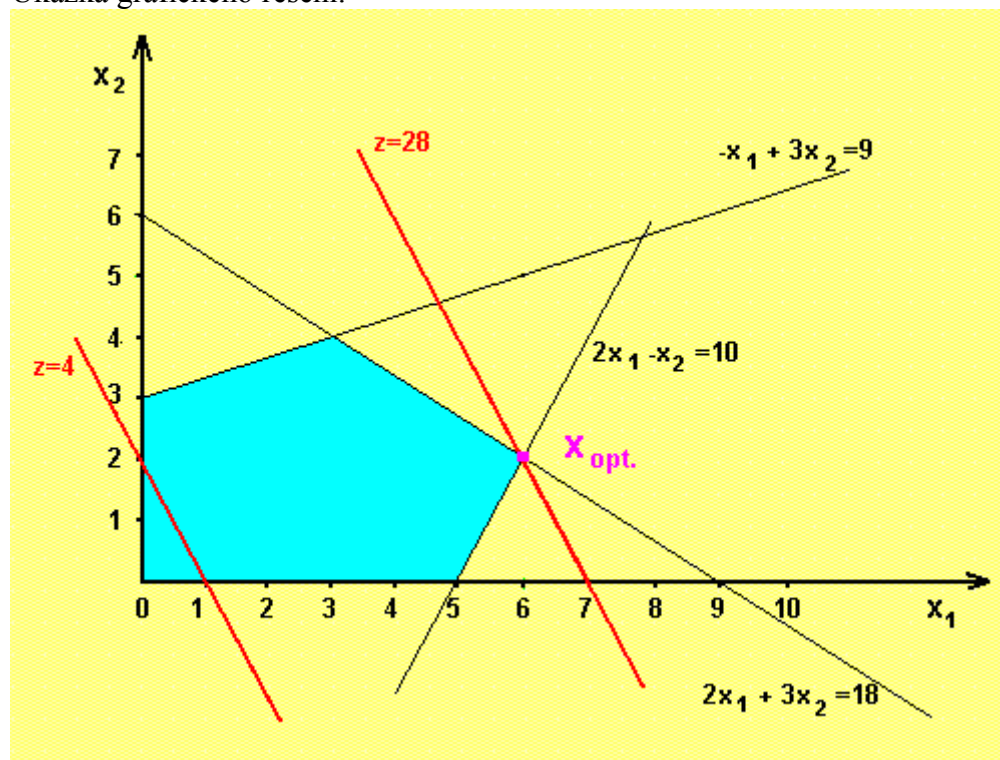
Základní řešení je takové přípustné řešení které má nejvýše m kladných složek a nejméně n-m nulových složek.

Degenerované řešení, je takové řešení, které má více než n-m nulových složek.

Každá lineární úloha může ale nemusí mít jak optimální tak přípustné řešení. úloha tedy může mít právě jedno optimální řešení (účelová fce nabývá optimální hodnoty v krajním bodě množiny přípustných řešení), nekonečně mnoha optimálních řešení (účelová fce nabývá optimální hodnoty v dvou krajních bodech, a ve všech bodech jejich spojnice), účelová vce může na množně přípustných řešení neomezeně růst či klesat.

Jednoduché lineární úlohy lze řešit grafickou metodou, ale je pro dvě proměnné, takže má malý praktický význam.

Ukázka grafického řešení:



Vícekritériální optimalizační úlohy

Složité reálné situace mají za následek, že rozhodování podle jediného kritéria nestačí. Je proto třeba se rozhodovat na základě celé množiny rozhodovacích kritérií. Účelem rozhodnutí v těchto situacích je buď nalezení nejlepší varianty podle všech uvažovaných hledisek nebo vyloučení neefektivních variant, respektive uspořádání množiny variant.

Cílem vícekritériálního optimalizačního modelu je najít extrém všech účelových funkcí za podmínek, že vektor proměnných je z množiny přípustných řešení. Množina přípustných řešení má nekonečně mnoho řešení. Řešení z hlediska více kritérií se nenazývá optimální, ale kompromisní řešení. Kompromisní řešení je tedy takové řešení, které je z hlediska všech kritérií to nejvýhodnější. V modelu jde o důležitost jednotlivých kritérií, jde o takzvanou preferenci kritérií, která je vyjádřena váhami jednotlivých kritérií. Preference kritérií můžou být dány:

- nominálně – nevíme, zda jsou některá kritéria lepší. Používáme aspirační úrovně. Aspirační úrovně jsou požadované hodnoty kritérií, které chceme dosáhnout.
- ordinálně – víme, že nějaká skupina kritérií je důležitější než jiná
- kardinálně – stanovujeme přímo váhy jednotlivým kritériím často v %, potom musí být součet roven 1

Pro řešení úloh vícekritériální optimalizace bylo vyvinuto několik různých výpočetních metod, které se liší jednak metodickým přístupem k výběru optimálního řešení a jednak mírou použitelnosti. Všechny metody lze rozdělit do několika skupin.

Do první skupiny zahrnujeme metody, při kterých se vychází z dílčí optimalizace a pak se vhodně zvolenými postupy pokračuje ve výpočtu vyhovujícího kompromisního řešení. Postup: vybereme jedno kritérium a podle toho řešíme, následně dostaneme dílčí (parciální) řešení. Dílčích řešení je tolik kolik je kritérií. Z dílčích řešení vytvoříme kritériální matici. Na diagonálu v kritériální matici máme optimální hodnoty z hlediska jednotlivých kritérií, z hlediska celku se jedná o ideální řešení. V tomto smyslu se dá také mluvit o bazálním řešení, což je řešení opačné k ideálnímu, jedná se tedy o nejhorší hodnoty kritérií.

Druhá skupina metod se vyznačuje tím, že se jednotlivé kritériální funkce pomocí vhodně zvoleného operátoru agregují do jedné globální kritériální funkce. Tím se vícekritériální úloha převádí na klasickou úlohu s jedinou kritériální funkcí. Agregace na základě součinů koeficientů kritériálních funkcí. Musí být splněna podmínka, že všechny funkce jsou stejného typu, tj. maximalizační nebo minimalizační. Př. $F_1(x) = c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n \rightarrow \max$, $F_2(x) = c_{21}x_1 + \dots + c_{2n}x_n \rightarrow \max$, agregovaná funkce $F(x) = c_{11}c_{21}x_1 + \dots + c_{1n}c_{2n}x_n \rightarrow \max$. Dále jsou agregace pomocí součtové funkce a agregace pomocí konvexní lineární kombinace, při této agregaci předpokládáme, že uvažovaná kritéria mají přiděleny váhy vyjadřující stupeň důležitosti. Váhové konstanty mohou mít charakter proměnných.

Třetí skupina souvisí s převodem kritérií na omezení. Předpokladem je to, že při stanovení úlohy není moc velký rozdíl mezi omezujícími podmínkami a kritérii. Převod kritérií na omezení $f_k(x) \Rightarrow Z_k$ pro max a naopak pro min, Z_k jsou požadované hodnoty kritérií.

Třetí skupina zahrnuje metody vhodné pro řešení specifických úloh cílového programování. Pro tento typ úloh je charakteristické, že pro každou uvažovanou kritériální funkci se předem zadává požadovaná cílová úroveň, které by se mělo dosáhnout. Smyslem optimalizace je vyhledat takové kompromisní řešení, které se k této úrovni co nejvíce přiblíží.

Teorie rozhodování

Podstatou teorie rozhodování tvoří hry proti přírodě. V těchto hrách je hráčem A rozhodovatel, hráčem B, respektive protihráčem jsou všechny možné reálné stavy okolností, tzn. neinteligentní hráč.

Strategie uplatňované jedním hráčem, respektive rozhodnutí učiněná při řešení problému se nazývají alternativami. Alternativy se navzájem vylučují. Zvolí-li hráč jednu alternativu, nemůže současně zvolit i jinou. Je důležité, aby si rozhodovatel ujasnil všechna možná rozhodnutí, tj. alternativy. Stavy, které ovlivňují rozhodnutí prvního hráče se nazývají stavy okolností. Stavy okolností odpovídají neinteligentním hráčům v teorii her. Každá alternativa má za odpovídajícího stavu okolností výsledek, kterým je výplata. Každému rozhodnutí odpovídá tolik výplat, kolik různých stavů okolností připadá v úvahu a každému stavu okolností odpovídá tolik výplat, kolik alternativ řešení uvažujeme. Jestliže je m alternativ a n stavů okolností, vzniká výplatní matice $m \times n$.

Rozhodovatel potřebuje vědět, který stav okolností se realizuje v době rozhodnutí. Tato informace umožňuje zvolit optimální alternativu. Pokud rozhodovatel ví, který stav okolností nastane, rozhoduje se na podmínek jistoty. Pokud rozhodovatel nemá vůbec žádnou představu o tom, jaký bude stav okolností, rozhoduje se za podmínek nejistoty. A poté nastává situace, kdy rozhodovatel sice neví s jistotou, který stav okolností nastane, ale na základě různých poznatků a zpráv soudí, který stav pravděpodobně nastane. Pak rozhoduje za podmínek rizika. Riziko je charakterizováno vektorem pravděpodobností jehož konkrétní hodnoty vyjadřují pravděpodobnosti realizace konkrétních stavů okolností.

Rozhodování za jistoty je zcela jednoduché, pokud víme, že nastane určitý stav okolností, vybereme daný sloupeček a z něho $\max v_{ij}$.

Rozhodování za rizika. Známe vektor pravděpodobnosti realizace konkrétních stavů okolností, proto vybereme alternativu a_i : $v_i = \max (\sum p_j v_{ij})$

Rozhodování za nejistoty, pro výběr alternativy existuje několik postupů, při nichž jsou hodnoceny buď výplaty nebo ztráty jednotlivých alternativ. Maximaxový přístup, je přístup optimistický. Řešením při tomto postupu je alternativa, která přinese maximální zisk. Za účelem nalezení maximální výplaty vyhledává rozhodovatel maximální výplatu pro každou alternativu a z nich vybere opět maximum. $R_1 : v_1 = \max \max v_{ij}$. Maximinový přístup, je spíše přístup pesimistický. Z každé alternativy vybereme nejnižší výplatu a z nich pak tu nejvyšší. $R_1 : v_1 = \max \min v_{ij}$. Princip minimaxové ztráty vychází z matice ztrát. Jako optimum se pak vybírá alternativa, která odpovídá minimální z maximální ztrát. Princip nedostatečné evidence. Tento přístup se snaží zohlednit všechny výplaty a jednotlivé stavy okolností považuje za stejně pravděpodobné. Zohledňování výplat se provádí jejich průměrováním. $R_1 : v_1 = \max (1/s \sum v_{ij})$.

Výplatní tabulky mohou být nahrazeny grafickými pomůckami, mezi nimiž zaujímají důležité místo rozhodovací stromy. Strom – uzly a to rozhodovací, z nichž vycházejí hrany, které zobrazují alternativy a uzly situační, z nichž vycházejí hrany představující stavy okolností. Strom končí listovými uzly.

Teorie her

Teorie her se zabývá řešením konfliktních situací, kterých se účastní alespoň dva účastníci s různými nebo dokonce protichůdnými zájmy. Cílem je najít takové chování každého účastníka, při němž výsledek bude z hlediska každého z nich optimální.

Konfliktní situace jsou všechny situace, ve kterých jde o střed zájmů účastníků konfliktu. Konfliktní situace může mít antagonistický nebo neantagonistický charakter. V případě antagonistického konfliktu dosažení cíle jedním z účastníků zamezí pozitivnímu výsledku ostatních, úspěch každého z hráčů je možný pouze na úkor úspěšnosti ostatních hráčů. V případě neantagonistického konfliktu mají všichni účastníci možnost více či méně realizovat cíle. V neantagonistickém konfliktu nejsou cíle hráčů protichůdné a hráči mohou i spolupracovat. Každý účastník konfliktu je v teorii her nazýván hráčem. Hráče lze chápat jako souhrn určitých zájmů a cílů. Podle počtu hráčů dělíme hry na hry dvou hráčů a hry více hráčů. Hráči mohou být inteligentní a neinteligentní. Inteligentní hráč hraje dobře a má zájem na výsledku hry, kdežto neinteligentní hráč se konfliktu jenom účastní bez zájmu o výsledek hry. Hry lze také dělit na kooperativní a nekooperativní. Při kooperativní hře hráči tvoří koalice a spolupracují. V nekooperativní hře se hráči nesdružují. Je zřejmé, že v antagonistickém konfliktu není možné vytvářet koalice. Každý hráč používá určité strategie, pokud množina strategií alespoň jednoho hráče je nekonečná, jde o nekonečnou hru. Strategie je v podstatě soubor tahu od začátku do konce hry. Pro každého hráče je definována výplatní funkce, která každé kombinaci strategií hráče přiřadí velikost výplaty tohoto hráče. Podle vztahu mezi výplatními funkcemi jednotlivých hráčů se mluví o hrách s konstantním, nulovým a nekonstantním součtem.

Sestavit model hry znamená definovat její hráče, definovat jejich strategie a formulovat výplatní funkce, výplaty hry. Model hry v rozvinutém tvaru zobrazuje strategie jako posloupnosti tahů. Hru je možno, bez ohledu na počet hráčů, formalizovat pomocí stromu.

Maticové hry – viz esej MH

Zvláštním případem maticových her jsou hry s neinteligentním hráčem, respektive hry s přírodou. Hry s přírodou budou pravděpodobně představovat hry za podmínek nejistoty. Pro výběr strategií inteligentního hráče existuje několik kritérií. Waldovo kritérium je pesimistické kritérium založené na maximinovém přístupu. Z každé alternativy zvolíme tu nejmenší a z nich pak tu největší. Maximaxové kritérium je optimistické kritérium. Z každé alternativy zvolíme tu největší a z nich pak opět tu největší. Savageovo kritérium hodnotí strategie inteligentního hráče z hlediska ztrát. Použití Waldova kritéria, ale pro matici ztrát. Bernoulli-Laplaceovo kritérium navrhuje vycházet při volbě strategie inteligentního hráče z toho, že příroda svoje strategie používá rovnoměrně, jsou stejné četnosti použití. Hurwitzovo kritérium je založeno na očekávání nejlepších a nejhorších výsledků každé z nich. Stanovíme optimisticko pesimistický index. t optimismus, $1 - t$ pesimismus. $H = \max v_{ij}$, $h = \min v_{ij}$, $R_i = \max (tH + (1-t)h)$.

Maticová hra

Nejjednodušším typem her jsou hry maticové. Jsou to hry dvou hráčů s konečným počtem strategií a s nulovým součtem výplat. Nulový součet výplat znamená, že součet výplat obou hráčů je vždy roven nule, např. 1 hráč má výplatu 10, proto 2 hráč musí mít výplatu -10 . To znamená, že výplatní funkce obou hráčů jsou opačné, takže je možno pracovat pouze s jedinou výplatní funkcí. K popisu maticové hry stačí tedy pouze jedna matice výplat, přičemž druhá matice by byla akorát s opačným znaménkem. V matici výplaty odpovídají řádky strategiím prvního hráče $R_1, \dots, R_m$, sloupce strategiím druhého hráče $S_1, \dots, S_n$ a jednotlivé prvky matice v_{ij} pak výplatě prvního hráče pro kombinaci strategií (R_i, S_j) . Výplata druhého hráče s touto strategií je pak $-v_{ij}$.

Protože první hráč získá to, co druhý ztratí, říká se, že první hráč maximalizuje svoji výhru a druhý hráč minimalizuje svoji prohru. To vyplývá z opačných hodnot výplatních funkcí. Každý hráč hledá takovou strategii, aby si pro každou strategii protihráče zajistil nejvyšší možnou výhru, respektive nejnižší možnou prohru.

Řešení hry v oboru čistých strategií znamená, že hráč dosáhne svého cíle pouze pomocí jediné své strategie. Ať se hra opakuje nebo je hrána pouze jednou, optimální chování hráče se řídí touto strategií. Řešení hry v oboru čistých strategií existuje pouze tehdy, když lze nalézt sedlový bod a sedlový bod existuje právě tehdy když dolní cena hry se rovná horní ceně hry. Sedlový bod představuje dvojici strategií, přičemž pokud by kterýkoli hráč použil jinou strategii než uvedenou v sedlovém bodě, výsledek hry bude horší. Dolní cena hry $= \min \max v_{ij}$ a horní cena hry $= \max \min v_{ij}$. Zároveň pokud se rovná dolní a horní cena hry pak se to rovná také ceně hry v .

Řešení hry v oboru smíšených strategií znamená, že se hráč nemůže řídit pouze jedinou ze svých strategií, ale musí najít způsob používání strategií v jednotlivých partiích, tj. rozdělení četností, podle kterého má svoje strategie střídat. Smíšená strategie je charakterizována vektorem pravděpodobností, jehož každý prvek vyjadřuje pravděpodobnost použití příslušné čisté strategie hráče. Pokud tedy matice nemá sedlový bod, hledáme řešení v oboru smíšených strategií. Při výpočtu máme vektory pravděpodobností prvního hráče $r = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ a druhého hráče $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ přičemž platí $\sum r_i = 1$, $\sum s_i = 1$, $r_i > 0$, $s_i > 0$.

Pro výpočet smíšených strategií použijeme pomocnou lineární úlohu a řešíme na základě simplexu.

Dualita

Základem je dvojice duálně sdružených lineárních optimalizačních modelů

dualita – vztah mezi dvěma vektorovými prostory

- v případě úloh LP se dualita projevuje tak, že ke každé úloze LP se dá přiřadit jiná úloha LP zvaná duální
- obě úlohy mají tytéž parametry, ale s jinou ekonomickou interpretací
- odlišnosti duálního modelu od lin. opti. modelu jsou: v duálním modelu je matice soustavy A transponována, nerovnosti se změnil v opačné, složky vektoru pravých stran primárního modelu přešly do koeficientu účelové fce duálního modelu a naopak, maximalizace se změnila na minimalizaci a naopak
- nelze říct která úloha je primární a která duální, nelze to poznat
- duální úlohu nelze vytvořit náhodně, použijeme určitá pravidla:

vektor – sou značeny **žlutě**

MAX	MIN
A	A^T
b	c
c	b
$Ax \leq b$	$y \geq 0$
$Ax = b$	$y = \text{lib.}$
$Ax \geq b$	$y \leq 0$
$x \geq 0$	$A^T y \geq c$
$x = \text{lib.}$	$A^T y = c$
$x \leq 0$	$A^T y \leq c$

- pro dvojici sdružených úloh platí tyto základní věty:
- má-li jeden ze sdružených modelů optimální řešení s konečnou hodnotou účelové fce, má i druhý model opti. řešení s konečnou hodnotou účelové fce. a hodnoty obou účel. fci se sobě rovnají; to znamená $\text{MAX } p = \text{MIN } d$
- může-li hodnota účel. fce jednoho ze sdružených problémů růst nebo klesat neomezeně pak druhý problém nemá přípustné řešení

postup řešení:

model je nejprve nutno upravit, napr. pokud se účel. fce maximalizuje, je třeba všechny nerovnosti prim. úlohy upravit na tvar $\leq$ (provádí se vynásobením -1)

- převádíme nerovnosti podle uvedené tabulky výše
- nyní vytvoříme duální úlohu podle pravidel pro dualitu
- podle počtu omezujících podmínek duální úlohy zavedeme počet duálních proměnných
- kritériální fci získáme z vektoru pravých stran primární úlohy
- strukturní proměnné jedné úlohy odpovídají doplňkovým proměnným druhé úlohy
- z vlastností duálně sdružených úloh je jasné, že je lhostejné kterou ze sdružených úloh řešíme
- optimální řešení duální úlohy nalezneme v indexním řádku výsledné simplexové tabulky primární úlohy ve sloupcích doplňkových proměnných a opačně
- primárně přípustné řešení splňuje omezující podmínky a nezápornost; duálně přípustné řešení splňuje omezující podmínky ale může být záporné
- duální hodnoty udávají přírůstek optimální hodnoty primární účelové fce při jednotkové změně pravých stran soustavy vlastních omezení primární úlohy
- řešení duálního problému poskytuje ocenění vlastních omezení primárního modelu vzhledem k primární účelové fci, hovoříme o stínových cenách zdrojů nebo požadavků
- předpokladem použití duálně simplexového algoritmu je že kritériální řádek vyhovuje testu optimality primárního simplexového algoritmu, ale není přípustné, to znamená, některá složka vektoru základního řešení **b** je záporná;

- postup použití duálně simplexové metody:

1. ze záporných složek vektoru b vyberem složku největší v absolutní hodnotě a tím určíme klíčový řádek
2. klíčový sloupec určíme podle vztahu
$$\min \left| \frac{Z_j - C_j}{a_{rj}} \right|, a_{rj} < 0,$$
3. provedeme eliminační krok určený nalezeným klíčovým prvkem

Dopravní úloha

Dopravní problém představuje požadavek na dopravu při minimalizaci přepravních nákladů od dodavatelů k odběratelům. Cílem je najít optimální způsob přepravy od někud, někam, přes něco a případně čím.

Formulace úlohy:

Je dáno m dodavatelů s kapacitami $a_1, a_2, \dots, a_m$ a n spotřebitelů s požadavky $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Přeprava jednotkového množství od i -tého dodavatele k j -tému spotřebiteli je spojena s náklady c_{ij} (nebo c_{ij} je odpovídající kilometrová vzdálenost).

Úkolem je sestavit nejracionálnější dopravní plán, tj. určit množství x_{ij} , která se mají přepravit od i -tého dodavatele k j -tému spotřebiteli tak, aby byly splněny požadavky spotřebitelů a celkové přepravní náklady (nebo celkový objem přepravy v tzv. "tunokilometrech") byly minimální.

Předpokládáme, že náklady c_{ij} jsou konstantní, tj. nezávisí na přepravovaném množství. Dále předpokládáme, že objem kapacit se rovná objemu požadavků tj. $\sum a_i = \sum b_j$. Tento předpoklad se nazývá vyváženost dopravního systému. Vyváženost dopravního systému spočívá v tom, že vše co dodavatelé nabízejí, spotřebitelé odeberou.

V případě nevyváženého systému přidáme fiktivního odběratele nebo fiktivního dodavatele v závislosti na straně nevyváženosti. Vyváženost dopravního systému je nutná podmínka pro řešení dopravní úlohy.

$\sum x_{ij} \leq a_i, \sum x_{ij} \leq b_j, x_{ij} \geq 0, \sum \sum c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min$

Protože součet kapacit dodavatelů je roven součtu požadavků spotřebitelů je vždy jedna z těchto rovnic lineárně závislá a protože počet bazických proměnných musí být roven počtu lineárně nezávislých rovnic je bazických proměnný $m + n - 1$

Výpočet:

1. Vogelova aproximační metoda – difference = druhá nejmenší difference – nejmenší difference (pro řádky i sloupce), vybereme nejvyšší difference a nejlevnější trasu
2. Test optimality $u_i + v_j \leq c_{ij}$
3. Test přípustnosti $\max(u_i + v_j - c_{ij}) \Rightarrow$ tento prvek zařadíme do báze – vytvoříme uzavřený okruh