Strukturní analýza – odvození vektoru cenových indexů
Určeno pro studenty provozně ekonomické fakulty České zemědělské univerzity v Praze
(předměty Katedry systémového inženýrství)

V případě jakýchkoliv nesrovnalostí prosím kontaktujte:
krejcii@pef.czu.cz

Tento dokument je pro zvídavější studenty. Jeho cílem je naznačit, jak byl získán výpočetní vzorec pro vektor indexů cen j-tého odvětví, který byl prezentován na cvičeních. Vzhledem k relativně vyšší obtížnosti povedeme pro zjednodušení výpočet „odzadu".
Dokument vychází ze skript:
Kučera, P., Švasta, J. :Strukturní analýza I, skripta PEF ČZU, 2004
Pro další zjednodušení předpokládejme že máme model se dvěma odvětvími (A a B) a dvěma primárními činiteli (Z a M) – viz obrázek níže. Předpokladem je, že čtenář umí provést součin matic a má základní znalosti o strukturní analýze (input /output tabulkách).

	A	B	Y_i	X_j
A	x_{11}	x_{12}	Y_1	X_1
B	x_{21}	x_{22}	Y_2	X_2
Z	Z_1	Z_2		
M	M_1	M_2		
X_j	X_1	X_2		

Výpočetní vzorec pro vektor indexů cen j-tého odvětví I_p

$$I_p = \left(\mathbf{E} - \mathbf{A}^T\right)^{-1} \hat{\mathbf{X}}^{-1} \left(\hat{\mathbf{Z}} I_Z + \hat{\mathbf{M}} I_M\right)$$

I_Z index cen primárního činitele Z (například zisk)
I_M index cen primárního činitele M (například mzdy)
^ znamená diagonální matici

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}$$

$$I_p = \begin{pmatrix} I_{p1} \\ I_{p2} \end{pmatrix}$$

$$I_Z = \begin{pmatrix} I_{Z1} \\ I_{Z2} \end{pmatrix}$$

$$I_M = \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \end{pmatrix}$$

Odvození pozpátku:

$$\mathrm{I}_p = \left(\mathbf{E} - \mathbf{A}^T\right)^{-1} \hat{\mathbf{X}}^{-1} \left(\hat{\mathbf{Z}}\mathrm{I}_Z + \hat{\mathbf{M}}\mathrm{I}_M\right) \tag{1}$$

Převodem z pravé strany rovnice na levou získáme:

$$\hat{\mathbf{X}}\left(\mathbf{E} - \mathbf{A}^T\right)\mathbf{I}_p = \left(\hat{\mathbf{Z}}\mathrm{I}_Z + \hat{\mathbf{M}}\mathrm{I}_M\right) \tag{2}$$

Pokud matice rozepíšeme získáváme:

$$\begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} I_{p1} \\ I_{p2} \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_{Z1} \\ I_{Z2} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \end{pmatrix} \right) \tag{3}$$

Drobnou úpravou (rozdíl matic) na levé straně rovnice získáme:

$$\begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{21} \\ -a_{12} & 1-a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_{p1} \\ I_{p2} \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_{Z1} \\ I_{Z2} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \end{pmatrix} \right) \tag{4}$$

Roznásobíme matice na levé straně:

$$\begin{bmatrix} X_1 - X_1 a_{11} & -X_1 a_{21} \\ -X_2 a_{12} & X_2 - X_2 a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_{p1} \\ I_{p2} \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_{Z1} \\ I_{Z2} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \end{pmatrix} \right) \tag{5}$$

Roznásobíme matice na pravé straně:

$$\begin{bmatrix} X_1 - X_1 a_{11} & -X_1 a_{21} \\ -X_2 a_{12} & X_2 - X_2 a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_{p1} \\ I_{p2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 I_{Z1} \\ Z_2 I_{Z2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_1 I_{M1} \\ M_2 I_{M2} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Roznásobením levé strany získáme:

$$\begin{pmatrix} X_1 I_{p1} - X_1 a_{11} I_{p1} - X_1 a_{21} I_{p2} \\ -X_2 a_{12} I_{p1} + X_2 I_{p2} - X_2 a_{22} I_{p2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 I_{Z1} \\ Z_2 I_{Z2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_1 I_{M1} \\ M_2 I_{M2} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Součtem pravé strany získáme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} X_1 I_{p1} - X_1 a_{11} I_{p1} - X_1 a_{21} I_{p2} &= Z_1 I_{Z1} + M_1 I_{M1} \\ -X_2 a_{12} I_{p1} + X_2 I_{p2} - X_2 a_{22} I_{p2} &= Z_2 I_{Z2} + M_2 I_{M2} \end{aligned} \tag{8}$$

tj.

$$\begin{aligned} X_1 I_{p1} - X_1 a_{11} I_{p1} - X_1 a_{21} I_{p2} &= Z_1 I_{Z1} + M_1 I_{M1} \\ X_2 I_{p2} - X_2 a_{12} I_{p1} - X_2 a_{22} I_{p2} &= Z_2 I_{Z2} + M_2 I_{M2} \end{aligned} \tag{9}$$

Převodem z levé na pravou stranu rovnice získáme:

$$\begin{aligned} X_1 I_{p1} &= X_1 a_{11} I_{p1} + X_1 a_{21} I_{p2} + Z_1 I_{Z1} + M_1 I_{M1} \\ X_2 I_{p2} &= X_2 a_{12} I_{p1} + X_2 a_{22} I_{p2} + Z_2 I_{Z2} + M_2 I_{M2} \end{aligned} \tag{10}$$

Víme že:

$$x_{ij} = a_{ij} X_j \tag{11}$$

Dosazením (11) do (10) získáme:

$$\begin{aligned} X_1 I_{p1} &= x_{11} I_{p1} + x_{21} I_{p2} + Z_1 I_{Z1} + M_1 I_{M1} \\ X_2 I_{p2} &= x_{12} I_{p1} + x_{22} I_{p2} + Z_2 I_{Z2} + M_2 I_{M2} \end{aligned} \tag{12}$$

Což jsou známé hodnotové rovnice vyjadřující, že celková produkce se rovná odpovídajícímu sloupcovému součtu. Pouze s drobným rozšířením o cenové indexy. Všimněte si, že meziodvětvová spotřeba je násobena indexem, který koresponduje s odvětvím (prvkem systému), které pro danou vazbu vystupuje jako dodavatel (jedná se o produkci tohoto odvětví/prvku).

V případě, že se ceny nemění jsou indexy rovny jedné, po dosazení do (12) získáme známé hodnotové rovnice:

$$\begin{aligned} X_1 &= x_{11} + x_{21} + Z_1 + M_1 \\ X_2 &= x_{12} + x_{22} + Z_2 + M_2 \end{aligned} \tag{13}$$

Teď zkuste opačný postup – od hodnotových matic až k výpočetnímu vzorci pro vektor indexů cen j-tého odvětví.