

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA MANAGEMENTU A EKONOMIKY VE ZLÍNĚ

OPERAČNÍ VÝZKUM

BEDŘICH ZIMOLA



ZLÍN 2000

Recenzoval: Josef Sixta

© Bedřich Zimola, 2000

ISBN 80-214-1664-5

Obsah

PŘEDMLUVA	6
1. OPERAČNÍ VÝZKUM JAKO NÁSTROJ ŘÍZENÍ.....	7
1.1 ÚVOD	7
1.2 CHARAKTERISTIKA OPERAČNÍHO VÝZKUMU.....	7
1.3 POSTUP PŘI ŘEŠENÍ ÚLOH OPERAČNÍHO VÝZKUMU	9
1.3.1 Formulace úlohy	9
1.3.2 Sestavení modelu.....	11
1.3.3 Řešení úlohy	14
1.3.4 Ověření správnosti modelu i řešení	14
1.3.5 Realizace řešení	15
1.4 OBLASTI APLIKACE OPERAČNÍHO VÝZKUMU	15
1.5 METODY A PROSTŘEDKY OPERAČNÍHO VÝZKUMU	16
1.5.1 Matematické programování.....	16
1.5.2 Síťová analýza	17
1.5.3 Modely řízení zásob a skladů	17
1.5.4 Teorie hromadné obsluhy (teorie front).....	18
1.5.5 Optimalizace procesů obnovy	18
1.5.6 Teorie her a rozhodování v konfliktních situacích	19
1.5.7 Vícekriteriální hodnocení variant	19
1.5.8 Simulační modely.....	19
2. LINEÁRNÍ OPTIMALIZAČNÍ MODEL.....	20
2.1 ÚVOD	20
2.2 OBECNÝ MATEMATICKÝ MODEL, ZÁKLADNÍ POJMY	22
2.3 APLIKACE LINEÁRNÍHO OPTIMALIZAČNÍHO MODELU	23
2.3.1 Formulace ekonomického modelu.....	24
2.3.2 Formulace matematického modelu.....	26
2.3.3 Řešení modelu	28
2.3.4 Ekonomická interpretace řešení	29
2.4 FORMULACE TYPICKÝCH MODELŮ ÚLOH LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ ...	31
2.4.1 Kapacitní problémy	31
2.4.2 Směšovací problémy	37
2.4.3 Úlohy o dělení materiálu	39
2.4.4 Distribuční modely	42
2.5. DUALITA	48
2.5.1. Duální problém.....	48
2.5.2. Primární a duální model	48

2.5.3. Ekonomická interpretace	50
2.6. SIMPLEXOVÁ METODA	53
2.6.1. Kanonický tvar matematického modelu	53
2.6.2. Postup výpočtu	54
2.6.3. Úprava soustavy omezení na rovnice. Přídavné proměnné	55
2.6.4. Výchozí základní řešení. Simplexová tabulka	56
2.6.5. Test optimality	57
2.6.6. Přejchod na nové základní řešení. Iterační postup	58
2.6.7. Interpretace testu optimality. Stínové ceny. Řešení duálního modelu	60
2.6.8. Pomocné proměnné. Rozšířený model. Dvoufázová simplexová metoda	61
2.7 DISTRIBUČNÍ METODA	64
2.7.1 Model distribučního typu	64
2.7.2 Výchozí základní řešení	66
2.7.3 Test optimality	71
2.7.4 Přejchod na nové základní řešení	74
2.7.5 Degenerované řešení	76
2.7.6 Ekonomická interpretace nepřímých sazeb a duálního řešení	76
3. STOCHASTICKÉ MODELÝ EKONOMICKÝCH PROCESŮ	77
3.1. ÚVOD	77
3.2. STOCHASTICKÉ PROCESY MARKOVSKÉHO TYPU	77
3.3. STOCHASTICKÉ PROCESY S HODNOCENÍM A JEJICH OPTIMÁLNÍ ŘÍZENÍ	81
3.4. PROCESY SE SPOJITÝM ČASEM	82
4. MODELÝ HROMADNÉ OBSLUHY	86
4.1 ÚVOD	86
4.2 ZÁKLADNÍ PRVKY MODELŮ HROMADNÉ OBSLUHY	86
4.3 KLASIFIKACE SYSTÉMŮ HROMADNÉ OBSLUHY	88
4.4 POUŽITÍ MODELŮ HROMADNÉ OBSLUHY	88
4.5 METODY ŘEŠENÍ MODELŮ HROMADNÉ OBSLUHY	89
4.6 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI MODELŮ HROMADNÉ OBSLUHY	89
4.7 JEDNODUCHÝ EXPONENCIÁLNÍ KANÁL	91
4.7.1 Stanovení rozdělení pravděpodobností stavů ve stacionárním stavu pro systém $M/M/1/\infty$	92
4.7.2 Základní charakteristiky systému	95
4.7.3 Možnosti užití modelu	96
4.7.4. Omezená kapacita systému ($M/M/1/K$)	97
4.8. PROCESY MNOŽENÍ A ÚMRTÍ	99
4.9. PARALELNĚ ŘAZENÉ EXPONENCIÁLNÍ KANÁLY ($M/M/C/\infty$)	101
4.9.1. Omezená kapacita systému ($M/M/c/K$)	106
4.9.2. Systém bez čekacích míst ($M/M/c/c$)	108

4.10. SYSTÉMY S KONEČNÝM POČTEM PRVKŮ (CYKlickÉ SYSTÉMY)	108
4.10.1. Jeden exponenciální kanál	109
4.10.2. Paralelně řazené exponenciální kanály	111
4.11. OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHY V SYSTÉMECH HROMADNÉ OBSLUHY	112
5. ŘÍZENÍ ZÁSOb	115
5.1. ÚVOD	115
5.2. ZÁKLADNÍ POJMY TEORIE ZÁSOb	115
5.3. MODELy ŘÍZENÍ ZÁSOb	117
5.4. KLASIFIKACE MODELŮ ŘÍZENÍ ZÁSOb	120
5.5. MODELy DETERMINISTICKÉ	120
5.5.1. Jednoduchý model s jednorázovým doplněním	121
5.5.2. Jednoduchý dynamický model s pevnou velikostí doplňování	122
5.5.3. Přechodný nedostatek zásob	125
5.5.4. Systém s konečnou intenzitou doplňování – produkční model	129
5.5.5. Slevy v pořizovací ceně zásob – model s cenovou degresí	131
5.5.6. Víceproduktový skladní systém - dynamický model	132
5.6. MODELy STOCHASTICKÉ	135
5.6.1. Jednorázově vytvářená zásoba s empiricky pravděpodobnostně určenou poptávkou	135
6. SÍŤOVÁ ANALÝZA	139
6.1 ÚVOD	139
6.2 ZÁKLADY TEORIE GRAFŮ	139
6.3 ZÁKLADNÍ ÚLOHY SÍŤOVÉ ANALÝZY	141
6.3.1 Optimální spojení v síti	141
6.3.2 Nejkratší cesta síti	143
6.3.3 Toky v síti	145
6.4 ANALÝZA KRITICKÉ CESTY	147
6.4.1 Časová analýza sítě pomocí CPM	149
6.4.2 Časová analýza sítě pomocí PERT	158
6.4.3 Časově nákladová analýza sítě	161
6.4.4 Časově zdrojová analýza sítě	164
LITERATURA	168

Předmluva

Klíčem k úspěšnému řízení je rozhodování. Proces rozhodování začíná vždy, když se objeví problém. Manažer problém většinou nejdříve pojmenuje, definuje, pak formuluje cíle jeho řešení, zkoumá faktory, které ho ovlivňují, podmiňují a limitují a odhaduje možné varianty řešení. Na závěr vybere subjektivně nejlepší postup řešení s cílem nalézt optimální řešení problému. Tento proces analýzy problému má dvě základní formy: kvalitativní a kvantitativní.

Při použití pouze kvalitativního přístupu spoléhá manažer na osobní úsudek nebo na zkušenosti, získané při řešení podobného problému. Takový způsob rozhodování je nazýván empiricko-intuitivním a mnohdy může stačit ke kvalitnímu rozhodnutí. S růstem složitosti řešeného problému je však nutné kombinovat čistě kvalitativní přístup s kvantitativní analýzou problému.

Kvantitativní analýza problému se uplatní tehdy, nejsou-li zkušenosti s dřívějšími podobnými problémy nebo je problém tak rozsáhlý a komplexní, že vyžaduje důkladnou analýzu založenou na exaktních vědeckých základech. Použití kvantitativních metod je však časté i při řešení opakovaných jednoduchých problémů, kdy šetří čas manažera, příp. jeho řešitelského týmu.

Kvantitativní základy pro rozhodování poskytuje operační výzkum. Manažer vyzbrojený metodami operačního výzkumu je schopen kvalifikovaně jak dlouhodobě plánovat rozvoj ve svěřené oblasti, tak i řešit každodenní problémy manažerské praxe. Management potřebuje od operačního výzkumu shromáždit a interpretovat data, konstruovat matematické modely a podrobovat je experimentům, předvídat chování ekonomických systémů a vytvářet tak předpoklady pro kvalifikovaná rozhodnutí. Mezi manažery a specialisty operačního výzkumu musí existovat úzká spolupráce a dělba práce.

Pro efektivní a úspěšnou spolupráci je nezbytné, aby manažeři byli obeznámeni se základními poznatky o kvantitativních metodách, které operační výzkum používá. Není nutné, aby ovládali každý krok řešících algoritmů, ale aby pochopili podstatu použitých metod a modelů, jejich možnosti použití, ale i omezení. Jen tak je možné se vyhnout nedorozumění z přeceňování výsledků modelových řešení, příp. se nenechat odradit složitostí matematického modelu. Získání právě takových znalostí pro kvalifikované využívání kvantitativního přístupu v rozhodování podporuje předkládaný učební text.

Učební text tématicky odráží kurz Kvantitativní metody v rozhodování, přednášený na Fakultě managementu a ekonomiky VUT ve Zlíně posluchačům studijních oborů management, podniková ekonomika a průmyslové inženýrství. Předkládaný text si nečiní nároky na originalitu ani vyčerpávající výklad disciplíny operačního výzkumu. Vznikl z potřeby soustředit obsah kurzu do jediného uceleného učebního textu.

Text je rozdělen do šesti kapitol, z nichž každá je věnována samostatné a ucelené metodě operačního výzkumu - uvedení do problematiky modelových přístupů operačního výzkumu, lineárnímu programování, teoretickým základům stochastických modelů a teorie hromadné obsluhy, řízení zásob a síťové analýze. Teoretický výklad je průběžně ilustrován řadou řešených příkladů.

Učební text může posloužit nejen posluchačům Fakulty managementu a ekonomiky VUT ve Zlíně, ale je vhodný i pro postgraduální kurzy zaměřené na aplikaci matematických metod v ekonomice a řízení. Zvládnutí optimalizačních modelů a metod v předkládaném průřezu je dobrým výchozím předpokladem pro snadnější orientaci v dalších technikách ekonomického rozhodování. Přínosem používání matematického aparátu je také vypěstování určité kázně v myšlení i vyjadřování.

1. Operační výzkum jako nástroj řízení

1.1 ÚVOD

Vznik vědecké disciplíny, která se vyvinula do dnešní podoby, spadá do 40. let. Název operační výzkum byl pro ni použit poprvé v období II. světové války a je poplatný tomu, že metod operačního výzkumu se používalo při řešení úloh souvisejících s vojenskými operacemi. Počátek rozvoje metod operačního výzkumu se spojuje především se jmény G.B. Dantziga, L.V. Kantoroviče, P.M. Morse, G.E. Kimballa, R.L. Ackoffa a C.W. Churchmana.

V současné době představují metody operačního výzkumu soubor nástrojů pro řízení složitých ekonomických systémů, jak na mikroekonomické úrovni, tak v makroekonomickém měřítku. Operační výzkum poskytuje možnost zkvalitnit ekonomické rozhodování, a to především ve smyslu rychlosti a kvalifikovanosti, použitím kvantitativních metod. Proto se jako neoddělitelná součást ekonomické teorie i hospodářské praxe stále více prosazuje matematické modelování. Jde především o tzv. ekonomicko matematické modely a metody používané v matematické ekonomii, ekonometrii a operačním výzkumu.

Matematická ekonomie používá matematiky pouze jako nástroje při formulaci ekonomických závislostí a vysvětlování ekonomických jevů. Ekonometrie si klade za úkol verifikovat postuláty ekonomické teorie, získané metodou vědecké abstrakce. Vychází z ekonometrického modelu, zkonstruovaného z empirických údajů použitím matematických výrazových prostředků a statistických metod, které slouží k analýze, prognózování a optimálnímu řízení. Operační výzkum je nejmladší oblastí aplikace matematiky v ekonomii a lze jej charakterizovat stručně jako souhrn metod týmové výzkumné práce využívající komplexní, t.j. systémový přístup, k řešení ekonomických, organizačních, technických nebo jiných složitých rozhodovacích problémů pomocí matematického modelování a příp. výpočetní techniky za účelem nalezení optimálních rozhodnutí (strategií), t.j. takových, která jsou z hlediska předem stanoveného cíle nejlepší. Mezioborová vědní disciplína operační výzkum dosáhla značného rozšíření jako jedna z metod optimálního řízení ekonomických systémů.

1.2 CHARAKTERISTIKA OPERAČNÍHO VÝZKUMU

Pokud se ztotožníme s tvrzením, že kybernetika je obecně teoretický základ vědeckého řízení, pak operační výzkum lze chápat jako aplikovanou kybernetiku v oblasti řešení praktických rozhodovacích a organizačních úloh. Jako každá aplikovaná vědní disciplína využívající matematického aparátu, rozvíjí operační výzkum především teoretické základy konstrukce matematických modelů organizačních a ekonomických systémů, včetně algoritmů jejich řešení. Vedle této stránky formální však respektuje i obsahový a metodologický aspekt zkoumání.

Charakteristickými rysy operačního výzkumu jsou:

- systémový přístup,
- týmová práce,
- modelová technika.

Systémový přístup. Při řešení úlohy operačního výzkumu se vychází z předpokladu, že chování libovolného prvku zkoumaného systému nelze posuzovat izolovaně, neboť vždy určitým způsobem ovlivňuje i ostatní prvky, přitom ne každá z těchto vazeb je podstatná a ne všechny vlivy lze zjistit. Jádrem systémového přístupu k řešení problému je tedy systematické vyhledávání vzájemných vazeb při zkoumání nebo hodnocení kterékoliv části systému, přitom se

přihlíží k působení okolí. Zpravidla se vychází z pokud možno jednoduché formulace úlohy. Pokud se taková formulace ukáže jako příliš úzká, rozšíří se o další doposud nezahrnuté vazby a takto nově vymezený systém se opět posuzuje jako celek.

Týmová práce. Všeobecně vžitá konvence pro klasifikaci vědeckých poznatků, která konečkonců odpovídá i struktuře vědních oborů, vede k členění zkoumaných problémů dle jejich převažujícího charakteru na sociologické, ekonomické, technologické aj. Dělení však nemusí být vždy totožné se strukturou reálných problémů. Praktické zkušenosti potvrzují, že komplexní řešení složitých rozhodovacích úloh lze získat pouze s použitím poznatků řady vědních disciplín. Proto se v operačním výzkumu zapojují do řešení jednotlivých problémů specialisté různých oborů a zaměření. Interdisciplinárnost umožňuje zkoumání jedné a téže úlohy z různých hledisek, neboť každý z odborníků uplatňuje při řešení téhož problému svůj vlastní přístup.

Např. stanovme si za cíl zvýšení produktivity v jisté výrobní jednotce. Sociolog může řešit úkol např. přijímáním nových kvalifikovaných pracovníků nebo zvyšováním kvalifikace stávajících pracovníků. Technik bude věnovat pozornost na zdokonalení výrobního zařízení nebo technologie. Ekonom se zaměří na efektivnější mzdovou příp. jinou stimulaci. Systémový analytik bude zkoumat možnosti zrychlení a zkvalitnění toku informací potřebných pro rozhodování atd. Každý z odborníků se snaží dosáhnout ze svého hlediska pozitivních výsledků, ale otázka, které z navrhovaných řešení, příp. jaká jejich kombinace je z hlediska vytčeného cíle nejlepší, zůstává nezodpovězena. Odpověď lze nalézt teprve sestavením kvantitativního kritéria, na jehož základě se vyhodnotí a porovnájí možné způsoby řešení.

Modelová technika. Modelování zkoumaného systému plní v systémech ekonomického či organizačního charakteru funkci experimentální techniky. Tedy reakce struktury a chování systému vůči různě se měnícím podmínkám lze experimentálně ověřit pouze a právě na jeho modelu.

Pro operační výzkum je typické používání především *matematických modelů*. Každý model je obecně podstatným zjednodušením popisovaného systému. V matematickém modelu se jako výrazových prostředků používá matematického aparátu. Přes všechna zjednodušení požadujeme od každého modelu, aby byl adekvátním obrazem zkoumané reality. Tuto adekvátnost je nutné vhodným způsobem testovat a prakticky ověřovat. Na druhé straně se požaduje, aby použitý model vždy dával možnost ne příliš komplikovaného řešení.

Nejčastější formou modelů operačního výzkumu je rovnice, resp. soustava rovnic. Jejich strukturu lze jednoduše popsat např. výrazem

$$z = f(x_i, y_j) \rightarrow \text{extrém},$$

kde z - účelová funkce, vyjadřuje úroveň předem zvoleného cílového kritéria, které charakterizuje kvalitu nebo efektivnost fungování zkoumaného systému, x_i jsou tzv. říditelné proměnné, y_j neříditelné proměnné (konstanty) a f je funkce popisující vztahy mezi z , x_i a y_j .

Tento základní tvar modelu je pak obvykle rozšířen ještě o jednu nebo více rovnic, resp. nerovností, které vyjadřují určitá omezení některých proměnných a spolu s funkcí cílového kritéria tvoří celkový model systému nebo řešené úlohy.

Typickým znakem modelů operačního výzkumu je především fakt, že mají povahu *optimalizačních modelů*. Umožňují totiž dospět k řešení resp. strategiím, které jsou z hlediska cílového resp. cílových kritérií nejlepší. Přitom úroveň říditelných proměnných obsažených v účelové funkci respektuje omezující podmínky úlohy. Podstatou optimalizace je tedy hledání extrému kvantitativního cílového kritéria, t.j. buď minimálního vstupu do systému při daném výstupu, nebo maximálního výstupu ze systému při daném vstupu, nebo maximálního rozdílu mezi výstupem a vstupem. Jde tedy o stanovení takového řešení problému, které při racionálním využití disponibilních zdrojů vede k dosažení daného cíle.

1.3 POSTUP PŘI ŘEŠENÍ ÚLOH OPERAČNÍHO VÝZKUMU

Proces kvantitativní analýzy ekonomických a organizačních systémů pomocí modelů a metod operačního výzkumu probíhá v několika na sebe navazujících etapách. V podstatě se jedná o vícestupňovou abstrakci - identifikace systému, tj. kvalitativní analýza zkoumaného problému, formulace výchozí ekonomické hypotézy, její matematický model, jeho řešení, včetně ověření správnosti struktury i výsledků modelu, praktické využití nalezeného řešení a zdokonalení analyzovaného systému.

Kvalitativní analýza problému je východiskem při formulaci tzv. *ekonomického modelu*. V této první etapě diagnostického charakteru je nutné především vymezit předmět zkoumání, určit nejdůležitější faktory, definovat a klasifikovat hypotézy, proměnné a omezení úlohy. Rovněž je třeba stanovit hodnotící kritérium pro posouzení kvality fungování studovaného systému.

Konstrukce *matematického modelu* spočívá v transformaci ekonomického modelu pomocí matematických výrazových prostředků. Adekvátnost použitého modelu závisí mj. na zvolené analytické formě popisovaných vztahů mezi jednotlivými proměnnými.

Je-li sestaven matematický model úlohy a jsou-li k dispozici *vstupní data*, lze přejít k jeho *řešení*. V podstatě jde o nalezení přesných resp. přibližných optimálních hodnot říditelných proměnných, tedy takových, které zaručují nejlepší úroveň zvoleného ukazatele efektivnosti fungování systému při dané úrovni neříditelných proměnných. V závislosti na charakteru modelu lze řešení získat buď metodami matematické analýzy nebo experimentálním způsobem, např. simulačními postupy. Pouze některé jednoduché matematické modely lze řešit ručně, řešení rozsáhlých úloh lze efektivně získat pouze pomocí počítače s příslušným programovým vybavením.

Dalším krokem je prověření adekvátnosti modelu a vyhodnocení nalezeného řešení. *Verifikace výsledků* spočívá v porovnání teoretických hodnot získaného optimálního řešení s dosavadní situací (strategií) a ve vyčíslení rozdílů vypočtené a skutečné úrovně kritéria kvality fungování systému.

Poslední fází postupu je *implementace*, tedy realizace výsledků kvantitativní analýzy matematického modelu v praxi, se snahou naplnit v zadání formulované cíle, t.j. zdokonalit funkci zkoumaného systému. Dále je nutné analyzovat citlivost a stabilitu optimálního řešení vzhledem k změně struktury modelu, příp. výchozích omezujících podmínek.

Zřejmě ne vždy se jednotlivé etapy konstrukce modelu operačního výzkumu realizují ve výše uvedeném pořadí. Ve skutečnosti mohou probíhat některé dílčí činnosti paralelně, vzájemně se ovlivňují a trvají až do ukončení celého projektu.

Nyní podrobněji k jednotlivým etapám prací při řešení úloh operačního výzkumu.

1.3.1 Formulace úlohy

Pro stanovení podstaty problému a formulaci rozhodovací úlohy je nutné vyjít z podrobného rozboru situace, jehož smyslem je:

- vymezit zkoumaný systém a okolí, které může tento systém podstatně ovlivnit,
- stanovit co nejpřesnější diagnózu současného stavu,
- zjistit, zda jsou splněny základní podmínky pro použití metod operačního výzkumu, t.j. hlavně dostupnost a kvalitu informačních podkladů, kvalifikaci pracovníků, organizační předpoklady,
- odhadnout efekt, který lze očekávat od výsledného řešení problému.

Předpoklady pro řešení rozhodovacího procesu exaktním optimalizačním postupem jsou následující:

- řídicí (rozhodující) subjekt může dospět k vytčenému cíli alespoň dvěma realizovatelnými strategiemi (postupy), t.j. existuje možnost alternativního řešení,
- volbou každé z těchto strategií, danou kvantitativními charakteristikami říditelných proměnných, lze dosáhnout různých výsledků, přitom alespoň jeden je řídicím subjektem preferován,
- každé z možných strategií odpovídá jiná pravděpodobnost dosažení stanoveného cíle.

Nutnost řešit rozhodovací problém tedy vzniká v případě, lze-li dospět k předem vytčenému cíli různými, rozdílně efektními způsoby, přitom nelze jednoduše určit nejlepší strategii.

K vlastnímu vymezení a k formulaci úlohy operačního výzkumu musíme tedy znát:

- jaký je cíl, včetně kritéria pro hodnocení jednotlivých strategií umožňujících jeho dosažení,
- kdo je subjektem rozhodování, co může rozhodující subjekt bezprostředně ovlivnit, a jaké vlivy okolí působí na výsledky určených strategií.

Stanovení cílů a kritérií. Obecně lze říci, že cílem libovolného systému je jednak stabilizace, jednak rozvoj. Stabilizace spočívá v uchování buď určitých zdrojů (pracovních sil, finančních prostředků, energie, surovin apod.), nebo určitého stavu (úroveň kvalifikovanosti pracovních sil, směnnosti apod.). Cíle tohoto druhu představují tedy zdroje (faktory), využívané při realizaci jednotlivých strategií systému, t.j. *vstupy* úlohy.

Cílem rozvoje je zpravidla získání určitých zdrojů, které systém doposud nevlastní, popř. dosažení určitého požadovaného stavu (úrovně). To jsou vlastně *výstupy* úlohy.

Cíle prvního druhu lze stanovit analýzou všech možných řešení úlohy z hlediska jejich realizace. Přitom lze objevit i další doposud nerespektovaná omezení na straně vstupu.

Při volbě určité strategie musíme často kromě ekonomických kritérií přihlížet i k hlediskům mimoekonomického charakteru, např. k společenským, politickým nebo sociálním aspektům.

Problémy při volbě hodnotícího kritéria mohou vzniknout, hledáme-li optimální strategii jednak pro systém jako celek a zároveň pro jednotlivé jeho subsystémy. Zřejmě v takovém případě nebude obecně platit, že optimální strategie systému a souhrn dílčích optimálních řešení pro jednotlivé subsystémy dávají stejné výsledky.

Analýza systému. Pro jednoznačné stanovení nositele rozhodování i odpovědnosti za rozhodnutí včetně jeho realizace, pro stanovení všech říditelných i neříditelných proměnných, je nutné podrobně znát samotný systém, v kterém rozhodovací proces vzniká, ale i jeho okolí. Obvykle postupujeme takto:

- Zjistíme potřeby, příp. požadavky, které systém uspokojuje ve vztahu k okolí. Např. jedná-li se o výrobní podnik, stanovíme tržní okolí a jednotlivé druhy výrobků a služeb, které požaduje.
- Určíme, jakým způsobem je systém informován o vzniku určitého požadavku nebo potřeby. V případě výrobního podniku přichází tato informace jako objednávka. Dle charakteru konkrétní situace lze určit např. počet a velikost objednávek, které přicházejí v určitém časovém intervalu, jejich rozdělení dle oborové nomenklatury apod.
- Stanovíme způsob registrace (evidence) informace o potřebách, které vznikají v okolí systému, i jejich tok jednotlivými články systému. T.j. sledujeme způsob zpracování těchto informací, např. třídění, kódování, shrnování (agregace) atd., dále pohyb původní i různým způsobem transformované informace v jednotlivých subsystémech.

Současně sledujeme, v kterých článcích systému slouží informace jako podklad pro rozhodnutí. Nejčastěji je nutno na základě této informace obstarat zdroje, např. suroviny, finanční prostředky apod.

Všechny tyto informace o fungování systému a jeho vztazích k okolí nejlépe zobrazíme pomocí grafických schémat, doplníme všechny podklady využívané jednak pro sběr a přenos informací, ale i pro vlastní rozhodování na jednotlivých stupních řízení.

Potom lze přistoupit k analýze a vyhodnocení takto zmapované situace. Ze schématu se vypustí redundantní informace, které neslouží jako podklad k žádné činnosti ani rozhodnutí uvnitř systému. Dále se zřetelně odliší články systému sloužící zpracování informací a jejich shromažďování a články, ve kterých vznikají rozhodnutí.

Výsledkem je takové schema, které je v podstatě jednoduchým popisným modelem. Znázorňuje určitým adekvátním způsobem všechny podstatné operace a funkce zkoumaného systému a současně umožňuje vymezit nejdůležitější říditelné i neříditelné proměnné, určit, kdo rozhoduje a jaké má k dispozici informace v okamžiku rozhodování a příp. objevit ty články systému, které jsou rozhodující pro řídicí proces.

Při určení *kritéria kvality* fungování systému i při konstrukci vlastní kritériální funkce vycházíme z principů *teorie rozhodování*. Pro volbu nejvhodnějšího hlediska posuzování funkce systému je třeba znát i podmínky, v nichž rozhodovací proces probíhá. Obecně existují tři možnosti - rozhodování v podmínkách *jistoty*, *rizika* a *nejistoty*. Podle toho rozlišujeme také tři druhy rozhodovacích úloh:

1. *Deterministické úlohy*. Vznikají v podmínkách jistoty, kdy je předem známo, že každé přijaté řešení (strategie) vede pouze k jedinému možnému výsledku.
2. *Stochastické (pravděpodobnostní) úlohy*. Vznikají při rozhodování v podmínkách rizika. V takových situacích nelze jednoznačně přiřadit jednotlivé strategii určitý výsledek. Zpravidla je pouze známo, že volbou určitého řešení lze dospět k různým možným výsledkům, přitom pravděpodobnosti jejich dosažení známe nebo je můžeme odhadnout.
3. *Rozhodování v podmínkách nejistoty*. Jedná se o takové rozhodovací problémy, kdy předem nelze vůbec odhadnout, jaké může mít důsledky to či ono řešení, nebo ani neznáme množinu možných výsledků.

Úlohy deterministické a rozhodování v podmínkách nejistoty lze pokládat za extrémní případy úloh, ve kterých vystupuje prvek rizika. Většina rozhodovacích procesů v hospodářských a organizačních systémech probíhá právě v podmínkách existence rizika. Teorie rozhodování je v podstatě založena na poznatku, že všechny rizikové situace mají stejnou strukturu. Rozhodující subjekt může zpravidla volit mezi několika variantními strategiemi, které lze kvantifikovat. Soubor všech možných řešení tvoří tzv. *rozhodovací prostor*. Cílem je nalézt jednak kritéria usnadňující subjektu rozhodování a jednak nalézt logické a výpočetní postupy, pomocí nichž lze z řady alternativních strategií zvolit tu, která je pro rozhodující subjekt z hlediska zvoleného cíle nejvýhodnější.

V podmínkách rizika závisí výsledek porovnání nejen na subjektem zvolené strategii, ale i na chování okolí systému, t.j. na *strategii okolí*. Proto je snahou vytvářet rozhodovací funkce, které dovolují přiřadit každé kombinaci strategie rozhodovacího subjektu a strategie okolí pravděpodobnost dosažení určitého výsledku. Způsob volby řešení se pak liší především podle toho, zda-li je či není strategie okolí závislá na strategii subjektu, který rozhoduje.

1.3.2 Sestavení modelu

Obecně je model určitou aproximací zkoumaného systému. Smyslem modelového zobrazení je, aby model byl podstatným zjednodušením skutečnosti, ale dovoloval přitom studium takto zobrazeného systému s dostatečnou přesností. Rozhodujícím pro stupeň zjednodušení modelu je účel, který sledujeme. Na něm závisí, co budeme pokládat za významné a co za zanedbatelné, neboli co zahrneme resp. nezahrneme do modelu. Sestavení modelu není v

žádném případě jednorázovým aktem, ale spíše procesem. Zjistíme-li, že odchylka mezi realitou a výsledkem pomocí modelu vypočteným je neúnosná, musíme provést v jeho konstrukci příslušné korektury, např. zahrneme do modelu další faktory. Postup opakujeme tak dlouho, dokud rozdíl mezi teoretickým výsledkem a skutečností neklesne pod přijatelnou mez.

Klasifikace modelů. V operačním výzkumu nepoužíváme pouze matematické modely. Podle prostředků použitých při konstrukci modelu rozlišujeme modely verbálně deskriptivní, fyzické, analogové, symbolické a procedurové.

Verbálně deskriptivní modely jsou modely popsané slovy, lidskou řečí. Tento způsob modelování je sice běžný, nenáročný a nenákladný, ale možnosti dalšího zpracování takového modelu jsou omezené.

Ve *fyzických (názorných, ikonických) modelech* jsou všechny podstatné rysy originálu znázorněny stejným způsobem, zpravidla pouze v jiném měřítku. Takovým modelem je např. fotografie, mapa či různé zmenšeniny, popř. zvětšeniny originálu. Názorné modely mají konkrétní charakter, nejsou však příliš vhodné k experimentování.

V *modelech analogových* se znázorňují a zkoumají vlastnosti a chování určitého systému pomocí vlastností jiného systému. Např. hydraulickým systémem lze znázornit systém elektrický nebo dokonce ekonomický. Analogové modely nejsou většinou tak konkrétní jako názorné modely, lépe se však s nimi pracuje.

V *symbolických modelech* jsou jevy a procesy zachyceny pomocí symbolů. Ze symbolických modelů je nejdůležitější model matematický, v kterém jsou zkoumané jevy a procesy popsány matematickým jazykem, nejčastěji matematickými výrazy, funkcemi, rovnicemi, ale také grafy, postupovými diagramy, tabulkami apod. Matematika disponuje řadou efektivních analytických metod, takže matematické modely lze řešit bez zvláště vysokých nákladů.

Procedurové modely se vyvinuly v souvislosti se simulačními metodami, které jsou součástí operačního výzkumu. V těchto modelech se používá předem specifikovaného symbolického jazyka, může jím být i některý obecně použitelný ale spíše specializovaný programovací jazyk. Zkoumaný jev se popisuje pomocí prvků tohoto jazyka ve formě jednoduchých operací. Tyto modely se tedy nejčastěji realizují na počítači.

Dále lze charakterizovat modely podle toho, zda zahrnují či nezahrnují také *faktor času*, jako dynamické resp. statické modely. Ve většině modelů se časový faktor bere v úvahu, t.j. zajímá nás chování systému v závislosti na čase. Statické modely se používají v případě, když nás dynamická složka jevu nezajímá, nebo v případě, že její zařazení by vedlo k neúměrným výpočetním komplikacím nebo neúměrným nákladům při realizaci modelu. Vždy, když je použito statického modelu, je třeba zohlednit tento fakt při posuzování dosažených výsledků.

Podle typu funkčního vztahu mezi jednotlivými proměnnými modelu rozlišujeme modely lineární a nelineární.

Jestliže model postihuje jak stránku technickou (výrobní proces), tak i chování lidí, nazýváme ho *modelem hybridním*. Jsou to např. modely, kdy se studuje vliv poptávky na výrobu a naopak chování lidí při spotřebě, která ovlivňuje výrobu.

Některé jevy nebo procesy nelze popsat funkcemi prostoru či času, ale jejich chování lze vystihnout jistým pravděpodobnostním zákonem. Takové jevy mají stochastický charakter. Tam, kde lze vyloučit náhodné faktory, se používají *modely deterministické*, naopak tam, kde náhodné faktory podstatně ovlivňují zkoumaný jev, hovoříme o *modelech stochastických*. Nejznámějšími modely stochastickými jsou modely hromadné obsluhy (teorie front), modely zásob, mezi deterministické modely patří modely lineárního programování, modely meziodvětvových vztahů (strukturální analýza).

V řadě studií operačního výzkumu se postupně užívá více druhů modelů. Verbálně deskriptivní, názorné a analogové modely slouží často k prvnímu, přibližnému popisu reálného systému a zároveň jako východisko při konstrukci modelů symbolických nebo procedurových.

Zjednodušení modelu. Jak již bylo uvedeno, cílem modelování je zobrazit co nejjednodušším způsobem zkoumanou realitu, přitom toto zjednodušení nesmí být na úkor kvality výsledku, získaného pomocí modelu. V praxi není vždy snadné dospět k správnému kompromisu mezi těmito dvěma, proti sobě stojícími požadavky. K dosažení únosného stupně aproximace skutečnosti modelem musíme plně pochopit podstatu úlohy, respektovat všechny aspekty, přicházející v úvahu, využívat dosavadních zkušeností z aplikace metod operačního výzkumu a dobře znát popř. odhadnout i možnosti studovaného problému. Cest vedoucích k zjednodušení modelu je celá řada. Uvedme jen nejčastěji používané.

Podstatného zjednodušení se dosáhne např. *vyloučením* nebo *nezahrnutím některých proměnných*. Rozhodnutí o zahrnutí nebo nezahrnutí proměnné musí předcházet důkladná, např. faktorová analýza, aby nedošlo k opomenutí či vypuštění takové proměnné, která má ve zkoumaném systému podstatný nebo dokonce rozhodující vliv.

Vzhledem k tomu, že obvykle při řešení konkrétní úlohy v operačním výzkumu je k dispozici celá řada vypracovaných a již vyzkoušených modelů, usnadňujeme si často práci tím, že aplikujeme hotový model, aniž bychom však zkoumali, za jakých zjednodušujících předpokladů byl zkonstruován původně.

Snížení počtu proměnných a tedy i zjednodušení modelu lze dosáhnout také *agregací* proměnných. Shrnovat do agregátů lze ovšem pouze homogenní proměnné.

Jiným způsobem zjednodušení modelu je *substituce skutečných proměnných aproximativními veličinami*. Např. často se zaměňuje některá proměnná konstantou, kterou je střední hodnota náhodné veličiny. Z důvodů matematické jednoduchosti modelu nahrazujeme v některých případech proměnné, které jsou ve skutečnosti nespojité, proměnnými spojitými. Jindy volíme opačný postup, t.j. spojitou proměnnou aproximujeme v modelu diskrétní veličinou.

Často se podaří zjednodušit model tím, že se *pozmění funkční vztahy* mezi proměnnými. Rozšířená je např. lineární aproximace nelineárních funkcí nebo aproximace křivky posloupností přímkou, nahrazení náhodných veličin spojitou funkcí normálního rozdělení.

K zjednodušení modelu slouží i změny v počtu či charakteru omezujících podmínek. Někdy se ve snaze o nejdokonalější formulaci modelu uvažuje příliš mnoho omezení, což vede k výpočetním problémům. Doporučuje se postupně omezení vypouštět a to tak dlouho, dokud se nedospěje k výpočetně schůdnému řešení.

Při snížení počtu omezujících podmínek úlohy má nalezené řešení zpravidla optimistický charakter, při zvýšení jejich počtu naopak dospíváme k řešení pesimistickému. Změna charakteru i počtu omezení má svůj význam i v tom, že umožňuje určit hranice řešení úlohy, t.j. odhadnout interval, v jehož rozmezí se výsledek při uvedených změnách omezujících podmínek pohybuje, což je obvykle cenný poznatek pro řídicí subjekt.

Naplnění modelu údaji. Různé modely jsou různě náročné na rozsah i kvalitu vstupních údajů. Získávání, zpracování a příprava vstupních údajů pro model je časově velmi náročnou fází prací na řešení úlohy operačního výzkumu. Výchozí podklady získáváme různými způsoby, nejčastěji ze statistických vyčerpávajících či výběrových šetření, z operativně technické evidence, účetních dokladů, pasportů, zpráv, rozborů, ale i prostřednictvím anket nebo rozhovorů s příslušnými pracovníky.

1.3.3 Řešení úlohy

Po specifikaci matematického modelu úlohy a shromáždění vstupních údajů lze přistoupit k numerickému řešení modelu. Tedy máme určit takové hodnoty (úroveň) říditelných proměnných, pro které zvolené kritérium optimality dosahuje požadovaného extrému, tj. maxima nebo minima.

Obecný tvar matematického modelu rozhodovacího procesu můžeme psát např. ve tvaru:

$$z = f(x, y) \rightarrow \text{extrém}$$

při omezeních

$$g(x, y) \geq 0,$$

kde

x je vektor říditelných proměnných,

y vektor neříditelných proměnných,

z představuje hodnotu (úroveň) kritéria optimality.

Nalézt optimální řešení tohoto modelu znamená určit takové x (jako funkci y), pro které z dosáhne svého extrému. K řešení lze využít příslušné klasické matematické metody, např. diferenciálního počtu. Metody, které umožňují takto bezprostředně dospět k řešení modelu, nazýváme *deduktivní*.

V řadě případů stochastických modelů však nelze jednoduše popř. vůbec vyjádřit z jako funkci x a y a tedy ani použít deduktivní metody. V takové situaci je nutné použít určitých pravidel - *algoritmu*, který umožní vyčíslit očekávanou úroveň kritéria optimality pro libovolné napozorované soubory hodnot x a y .

Výpočetní postupy založené na principu postupného řešení modelu (po etapách) označujeme jako *iterační*. Jejich podstata spočívá v tom, že výpočet začíná od některého, zpravidla snadno získaného tzv. *přípustného řešení* (vyhovující všem omezením modelu) a pak se použije algoritmus zaručující postupné zlepšování tohoto na zkoušku vybraného řešení. Prakticky to vypadá tak, že výchozí přípustné řešení je v dalším kroku na základě mechanického pravidla nahrazeno z hlediska cíle lepším řešením, přitom tento postup se opakuje tak dlouho, dokud se nedosáhne optima. Většina těchto iteračních metod zaručuje nalezení optimálního řešení (pokud existuje) v *konečném* počtu kroků. Existují ale i takové iterační algoritmy, které jsou založeny na tzv. *metodě pokusů a omylů*. Na základě opakovaných pokusů umožňují sice zlepšit řešení, ale nezaručují zlepšování monotónním způsobem.

Simulace. Jednou z možností, jak získat řešení modelů operačního výzkumu v případě, že selhávají nebo jsou neefektivní analytické metody, je simulační technika. Simulační technika je založená na experimentování s modelem. Největší význam mají simulační metody ve spojení s matematickými modely a výpočetní technikou, kdy simulace slouží jako numerická technika hromadného experimentování s modelem.

Výhodou simulačního postupu může být fakt, že lze studovat vliv více proměnných (neříditelných) než přímo na zkoumaném systému, lze experimentovat i v podmínkách, které ještě neexistují, testování a vyhodnocování je mnohem rychlejší než v reálném systému.

1.3.4 Ověření správnosti modelu i řešení

Během celého procesu sestavování modelu je třeba ověřovat a vhodným způsobem testovat jeho kvalitu. Po sestavení modelu se pak přezkouší funkce modelu jako celku a to na základě *interpretace dosažených výsledků*. Interpretace modelu a výsledků jeho řešení je

opačným myšlenkovým postupem, nežli transformace skutečnosti v umělý systém, t.j. model. Přecházíme od abstraktního ke konkrétnímu, od symbolů k reálným pojmům.

Použitelnost modelu v praxi ověřujeme zpravidla jednak pomocí *retrospektivního testu*, jednak i pomocí *perspektivního testování*. V obou případech je cílem stanovit, jak se v průměru zlepši funkce modelového systému na základě nalezeného optimálního řešení a současně, jaká je stabilita tohoto řešení.

Postoptimalizační analýza citlivosti slouží k sledování vlivu změn některých výchozích podmínek úlohy na nalezené řešení. Pro realizaci modelového řešení je vhodné znát předem, vůči jakým změnám je optimální řešení stabilní (necitlivé) a naopak, které změny výchozích podmínek způsobují, že řešení přestává být optimálním, nebo že se mění hodnota optima.

1.3.5 Realizace řešení

Vzhledem k tomu, že cílem operačního výzkumu je zdokonalené fungování sledovaného systému, následuje po interpretaci *implementace*, t.j. realizace výsledků řešení získaného pomocí modelu. V implementaci nejde jen o akt rozhodnutí na základě podkladů, získaných řešením modelu. Současně se musí zvážet také důsledky těch aspektů, které nejsou v modelu uvažovány, především faktory ovlivňující lidské chování.

Implementace řešení není jednorázový akt, ale většinou je podrobně časově plánováno - *řízení implementace*. Při řízení procesu implementace se sledují jednak změny systému v čase, jednak i proces vyhodnocování a realizace výsledků, neboť i metody zavádění řešení do praxe ztrácejí časem svoji efektivnost.

1.4 OBLASTI APLIKACE OPERAČNÍHO VÝZKUMU

Uplatnění modelů a metod operačního výzkumu jako nástrojů optimálního rozhodování a řízení v relativně stálých ekonomických systémech a procesech je nejčastější v těchto oblastech:

- dlouhodobé výhledy a koncepce,
- střednědobé a krátkodobé projekty,
- operativní řízení výroby,
- přímé řízení výrobních a technologických procesů.

Strategické úlohy jsou charakteristické tím, že jejich řešení zahrnuje dlouhý časový horizont a týká se zpravidla celého systému. V dlouhodobém výhledu jde především o stanovení cíle (např. hospodářského rozvoje) a respektování hlavních zájmů systému (např. ekologická situace), o zásadní koncepci vědeckotechnického rozvoje, vývoje technologií apod.

Problémy řešené v středně a krátkodobém projektu mají charakter *taktických dílčích úloh*. Jedná se např. o stanovení cílů a kritérií efektivnosti na kratší časové úseky pro celý systém, ale především pro jeho jednotlivé subsystémy.

V oblasti *operativního řízení výroby* je cílem urychlit a zpřesnit pomocí optimalizačního modelu vydávání, kontrolu a evidenci bezprostředních pracovních příkazů (rozhodnutí). Jde hlavně o metody operativního sledování toků materiálu, uspokojování potřeby, operativního řízení jednotlivých subsystémů, reagování na změny okolí systému apod. Většinou tyto problémy nelze řešit pouze exaktními matematickými nástroji a proto se používají ve spojení s osvědčenými heuristickými postupy.

V poslední době s rozvojem výkonné výpočetní techniky se stává běžným využívání některých metod a technik operačního výzkumu i v přímém řízení výrobních procesů. Snahou je dosáhnout stabilizace řízených procesů, případně optimalizace některých důležitých parametrů.

Možnosti použití operačního výzkumu v řízení a rozhodování jsou rozsáhlé a nejsou jednou provždy dané. Vzhledem k tomu, že operační výzkum je mladou vědní disciplínou, která se neustále vyvíjí a zdokonaluje i nástroje svého zkoumání, oblasti aplikace jeho metod se časem mění, rozšiřují. V současné době se např. modely a metody operačního výzkumu staly nedílnou součástí tzv. *systémů pro podporu rozhodování*.

1.5 METODY A PROSTŘEDKY OPERAČNÍHO VÝZKUMU

Klasifikace operačního výzkumu do metodických oblastí je nejednotná, uvedme např. následující se stručnou charakteristikou:

- matematické programování,
- síťová analýza,
- modely řízení zásob a skladů,
- teorie hromadné obsluhy,
- optimalizace procesů obnovy,
- teorie her a rozhodování v konfliktních situacích,
- vícekritériální hodnocení variant,
- simulační modely.

1.5.1 Matematické programování

Metodami matematického programování se rozumí obecná úloha nalezení maxima resp. minima účelové funkce

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

při splnění omezujících podmínek

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Podle typu účelové funkce a jednotlivých omezení lze úlohy matematického programování rozdělit do dvou základních skupin: na lineární a nelineárního programování.

Lineární programování je jedna z nejrozšířenějších metod ze souboru optimalizačních metod. Je rovněž zajištěno velmi dobře i programově pro široký okruh počítačů. Lineární programování lze např. využít v následujících problémech:

- *sortimentní problém*: jedná se o maximalizaci určitého hodnotového ukazatele, např. hodnoty hrubé výroby, při omezujících podmínkách kapacitních, materiálových, z hlediska nároků na požadovaný vyráběný sortiment výrobků. Maximalizuje se obvykle hodnota výroby za určitý časový úsek. Na výstupu modelu obdržíme:

- a) skladbu výroby v sortimentu při respektování omezujících podmínek a při níž bude hodnota výroby maximální,
- b) analýzu omezení, která nás informuje o rezervách nevyčerpaných disponibilních kapacit nebo o naplnění předpokládaného množství výrobků,

c) rozbor tzv. duálního řešení, které vypovídá o ocenění jednotlivých disponibil.

- *optimální dělicí plány*: tyto plány se týkají dělení lineárního, plošného nebo jiného materiálu na určitý počet částí (kusy) s cílem minimalizovat odpad. Vstupními informacemi jsou rozměry výchozích zdrojů, rozměry požadovaných dílů a jejich počty. Výstupem je pak optimální plán dělení.

- *distribuční úlohy* (dopravní problém, přiřazovací problém): jedná se o speciální případy lineárního programování, k jejichž řešení není nutné ani vhodné používat simplexové metody. U dopravního problému jde o optimalizaci rozvozu materiálu (minimalizace nákladů na přepravu) od výrobců k zákazníkům (od dodavatelů k odběratelům) při splnění požadavků zákazníků. Příkladem jednoduchého distribučního problému může být např. rozmístění pracovníků na určité druhy práce tak, aby efektivnost rozdělení byla maximální, nebo přidělení strojů a zařízení s podobným efektem atd.

1.5.2 Síťová analýza

Metody síťové analýzy jsou vybudovány na teorii grafů, teorii pravděpodobnosti a matematickém programování. Síťové analýzy se využívá pro plánování, koordinaci a kontrolu složitých úkolů v nejrůznějších oblastech hospodářské činnosti, hlavně na úseku investiční výstavby, výzkumu a rozvoje, technického rozvoje, v oblasti údržby základních fondů apod.

Základem síťové analýzy jsou dvě metody - metoda kritické cesty CPM (Critical Path Method) a plánovací systém PERT (Program Evaluation and Review Technique). Tyto metody už v jisté základní podobě dávají celkem uspokojivé praktické výsledky.

Dalším důvodem úspěšnosti metod síťové analýzy je to, že poskytlo nástroj pro tzv. projektové plánování (projektové řízení), které předtím využívalo metody a nástroje řízení výroby. Ty jsou zaměřeny na výrobní proces jako soubor pravidelně se opakujících operací, zatímco projekty jsou chápány jako úkoly, které jsou řešeny jednorázově a z pravidla se již neopakují. Zpracování projektů pomocí CPM nebo PERT se provádí na počítačích.

1.5.3 Modely řízení zásob a skladů

Oblast zásob a zásobování je důležitou součástí hospodaření a výroby. V zásobách může být umrtveno velké množství prostředků. Tyto prostředky jsou svým způsobem zmrazené a nepřinášejí užitek. Na druhé straně nedostatek zásob vede ke ztrátám z deficitu. Proto se stalo jednou z důležitých oblastí aplikace optimalizačních modelů a metod operačního výzkumu ve výrobní i nevýrobní sféře řízení procesů vytváření, doplňování, udržování a čerpání zásob.

Problém řízení zásob vzniká tedy vždy, když je nutné vytvořit zásobu okamžitě použitelného zdroje s cílem uspokojit poptávku nebo potřebu v daném časovém intervalu. Řízení zásob zahrnuje jejich regulaci, prognózu, financování, evidenci a kontrolu. Přitom možnost regulace, která spočívá v ovlivňování buď vytváření a doplňování zásob nebo naopak jejich čerpání, je nutnou podmínkou řízení a optimalizace zásob.

Vznik a existence jednotlivých druhů zásob má různé příčiny, z hlediska řídicího subjektu jak objektivní tak subjektivní:

- nutnost zabezpečit nepřetržitý výrobní proces, obecně plynulé fungování jakéhokoliv systému,
- časový a prostorový (místní) nesoulad mezi výrobou na jedné straně a poptávkou resp. potřebou na straně druhé,

- periodičnost výrobního cyklu (např. kvůli technologii výroby se vyrábí nejprve dva měsíce červené dlaždičky, pak tři měsíce modré, ale protože spotřeba je plynulá, musí být na skladě pořád oboje),
- zvláštnost přepravy od výrobce ke spotřebiteli (výjimkou elektřiny a potrubní dopravy neprobíhá žádná doprava spojitě),
- rytmus výroby jiný než je rytmus spotřeby (např. potravinové suroviny rostou jen v určitém období, sklízí se převážně v létě, ale potraviny se konzumují celý rok),
- snížení rizika neuspokojení poptávky nebo výpadku produkce z titulu působení náhodných vlivů, příp. nenadálého vývoje ve výrobě, dovozu, poptávce nebo potřebě,
- ekonomické důvody - např. při nákupu většího množství výrobků nebo zboží lze získat slevu v ceně, nebo lze lépe využít dopravní prostředky a tím snížit dopravní náklady.

Podstata modelových přístupů k řízení zásob (řízení pohybu zásob) spočívá v úvaze, že se zvětšováním objemu jednotlivých položek zásob klesají ztráty, které vznikají z akutního nedostatku zásob. Na druhé straně však rostou náklady na udržování zásob. Optimalizací velikosti zásob pak rozumíme stanovení takové úrovně zásob jednotlivých položek, při které celkové náklady na tvorbu, udržování a doplňování zásob, včetně ztrát z nedostatku zásob, jsou z dlouhodobého pohledu minimální. Na základě minimalizace nákladové kritériální funkce lze stanovit konkrétní strategii řízení zásob, t.j. dát odpověď na otázky, kdy (jak často) a v jaké výši vytvářet nebo doplňovat zásoby.

V teorii zásob se používají nejrůznější matematické metody a výpočetní postupy, od jednoduchého hledání extrému funkce jedné či více proměnných pro deterministický model až k dynamickému programování nebo aparátu teorie front pro stochastický model zásob.

1.5.4 Teorie hromadné obsluhy (teorie front)

Teorie front se používá při řešení problémů resp. racionalizaci procesů s hromadným charakterem. S těmito procesy se setkáváme velmi často, vše co se kolem nás děje, má hromadný charakter, teorie front se však zabývá právě hromadným aspektem okolních jevů. V hromadných procesech se vyskytují proudy nejrůznějších objektů, např. materiálu, polotovarů, výrobků, informací, ale i lidí apod. Tyto proudy procházejí řadou zařízení, od kterých vyžadují určitou obsluhu v širším slova smyslu, např. materiály je třeba přepravovat ze skladů do výrobních prostor, hotové výrobky se distribuují na místo spotřeby, informace je třeba třídit, zpracovávat, evidovat, lidé vyžadují určité služby, např. stravování, doprava apod.

Na jedné straně za určitých okolností vznikají před obslužnými zařízeními fronty, které jsou pro efektivnost takového procesu většinou nežádoucí. Na druhé straně mohou zůstat některá obslužná zařízení nevytížena, zůstávají v jistých periodách v nečinnosti, což je zjevně nerentabilní a tedy rovněž nežádoucí.

Teorie hromadné obsluhy kvantifikuje a modeluje celý proces obsluhy, studuje zákonitosti chování systémů hromadné obsluhy. Pochopení podstaty teorie front pak poskytuje prostředky pro racionálnější řízení celého procesu obsluhy.

1.5.5 Optimalizace procesů obnovy

Teorie obnovy se zabývá odhadem výše nákladů na obnovu objektů, které se časem opotřebovávají. Tento odhad zahrnuje odhad rozdělení pravděpodobnosti životnosti a výpočet předpokládaného počtu poruch během životnosti jako funkce opotřebení souboru předmětů. Jestliže dále jde o takové předměty, jejichž účinnost klesá během jejich životnosti, pak odhad výše nákladů zahrnuje stanovení činitelů, které mají vliv na navýšení provozních nákladů, na

zvýšení prostojů, odpadu, zmetkovitosti, na počet oprav atd. Obecně lze charakterizovat obnovu jako doplňování souboru jednotek s ubývajícími prvky. Reprodukční proces není nic jiného než hodnotově sledovanou obnovou procesu výroby. Matematické modely obnovy se omezují pouze na popis režimu obnovy fyzických jednotek.

1.5.6 Teorie her a rozhodování v konfliktních situacích

Zakladatelem teorie strategických her je jeden z předních matematiků John von Neumann. Některé poznatky z teorie her lze uplatnit v oblasti prognózování, především v souvislosti s rozhodovacími procesy. V obecné rovině teorie her hledá zákonitosti v oboru cílovosti (rozhodovací kritéria, subjektivní a objektivní hlediska rozhodování, preference, účelovost apod.), vyvíjí určité účinné postupy, např. metodu větvení, rozhodovací tabulky, rozhodovací matice, rozhodovací stromy.

1.5.7 Vícekriteriální hodnocení variant

Pro řešení problémů v ekonomických systémech obvykle existuje řada cest, způsobů, variant, což vyplývá z podstaty těchto složitých systémů. Prakticky použitelných variant bývá někdy jen poměrně malé množství. Předností, které pro rozhodování poskytuje řešení spočívající ve vyhodnocení variant, se doposud v praxi využívá velmi málo, zřejmě pro značnou pracnost. Při rozhodování složitých ekonomických systémů, tj. systémů s komplexními vazbami mezi cíli, zdroji, zájmy lidí, skupinami lidí apod., je důležitá analýza rozhodovacího problému, jeho rozklad na snazší, které se dotýkají určitých homogenních aspektů rozhodovací situace. Takový přístup je do značné míry v souladu se stylem přirozeného myšlení, neboť při práci se složitými systémy dochází rovněž k intuitivnímu dekomponování problému do různých úrovní. Vícekriteriálního přístupu se používá při řešení slabě strukturovaných a nestrukturovaných problémů.

1.5.8 Simulační modely

Řešíme-li praktický problém, formulujeme v určité fázi pracovní hypotézy a zkoumáme jejich platnost. Provádíme jistý experiment. Při řešení problémů operačního výzkumu postupujeme tak, že vytvoříme model reálného systému a experiment provádíme na tomto modelu. Výsledky experimentu na modelu pak porovnáváme s hypotézami, jejichž platnost očekáváme.

Simulace jako nástroj operační analýzy má poněkud širší význam. Simulací systému rozumíme operování s modelem tohoto systému s cílem získat informace o systému pomocí experimentů s tímto modelem. V současné době je často simulační model programem pro počítač, což umožňuje rychlé a pohodlné provádění a vyhodnocování experimentů. Simulace je efektivní způsob, jak prověřit projektované systémy, plány a strategie řízení před tím, než jsou tyto záměry realizovány.

Mezi nejznámější (jednodušší) úlohy řešení simulačními postupy patří např.:

- simulace dopravních a telekomunikačních systémů,
- simulace uspořádání výrobních technologických linek,
- simulace chodu různých zařízení (trenažéry),
- simulační hry odvozené od chování a vlastností modelovaného systému.

2. Lineární optimalizační model

2.1 ÚVOD

Lineární optimalizační model lze charakterizovat jako lineární, deterministický a statický, tedy předpokládá lineární závislost parametrů modelu, nezohledňuje vliv takových faktorů, jakou jsou náhodné veličiny nebo čas. Přes mnohá zjednodušení je tento model ve většině případů vyhovující aproximací skutečnosti. Lze říci, že např. chyby a nepřesnosti vzniklé při pořizování výchozích dat mohou ovlivnit výsledek podstatněji než aproximace a zjednodušení modelu samotného.

Proces tvorby a řešení lineárního optimalizačního modelu lze rozdělit do čtyř etap, které se liší svými nároky na praktické a teoretické znalosti řešitelů, podílem lidské práce v poměru k využití výpočetní techniky.

1. etapa - deskriptivní ekonomický model. V první fázi se formuluje podstata problému, určuje se, které stránky zkoumaného jevu jsou podstatné a které lze naopak zanedbat, aniž by se příliš zjednodušil nebo až zkrátil problém. Tato etapa je časově ale i teoreticky velmi náročná, vyžaduje spolupráci odborníků jak ze sledované oblasti tak i z oblasti operačního výzkumu. Důležitá je i proto, že jako první rozhodujícím způsobem ovlivní úspěšnost v dalších etapách. Výsledkem první etapy je deskriptivní ekonomický model zkoumaného problému.

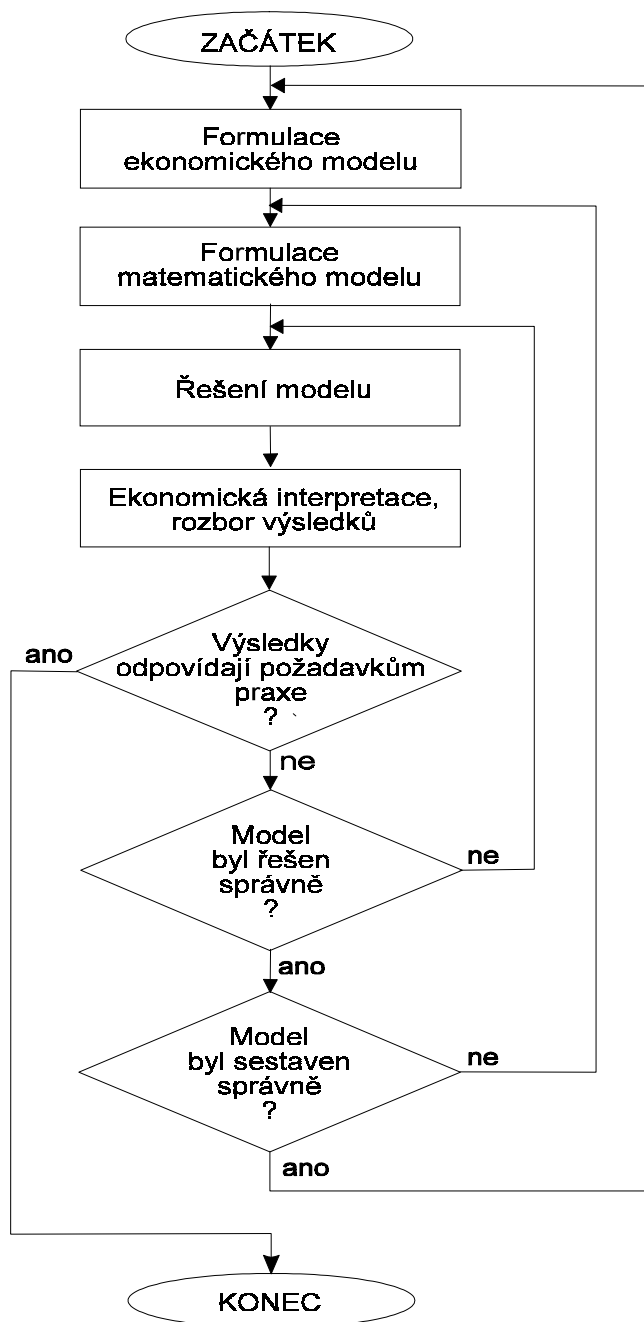
2. etapa - matematický model. V druhé fázi se ekonomický model převede do vyjadřovacích prostředků matematiky, t.j. formuluje se matematický model.

3. etapa - řešení modelu. Třetí fáze má ryze technický charakter. Některou vhodnou metodou lineárního programování se v ní řeší matematický model. Vzhledem k tomu, že řešení úloh lineárního programování je dostatečně standardizováno a programově pokryto, v praxi se redukuje etapa většinou na výběr vhodné metody a přípravu vstupních dat pro počítačový program.

4. etapa - analýza výsledků. Ve čtvrté fázi se výsledky získané v matematických vyjadřovacích prostředcích převádí zpět do kategorií ekonomických. Důležitou částí této etapy je rozbor výsledků a zhodnocení jejich praktické použitelnosti. Pokud se ukáže, že výsledky řešení nelze v praxi aplikovat, vracíme se zpět k jednotlivým etapám a kontrolujeme jejich správnost.

- Numerické řešení modelu. Pokud řešíme úlohu na počítači některým standardním programem, je nejčastější příčinou nesprávného výsledku v této etapě chyba ve vstupních datech, kterou program odhalit nedokáže.
- Formulace matematického modelu, který musí být správně sestaven nejen po stránce formální, ale musí i obsahově jednoznačně odpovídat zadanému ekonomickému modelu.
- Formulace ekonomického modelu. Pokud v předchozích bodech nebyly shledány nedostatky, pak jsme model vyřešili správně po formální stránce, ale model obsahově nevystihuje skutečnost. Ekonomický model zřejmě nezahrnuje všechny podstatné rysy a je třeba ho doplnit, resp. přehodnotit.

Schematicky celý postup aplikace ekonomického modelu znázorňuje obr. 2.1.



Obr. 2.1 Aplikace ekonomického modelu

2.2 OBECNÝ MATEMATICKÝ MODEL, ZÁKLADNÍ POJMY

Obecný matematický model problému lineárního programování lze formulovat následujícím způsobem:

Hledáme vektor

$$\mathbf{x}^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0], \quad (2.2.1)$$

který vyhovuje vlastním omezením úlohy ($m < n$, rovnice jsou lineárně nezávislé),

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

podmínkám nezápornosti

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (2.2.3)$$

a maximalizuje lineární formu

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n, \quad (2.2.4)$$

kterou označujeme jako účelovou funkci.

Soustavu (2.2.2) lze zapsat rovněž ve tvaru lineární kombinace vektorů, tj.

$$\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \dots + \mathbf{a}_nx_n = \mathbf{b}, \quad (2.2.2a)$$

kde

$$\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

nebo v maticovém tvaru

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (2.2.2b)$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Lineární formu (2.2.4) lze rovněž zapsat ve tvaru skalárního součinu

$$z = \mathbf{cx}, \quad (2.2.4a)$$

kde

$$\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_n].$$

Předpokládáme, že hodnota matice A je m .

Přípustné řešení (definice).

Přípustným řešením (řešením, přijatelným řešením) problému lineárního programování nazveme vektor $\mathbf{x}=[x_1, x_2, \dots, x_n]$, který vyhovuje vlastním omezením úlohy (2.2.2) a podmínkám nezápornosti (2.2.3).

Optimální řešení (definice).

Optimálním řešením problému lineárního programování nazveme takové přípustné řešení, pro které je hodnota účelové funkce (2.2.4) maximální, t.j. takové přípustné řešení $\mathbf{x}^0=[x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]$, že

$$c_1 x_1^0 + c_2 x_2^0 + \dots + c_n x_n^0 \geq c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

pro všechna přípustná řešení $\mathbf{x}=[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Základní přípustné řešení (definice).

Základním přípustným řešením problému lineárního programování nazveme takové přípustné řešení $\mathbf{x}$, které má nejvýše tolik kladných složek, kolik má úloha lineárně nezávislých vlastních omezení. Ostatní složky jsou rovny nule. Vektory koeficientů v soustavě (2.2.2), které odpovídají nenulovým složkám $\mathbf{x}$ tvoří skupinu lineárně nezávislých vektorů.

Degenerované řešení (definice).

Degenerovaným řešením nazveme takové základní řešení $\mathbf{x}$, v kterém má alespoň jedna ze základních proměnných nulovou hodnotu.

Věta. Jsou-li $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$ dvě přípustná řešení problému lineárního programování, pak i každá jejich konvexní kombinace

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda) \mathbf{x}_2, \quad (0 < \lambda < 1)$$

je přípustným řešením.

Věta vyslovuje fakt, že množina všech přípustných řešení je konvexní.

Fundamentální věta lineárního programování. Existuje-li optimální řešení problému lineárního programování, pak existuje základní optimální řešení.

Smysl věty spočívá v tom, že pokud existuje pouze jedno optimální řešení, pak je toto optimální řešení základní, pokud existuje více optimálních řešení, pak je mezi nimi alespoň jedno základní, přitom všechna maximalizují (se stejnou hodnotou) účelovou funkci.

Praktický význam je ten, že totiž optimální řešení problému lineárního programování stačí hledat mezi základními přípustnými řešeními, kterých je konečně mnoho. Není tedy třeba se zabývat množinou všech přípustných řešení. O tuto poučku se opírají všechny metody řešení problémů lineárního programování.

2.3 APLIKACE LINEÁRNÍHO OPTIMALIZAČNÍHO MODELU

Jednotlivé etapy tvorby a řešení lineárního optimalizačního modelu budou nyní rozvedeny jednak v obecné rovině, jednak pro ilustraci na velmi jednoduchém příkladu.

Příklad.

Uvažujme jistou výrobní jednotku, která vyrábí dva druhy výrobků A a B . K jejich výrobě potřebuje mimo jiné dvě úzkoprofilové suroviny S_1 , S_2 , které výrazně ovlivňují výrobu. Celková zásoba suroviny S_1 je 120 tun, S_2 je 132 tun. Vše ostatní potřebné k výrobě, tj. další suroviny, pracovní síly, energie a další nutné kapacity má k dispozici v dostatečném množství. Celý uvažovaný výrobní proces nechť je periodický a my uvažujeme jen o jedné periodě. Výrobní jednotka má smluvního odběratele, který požaduje alespoň 10 000 kusů výrobku A a 5 000 kusů výrobku B , avšak je ochoten odkoupit i jakékoliv další množství nad tyto minimální limity. Úkolem je sestavit výrobní plán tak, aby celková utržená částka byla co nejvyšší. Z řady možných řešení tedy chceme vybrat takové, které je pro nás z určitého hlediska nejlepší.

2.3.1 Formulace ekonomického modelu

V ekonomickém modelu musí být zachyceny všechny podstatné rysy modelované skutečnosti. Tato fáze tvorby lineárního optimalizačního modelu je především záležitostí odborníků z té oblasti, jejíž model tvoříme. V rámci předkládaného textu se můžeme touto fází zabývat pouze po formální, nikoliv po obsahové stránce. I když konkrétní náplň ekonomických modelů je velice různorodá, lze po formální stránce vymezit společné rysy těchto modelů. Přitom musí být ekonomický model sestaven tak, aby ho bylo možné ve druhé fázi převést do řeči matematiky a pak řešit standardními metodami lineárního programování. Při formulaci každého ekonomického modelu postupujeme tak, že:

- určíme činnosti, které ve sledované skutečnosti probíhají,
- určíme podmínky, které jsou nezbytné pro jejich uskutečnění,
- stanovíme cíl, kterého chceme realizací činností za daných podmínek dosáhnout.

Činnosti v ekonomickém modelu nazýváme *procesy*. Reprezentují konkrétní činnosti, např. výroba určitého výrobku, nákup suroviny, uskutečnění určitého technologického procesu, ujetí určité vzdálenosti apod. O kvantech, úrovních činností máme rozhodnout, t.j. řešením modelu musíme stanovit takové úrovně procesů, abychom dodrželi stanovené podmínky a dosáhli vytčeného cíle.

Podmínky uskutečnění procesů nazýváme *činitelé modelu*. Rozlišují se činitelé *na straně vstupu*, které se při realizaci procesu spotřebovávají, a činitelé *na straně výstupu*, které se při realizaci procesu produkují. Příkladem činitele na straně vstupu může být surovina, pracovní síla, energie apod., činitelem na straně výstupu je např. výrobek jako produkt určitého technologického postupu apod. Abychom mohli na základě ekonomického modelu formulovat model matematický, musíme pro každého činitele definovat:

- *celkový objem činitele* (např. zásoba suroviny v kg), v případě činitele na straně vstupu jde o disponibilní objemy, v případě činitele na straně výstupu o požadované objemy,
- *vztah činitele k procesům modelu*, vyjádřený spotřebou (vstupující množství) při jednotkové úrovni procesu resp. vyjádřený výrobou (vystupující množství) při jednotkové úrovni procesu.

Vztah činitelů a procesů je reprezentován jako *strukturní* nebo *technické koeficienty*.

Požadované výsledky lze z daných omezených zdrojů získat uskutečněním činností či procesů mnoha způsoby, které lze vyjádřit jako různé kombinace těchto činností. Navíc mohou být kombinace činností omezeny dalšími podmínkami jiného druhu, které lze rovněž formulovat v ekonomickém modelu. Úkolem potom je, nalézt ze všech vhodných kombinací činností či procesů, tj. z těch, které poskytují požadované výsledky z daných zdrojů, onu nejlepší - optimální kombinaci.

Výrazy "nejlepší - optimální" mají smysl pouze tehdy, je-li dáno hledisko posouzení, tzv. *kritérium optimality*, které je poslední nutnou součástí ekonomického modelu. Může jím být nějaký významný ukazatel, např. dosažení maximálního zisku, minimálních nákladů, spotřeby určitého zdroje, produkce zvlášť požadovaného výrobku apod. Abychom mohli jednotlivá řešení posoudit z hlediska kritéria (kvantifikovat), musíme znát *ceny procesů*. Cena procesu vlastně určuje, o kolik se s jednou jednotkou tohoto procesu zvýší resp. sníží celková hodnota kritéria. Nemusí jít věcně o skutečné ceny v peněžních jednotkách, ale např. o počet ujetých km, množství výrobků v kusech nebo kg.

Přehled jednotlivých částí ekonomického modelu a jejich vztahů je uveden v tab. 2.1.

činitelé	procesy				úroveň
	1	2	...	n	
$1 \rightarrow$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
$2 \rightarrow$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
$\leftarrow m$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
kritérium	c_1	c_2	...	c_n	max/min

Tab. 2.1 Parametry ekonomického modelu

Symbolsy v tabulce:

a_{ij} ... je spotřeba (produkce) i -tého činitele na jednu jednotku j -tého procesu,

b_i ... je celkový objem i -tého činitele,

c_j ... je cena j -tého procesu,

$i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$.

Symbol $\rightarrow$ označuje činitele na straně vstupu, tj. např. a_{12} je počet jednotek prvního činitele spotřebovaných na jednotku druhého procesu, symbol $\leftarrow$ označuje činitele na straně výstupu, tj. např. a_{m1} je počet jednotek m -tého činitele vyrobených při jednotkové úrovni prvního procesu.

Příklad - pokračování. Formulace ekonomického modelu dle zadání.

- 1) V ekonomickém modelu jsou 2 procesy: výroba výrobku A a výroba výrobku B . Úroveň prvního procesu je počet vyrobených kusů výrobku A , úroveň druhého procesu je počet vyrobených kusů B . Jednotkou nechť je 1000 kusů.
- 2) V úloze jsou formulovány čtyři podmínky, definujme tedy čtyři činitele: surovinu S_1 , surovinu S_2 (oba na straně vstupu), výrobek A , výrobek B (na straně výstupu).

- 2a) Jsou dána disponibilní množství surovin: pro surovinu S_1 120 tun, pro surovinu S_2 132 tun, která určují omezení na straně vstupu.
- 2b) Jsou dána minimální požadovaná množství výrobků: 10000 kusů výrobku A , 5000 kusů výrobku B , která značí omezení modelu na straně výstupu.
- 2c) Z informací uvedených v obecném popisu ekonomického modelu nejsou uvedeny strukturní koeficienty, tedy spotřeba jednotlivých surovin pro jednotlivé výrobky. Necht' k výrobě 1 kusu výrobku A se spotřebují 3 kg suroviny S_1 a 4 kg suroviny S_2 , na 1 kus výrobku B se spotřebují 4 kg suroviny S_1 a 3 kg suroviny S_2 .
- 3) Kritérium optimality řešení je celková tržba, jejíž maximum hledáme. K tomu musíme zadat ceny produktů. Necht' cena 1 kusu výrobku A je 78 Kč (cena procesu A) a výrobku B 90 Kč.

Vztah všech činitelů k jednotce procesů, objemy činitelů a ceny procesů jsou přehledně uvedeny v tab. 2.2.

činitelé	procesy		objem činitele
	výrobek A	výrobek B	
$S_1 \rightarrow$	3 kg/ks	4 kg/ks	120 tun
$S_2 \rightarrow$	4 kg/ks	3 kg/ks	132 tun
$\leftarrow A$	1	-	10 000 ks
$\leftarrow B$	-	1	5 000 ks
kritérium	78 Kč/ks	90 Kč/ks	max

Tab. 2.2 Ekonomický model řešeného příkladu

2.3.2 Formulace matematického modelu

Každému prvku ekonomického modelu odpovídá určitý prvek matematického modelu. Procesu v ekonomickém modelu je v matematickém modelu přiřazena jedna *proměnná*. Její velikost pak určuje úroveň tohoto procesu. Je-li např. j -tým procesem výroba určitého konkrétního výrobku, pak x_j je počet kusů výrobku, vyrobených za určité období. Z věcné interpretace procesů vyplývá, že musí probíhat na nezáporné úrovni, a tedy procesům odpovídající proměnné v matematickém modelu musí být také nezáporné. Pro každou proměnnou modelu tedy formulujeme podmínku nezápornosti

$$x_j \geq 0, \quad (2.3.1)$$

kde $j \in P$, P je množina proměnných modelu.

Každá podmínka uvažovaná v ekonomickém modelu je v matematickém modelu vyjádřena tzv. omezením modelu ve formě nerovnosti nebo rovnice. Levou stranu nerovnosti představuje spotřeba resp. výroba činitele (podle typu činitele) jako lineární funkce proměnných

se strukturními koeficienty, pravá strana reprezentuje celkové objemy činitele. Lze tedy *i*-té omezení modelu obecně vyjádřit ve tvaru

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \text{ R } b_i, \quad (2.3.2)$$

kde

a_{ij} ... je strukturní koeficient vyjadřující spotřebu (produkci) *i*-tého činitele na jednu jednotku *j*-tého procesu,

b_i ... je absolutní člen určující celkový objem *i*-tého činitele (disponibilní nebo požadované množství),

R ... jeden z relačních vztahů $\leq, =, \geq$,

$i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$.

Kritérium optimality je v matematickém modelu vyjádřeno *účelovou funkcí*

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n, \quad (2.3.3)$$

kde

c_j ... je cenový koeficient, který určuje příspěvek jednotky *j*-tého procesu (resp. proměnné x_j) k hodnotě účelové funkce.

V tab. 2.3. je znázorněn vztah mezi jednotlivými částmi ekonomického a matematického modelu.

Ekonomický model	Matematický model
j-tý proces	podmínka nezápornosti $x_j \geq 0$
činitel b_i na straně vstupu	omezení $\sum_j^n a_{ij}x_j \leq b_i$
činitel b_i na straně výstupu	omezení $\sum_j^n a_{ij}x_j \geq b_i$
cíl činnosti	účelová funkce

Tab. 2.3 Vztah ekonomického a matematického modelu

Příklad - pokračování. Sestavení matematického modelu.

1) Sestavme proměnné modelu. Dvěma procesům v ekonomickém modelu odpovídají dvě proměnné:

- proměnná x_1 , která je rovna počtu vyrobených 1000 kusů výrobku A,
- proměnná x_2 , která je rovna počtu vyrobených 1000 kusů výrobku B.

Pro tyto proměnné platí podmínky nezápornosti

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 0.$$

- 2) Velikost proměnných x_1 a x_2 se nemění libovolně, ale pohybuje se v určitých mezích, které jsou dány kvantitativními vztahy mezi činiteli a procesy modelu. Tyto kvantitativní vztahy budou vyjádřeny v omezeních modelu podle (2.3.2). Ekonomický model má čtyři činitele, matematický model má tedy čtyři omezení. První dvě omezení vyjadřují vztah mezi spotřebou a zásobou surovin. Na 1 kus výrobku A se spotřebují 3 kg suroviny S_1 , tedy na x_1 kusů se spotřebuje $3x_1$ kg suroviny S_1 a analogicky pro výrobek B . Celková spotřeba suroviny S_1 nesmí přesáhnout její zásobu, tj.

$$3x_1 + 4x_2 \leq 120.$$

Podobně platí pro surovinu S_2 nerovnost

$$4x_1 + 3x_2 \leq 132.$$

Další dvě omezení jsou na straně výstupu a udávají minimální požadovanou produkci výrobků A a B , tj. dolní mez obou proměnných :

$$x_1 \geq 10,$$

$$x_2 \geq 5.$$

- 3) Formulovaná soustava nerovností modeluje matematicky podmínky činnosti výrobní jednotky, každá dvojice hodnot x_1, x_2 , která vyhovuje těmto nerovnostem, představuje jistý reálný výrobní plán. Např. hodnoty $x_1=15, x_2=10$ vyhovují daným podmínkám, zatímco hodnoty $x_1=25, x_2=15$ představují nereálný plán, na který nestačí kapacity. Ze všech možných reálných plánů vybereme ten, pro který je celková tržba vyjádřená účelovou funkcí

$$Z = 78x_1 + 90x_2$$

maximální.

2.3.3 Řešení modelu

Existuje řada metod pro řešení lineárních optimalizačních modelů. Speciální metodou pro řešení pouze nejjednodušších úloh lineárního programování je grafická metoda. Její praktické použití je velmi omezené, protože řeší pouze úlohy velmi malého rozsahu. Lze však na této metodě ilustrovat postup při řešení lineárních optimalizačních modelů a pojmy používané v dalším textu. Standardnímu numerickému řešení úlohy lineárního programování bude věnována zvláštní kapitola.

Pro grafické řešení v rovině formulujeme úlohu lineárního programování, která má dvě proměnné a m vlastních omezení:

$$a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 \text{ R } b_i, \quad (2.3.4)$$

$$x_j \geq 0, \quad (2.3.5)$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max/\min, \quad (2.3.6)$$

kde R je $\leq, =, \geq$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Omezení lze znázornit v 1. kvadrantu souřadnicového systému os x_1, x_2 a nalézt zde extrém účelové funkce (2.3.6).

Definujme pro tuto úlohu vektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$, který je přípustným řešením úlohy, jestliže jeho souřadnice vyhovují nerovnostem (2.3.4) a (2.3.5), a je optimálním řešením, jestliže jeho souřadnice vyhovují nerovnostem (2.3.4) a (2.3.5) a maximalizují resp. minimalizují hodnotu účelové funkce (2.3.6).

Při grafickém řešení hledáme množinu přípustných řešení, a na ní řešení optimální, následujícím způsobem:

- v souřadnicovém systému graficky znázorníme poloroviny odpovídající nerovnostem modelu, resp. přímky odpovídající rovnicím,
- nalezneme průnik těchto množin v 1. kvadrantu (t.j. pro nezáporné x_1, x_2),
- účelová funkce je znázorněna sítí rovnoběžek; hledáme-li maximum účelové funkce, je optimální řešení v bodě dotyku účelové funkce množiny přípustných řešení shora, hledáme-li minimum, je optimální řešení v bodě dotyku zdola.

Příklad - pokračování. Grafické řešení matematického modelu.

- Zvolíme souřadnicový systém s osami x_1, x_2 a v něm znázorníme nerovnosti

$$3x_1 + 4x_2 \leq 120$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 132$$

$$x_1 \geq 10$$

$$x_2 \geq 5$$

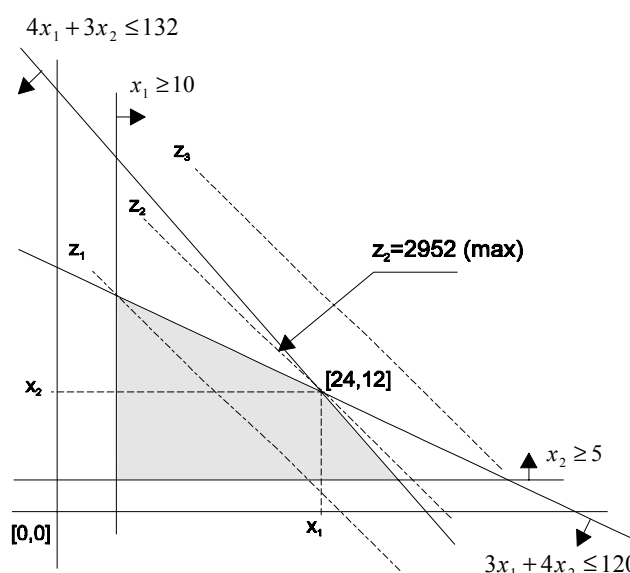
- Najdeme průnik všech polorovin v 1. kvadrantu.

- Znázorníme účelovou funkci

$$z = 78x_1 + 90x_2$$

sítí rovnoběžek a najdeme tu z nich, která se dotýká množiny

přípustných řešení. Z grafu lze odečíst optimální řešení, které je reprezentováno bodem X = [24, 12]. Vektor optimálního řešení je tedy $\mathbf{x} = [24, 12]$ a maximum $z = 2\,952$.



2.3.4 Ekonomická interpretace řešení

Řešením matematického modelu získáme výsledky, které je třeba převést zpět do kategorií ekonomického modelu a analyzovat, do jaké míry odpovídají požadavkům praxe. Vzhledem k tomu, že analýza výsledků přesahuje rámec tohoto učebního textu, lze ukázat pouze schematicky ekonomickou interpretaci, která vychází ze vztahu:

úroveň procesu v ekonomickém modelu $\Leftrightarrow$ velikost proměnné v matematickém modelu.

Příklad - pokračování. Interpretace výsledků řešení.

Z vektoru optimálního řešení $\mathbf{x} = [24, 12]$ vyplývá, že úroveň prvního procesu je 24, úroveň druhého procesu je 12. Pro výrobní jednotku je tedy nejvýhodnější vyrábět 24 kusů

výrobku A a 12 kusů výrobku B . Maximální velikost tržby, kterou lze za těchto podmínek dosáhnout, je 2952 Kč.

Matematický model, který byl sestaven a řešen v předcházejícím textu, se zabýval stanovením úrovně procesů popsanych v ekonomickém modelu. Kromě této otázky lze řešit na základě zadaných parametrů ekonomického modelu ještě jiný doplňkový problém. Ten se zabývá stanovením ceny, kterou v modelové situaci mají činitelé modelu.

Příklad - pokračování. Zadání doplňkového problému.

Uvažujme situaci výrobní jednotky, která má např. momentální problém s odbytem výrobků a které zákazník nabídl, že odkoupí její zásobu suroviny S_1 a S_2 za takovou cenu, aby celková částka byla minimálně rovna předpokládané tržbě za prodané výrobky A a B , tj. za takovou cenu, aby výrobní jednotka neutrpěla ztrátu.

Pro jednoduchost upustíme od podmínek minimální produkce výrobků A a B , protože už nezkoumáme procesy produkce, t.j. vynecháme omezení na straně výstupu. Uvažujeme tedy model

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\leq 120 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 132 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ z = 78x_1 + 90x_2 &\rightarrow \max. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Stanovme obecně cenu, za kterou by výrobní jednotka prodala 1 kg suroviny S_1 a S_2 .

Řešení.

Hledanou cenu za jednotku suroviny S_1 označme symbolem u_1 , cenu za jednotku S_2 symbolem u_2 . Je-li cena za 1 kus výrobku A 78 Kč, pak suroviny obsažené v 1 kusu tohoto výrobku musíme prodat alespoň za tuto cenu. To vede na omezení pro u_1 a u_2 :

$$3u_1 + 4u_2 \geq 78.$$

Podobná úvaha pro cenu 1 kusu výrobku B a cenu surovin v něm obsažených dává omezení

$$4u_1 + 3u_2 \geq 90.$$

Z interpretace u_1 a u_2 vyplývají podmínky nezápornosti pro proměnné u_1 a u_2 .

Zformulujme účelovou funkci nového modelu. Z hlediska kupujícího bude zřejmě únosná taková cena, která neporoste neomezeně. Označme celkovou sumu za prodej surovin f . Pak bude reálná účelová funkce

$$f = 120u_1 + 132u_2 \rightarrow \min.$$

Řešením matematického modelu

$$\begin{aligned} 3u_1 + 4u_2 &\geq 78 \\ 4u_1 + 3u_2 &\geq 90 \\ u_i &\geq 0, i = 1, 2 \\ f &= 120u_1 + 132u_2 \rightarrow \min.. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

(např. grafickou metodou) obdržíme vektor optimálního řešení $\mathbf{u} = [18, 6]$. Tedy minimální cena, za kterou lze prodat 1 kg suroviny S_1 je 18 Kč, cena za 1 kg suroviny S_2 je 6 Kč. Celkový výnos

při takovém prodeji je 2 952 Kč, tj. stejný jako tržba z prodeje 24 kusů výrobku A a 12 kusů výrobku B .

Model (2.3.7) pro optimalizaci procesů výroby A a B nazýváme primárním modelem, model (2.3.8) pro ocenění činitelů modelem duálním. Duálně sdružené úlohy budou předmětem zájmu kapitoly 2.6.

2.4 FORMULACE TYPICKÝCH MODELŮ ÚLOH LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Metody lineárního programování se využívají v řadě ekonomických oblastí k řešení problémů, které se svou složitostí i konkrétním obsahem značně liší. Proto existuje i řada různých modelů úloh lineárního programování. Formulace modelu je tvůrčí práce, při které je třeba brát v úvahu specifické rysy daného problému, a nelze proto sestavit jakýsi obecný algoritmus tvorby modelu (na rozdíl od numerického řešení modelu). Cennou pomůckou však mohou být modely některých vybraných typických problémů, které již byly metodami lineárního programování řešeny a které se v praxi v různých variantách a kombinacích nejčastěji vyskytují. Např. modely tzv. kapacitních problémů výrobního programování, úlohy řezné (krájecí), tj. úlohy o optimálním dělení materiálu, úlohy směšovací a úlohy distribuční. Jednotlivé typy úloh budou postupně představeny nejdříve v obecné (symbolické) formě, pak na konkrétních příkladech. Pro ilustraci jsou úmyslně voleny velmi jednoduché až triviální problémy a úlohy, jejich smyslem je však ukázat, jak ze slovně popsané ekonomické úlohy zformulovat matematický model.

2.4.1 Kapacitní problémy

Kapacitní problémy modelují a řeší takové situace, kdy při limitujících množstvích některých kapacit, jako jsou např. suroviny, disponibilní časový fond strojů, pracovní fond zaměstnanců, energie, finanční prostředky, se má dosáhnout splnění určitých požadavků, např. vyrobených předmětů tak, aby stanovený ukazatel, např. hrubá produkce, zisk, odbyt, náklady apod. dosáhl maxima resp. minima.

Kapacitní problémy lze dále rozdělit na problémy s danou strukturou sortimentu, se stanoveným poměrem výrobků nebo s tzv. zpětnou vazbou, kdy se některé z produkováných výrobků používají jako polotovary pro jiné vlastní výrobky.

Při obecné formulaci optimalizačního modelu výrobní struktury předpokládáme, že máme k dispozici m druhů zdrojů (výrobních činitelů) v množstvích $b_1, b_2, \dots, b_m$, které se spotřebovávají na výrobu n druhů produkce zkoumané výrobní jednotky. Vztahy mezi procesy a činiteli jsou zadány maticí $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$, jejíž prvky charakterizují normu spotřeby i -tého zdroje na jednotku j -tého druhu výrobku ($j = 1, 2, \dots, n$).

Efektivnost výroby jednotky j -tého druhu výrobku je charakterizována ukazatelem c_j , který může vyjadřovat zisk, cenu, objem produkce a další ukazatele charakterizující výnos či efekt nebo také náklady, pracnost, spotřebu apod.

Za předpokladu linearit v příslušných závislostech je třeba nalézt výrobní program s maximální celkovou efektivností výroby (optimální sortiment výroby).

Matematická formulace.

Označíme-li množství jednotek produkce j -tého druhu vyráběných zkoumanou výrobní jednotkou jako

$$x_j, (j = 1, 2, \dots, n),$$

lze matematický model úlohy formulovat následujícím způsobem.

Máme nalézt maximum lineární funkce

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Kromě omezení týkajících se zdrojů a spotřeby výrobních činitelů může být model doplněn o dodatečná omezení týkající se plánu a požadavků na množství vyráběné produkce, sortimentu, kompletování hotových výrobků, návaznosti technologických procesů atd.

Příklad 1.

Výrobní jednotka vyrábí 4 druhy výrobků - V_1, V_2, V_3, V_4 . K tomu disponuje určitými nezbytnými kapacitami. Z nich vyberme jen ty, které jsou omezujícími. Necht' jsou jimi disponibilní množství surovin S_1, S_2, S_3 a časový fond výrobních dělníků F . Ostatní faktory nejsou limitující. Jsou stanoveny spotřeby surovin a časového fondu na jednotice výrobků, jejich disponibilní množství a ceny jednotlivých výrobků. Pro sortiment výroby není žádné vnější omezení. Hledejme takovou strukturu výroby, aby celkový objem produkce byl v peněžním vyjádření maximální.

Řešení.

Faktor	Spotřeba na výrobek				Disponibilní objem
	V_1	V_2	V_3	V_4	
S_1	6.2	6.4	1.9	2.9	7200
S_2	3.1	3.3	1.5	1.2	3300
S_3	5.1	4.2	6.3	0.7	5600
F	0.8	1.9	2.1	2.3	2000
Cena	15	15.2	12.1	8.9	

Tab. 2.4 Ekonomický model příkladu 1.

Sestavili jsme tabulku ekonomického modelu.

Nejprve určíme způsob měření procesů (výroby). Vyrábíme výrobky V_1, V_2, V_3, V_4 , zvolme proto proměnné x_1, x_2, x_3, x_4 , které nechť měří objem jednotlivých výrobků (počet kusů).

Dále vyjádříme omezující podmínky pro limitující kapacity, t.j. tři druhy surovin S_1, S_2, S_3 a časový fond pracovníků F .

Bude-li se realizovat výroba výrobku V_1 na úrovni x_1 , V_2 na úrovni x_2 apod., pak výraz

$$6.2x_1 + 6.4x_2 + 1.9x_3 + 2.9x_4$$

charakterizuje celkovou spotřebu suroviny S_1 , která nesmí překročit zásobu 7200. Tedy

$$6.2x_1 + 6.4x_2 + 1.9x_3 + 2.9x_4 \leq 7200.$$

Obdobně pro další suroviny a časový fond formulujeme omezení

$$3.1x_1 + 3.3x_2 + 1.5x_3 + 1.2x_4 \leq 3300$$

$$5.1x_1 + 4.2x_2 + 6.3x_3 + 0.7x_4 \leq 5600$$

$$0.8x_1 + 1.9x_2 + 2.1x_3 + 2.3x_4 \leq 2000$$

Proměnné x_1, x_2, x_3, x_4 charakterizují objem vyrobené produkce V_1, V_2, V_3, V_4 , musí tedy splňovat podmínky nezápornosti, vyjádřené nerovnostmi

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Nakonec zformulujeme podmínku, aby výsledná produkce v peněžním vyjádření byla maximální. Tento ukazatel je zřejmě charakterizován výrazem

$$15x_1 + 15.2x_2 + 12.1x_3 + 8.9x_4.$$

Protože požadujeme maximální produkci, doplníme model o tuto lineární funkci, jejíž extrém (konkrétně maximum) hledáme

$$z = 15x_1 + 15.2x_2 + 12.1x_3 + 8.9x_4 \dots \max.$$

První skupinu podmínek označujeme jako vlastní omezení, druhá skupina je podmínka nezápornosti a funkci, jejíž extrém hledáme, nazýváme účelovou funkcí.

Matematický model úlohy tedy formulujeme následovně :

Hledáme nezáporný vektor

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4],$$

který vyhovuje nerovnostem

$$6.2x_1 + 6.4x_2 + 1.9x_3 + 2.9x_4 \leq 7200$$

$$3.1x_1 + 3.3x_2 + 1.5x_3 + 1.2x_4 \leq 3300$$

$$5.1x_1 + 4.2x_2 + 6.3x_3 + 0.7x_4 \leq 5600$$

$$0.8x_1 + 1.9x_2 + 2.1x_3 + 2.3x_4 \leq 2000$$

a maximalizuje účelovou funkci

$$z = 15x_1 + 15.2x_2 + 12.1x_3 + 8.9x_4.$$

Tato typická kapacitní úloha může být modifikována určitými sortimentními požadavky. Např. může být doplněna podmínkou, že výroba výrobku V_1 a V_2 má být v poměru 1 : 2. Takovou podmínku lze vyjádřit rovnicí

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2 \quad \text{resp. } x_1 - 0.5x_2 = 0.$$

Obecně lze vyjádřit podmínky pro složení výroby celkem s různých výrobků, jejichž objem výroby má být v poměru $k_1 : k_2 : \dots : k_s$, soustavou $s-1$ omezení ve tvaru

$$\frac{x_i}{k_i} - \frac{x_{i+1}}{k_{i+1}} = 0, i = 1, 2, \dots, s-1.$$

Další častou modifikací kapacitního problému je případ, kdy část produkce se použije jako polotovary pro jiný výrobek vlastní produkce a část se realizuje jako finální výrobek.

Příklad 2.

Výrobní jednotka má dva provozy, v prvním se vyrábí výrobek V_1 , který je částečně polotovarem pro druhý provoz, který vyrábí výrobek V_2 . Výroba je omezena pouze určitým disponibilním množstvím suroviny S . Požadavek na výrobu je limitován pouze u výrobku V_1 , který je současně polotovarem pro druhý výrobek. Vzhledem k tomu, že sledujeme prvek, kdy jeden výrobek je polotovarem pro druhý, další omezení neuvažujeme. Úkolem je stanovit takový výrobní program, který by zabezpečil maximální odbyt. Strukturní koeficienty, disponibilní množství a ceny jsou uvedeny v následující tabulce.

surovina polotovary	spotřeba na jedn. výroby		disponibilní množství	minimální odbyt
	V_1	V_2		
S	5	2	3000	-
V_1	-	1	-	250
cena	5	10	-	-

Tab. 2.5 Ekonomický model příkladu 2.

Řešení.

Objem produkce výrobků V_1, V_2 označme x_1, x_2 .

Úloha má dvě omezení. První charakterizuje rozdělení spotřeby suroviny S mezi výrobky V_1, V_2

$$5x_1 + 2x_2 \leq 3000.$$

Druhé vyjadřuje vztah mezi výrobou, spotřebou a odbytem polotovaru V_1

$$x_1 - x_2 \geq 250.$$

Pokud kritériem optimalizace struktury výroby je peněžní ukazatel produkce, pak účelová funkce

$$z_1 = 5x_1 + 10x_2$$

představuje ukazatel hrubé produkce, protože hodnota výrobku V_1 je započítávána dvakrát.

Chceme-li optimalizovat strukturu výroby podle ukazatele odbytu, je třeba odečíst spotřebu výrobku V_1 na výrobu V_2 . Tedy

$$z_2 = 5(x_1 - x_2) + 10x_2 = 5x_1 + 5x_2.$$

Matematický model úlohy lze tedy zformulovat takto:

Hledáme nezáporný vektor

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2],$$

který vyhovuje nerovnostem

$$5x_1 + 2x_2 \leq 3000$$

$$x_1 - x_2 \geq 250$$

a maximalizuje účelovou funkci

$$z = 5x_1 + 5x_2.$$

Obecně lze vyjádřit vztah mezi výrobou, spotřebou a odbytem, jestliže x_p je výroba p -tého výrobku, a_{pj} norma spotřeby p -tého polotovaru na j -tý výrobek a b_p požadavek na odbyt p -tého výrobku omezeními

$$x_p - (a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pk}x_k) \geq b_p.$$

Určitou modifikací řešení kapacitní úlohy v případě, kdy část produkce je použita jako polotovar pro jinou část produkce. Modifikovaný postup spočívá v přesunu více tvůrčí činnosti do ekonomického modelu, vytvoření matematického modelu je pak víceméně rutinní záležitostí.

Příklad 3.

Formulujme ekonomický a matematický model úlohy o výrobním programu. Výrobní jednotka vyrábí 4 druhy výrobků, při jejich výrobě spotřebovává surovinu S , které má k dispozici omezené množství 1400 t, a využívá strojní zařízení Z s omezenou kapacitou strojového času 1200 hod. Dalších zdrojů má podnik k dispozici dostatečné množství. Spotřeba suroviny S v tunách je pro jednotlivé výrobky postupně 2, 1.5, 2, 0, potřeba strojního času v hodinách je 1.5, 0, 2, 2.5. Odbytové ceny v Kč/t jsou postupně pro V_1 až V_4 300, 600, 1000, 3000. Výrobky V_1, V_2 jsou polotovary pro výrobu V_2, V_3, V_4 , ale mohou být prodávány i jako finální výrobky. Výrobku V_1 se spotřebuje jako polotovaru v množství 0.5 t při výrobě V_2 a 1 t při výrobě V_4 , výrobku V_2 se spotřebuje 0.5 t pro V_3 a 2 t pro V_4 . Stanovme optimální výrobní program tak, aby odbyt závodu byl maximální.

Řešení.

Do výroby vstupují 4 zdroje (surovina S , zařízení Z , výrobky V_1 a V_2 jako polotovary) a vystupují čtyři výsledky (výrobky V_1 až V_4). Výrobky V_1 a V_2 jsou činiteli vstupujícími i vystupujícími. Výrobní procesy definujeme jako v předchozích příkladech - první výrobní proces je výroba výrobku V_1 , atd. Každý jednotlivý proces vyrábí pouze jeden výrobek a žádný výrobek se nevyrábí ve více než jednom procesu (vzájemně jednoznačné přiřazení proces - výrobek).

Proti předchozím případům je zde poněkud komplikovanější závislost mezi výrobními procesy. Bude proto vhodné odlišit koeficienty vstupu od koeficientů výstupu znaménkem ('+' vstup, '-' výstup). Při jednotkových úrovních procesů vstupují (+) a vystupují (-) množství činitelů dle tabulky 2.6.

V posledním řádku tabulky jsou koeficienty výstupu, které vyjadřují jednotkový přínos procesů k hodnotě odbytu, který je kritériem optimality problému. Jsou vypočteny tak, že v každém procesu jsou oceněny odbytovými cenami vstupující a vystupující výrobky a ceny jsou sečteny. Ceny výrobků lze považovat za ekonomickou charakteristiku výstupu brutto, charakteristikami netto jsou pak uvedené koeficienty jednotkového přínosu k hodnotě odbytu.

	1	2	3	4	cena	disp.
S[t]	2	1.5	2	0		1400
Z[hod]	1.5	0	2	2.5		1200
V_1	-1	0.5	0	1	300	
V_2	0	-1	0.5	2	600	
V_3	0	0	-1	0	1000	
V_4	0	0	0	-1	3000	
odbyt[Kč]	-300	-450	-700	-1500		

Tab. 2.6 Ekonomický model příkladu 3.

Např. interpretace pro třetí proces je následující: při jednotkové úrovni třetího procesu se vyrobí 1 t výrobku V_3 v hodnotě 1000 Kč, zároveň se však spotřebuje 0.5 t výrobku V_2 (600 Kč/t), které by se dalo prodat za 300 Kč; skutečný přínos jednotkové úrovně třetího procesu k hodnotě odbytu je tedy pouze 700 Kč.

Formulace matematického modelu.

Hledaný výrobní program je určen čtyřmi veličinami, které vyjadřují úrovně čtyř procesů V_1, V_2, V_3, V_4 . Potřebujeme tedy čtyři proměnné x_1, x_2, x_3, x_4 .

První dvě omezující nerovnosti vyjadřují omezení ve spotřebě kapacity suroviny S a strojního zařízení Z :

$$1.5x_1 + 2x_3 + 2.5x_4 \leq 1200$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 2x_3 \leq 1400$$

kde na pravé straně je disponibilní množství suroviny, resp. kapacita strojního zařízení, na levé straně jsou kapacity suroviny a strojního zařízení potřebné pro realizaci výrobního programu.

Další dvě nerovnosti musí vyjadřovat potřebnou relaci mezi výrobky V_1, V_2 jako polotovary a ostatními výrobky. Na levé straně první nerovnosti je spotřeba výrobku V_1 jako polotovaru na výrobu výrobků V_2 a V_4 , na pravé straně je jeho výroba. Podobně pro druhou nerovnost. Původní tvar nerovností

$$0.5x_2 + x_4 \leq x_1$$

$$0.5x_3 + 2x_4 \leq x_2$$

převědeme na nerovnosti se všemi proměnnými na levé straně a absolutním členem na straně pravé.

Účelová funkce musí vyjadřující odbyt v Kč jako funkci proměnných x_1, x_2, x_3, x_4 , neboť odbyt je kritériem pro výběr optimálního výrobního programu. Celkovou hodnotu odbytu vyjadřuje funkce z :

$$z = 300x_1 + 450x_2 + 700x_3 + 1500x_4.$$

Hodnota odbytu má být maximální.

Matematický model lze tedy vyjádřit následovně:

Hledáme nezáporný vektor

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4],$$

vyhovující podmínkám

$$1.5x_1 + 2x_3 + 2.5x_4 \leq 1200$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 2x_3 \leq 1400$$

$$-x_1 + 0.5x_2 + x_4 \leq 0$$

$$-x_2 + 0.5x_3 + 2x_4 \leq 0$$

a maximalizující funkci

$$z = 300x_1 + 450x_2 + 700x_3 + 1500x_4.$$

2.4.2 Směšovací problémy

Dalším typem úloh lineárního programování jsou směšovací úlohy, v nichž jde o stanovení směsi požadované kvality buď s minimální nebo s maximální hodnotou stanoveného ukazatele, např. nákladů. Typickými směšovacími problémy jsou tzv. *nutriční (výživový) problém*, který řeší nejvhodnější skladbu potravy s potřebným množstvím jednotlivých nutričních složek ve stravě (živin, vitamínů, minerálů) při minimálních nákladech na pořízení jednotlivých složek, nebo problém optimální vsázky do pece, stanovení benzínu s požadovaným oktanovým číslem apod.

Uvažujeme n produktů, z nichž je třeba vytvořit za předpokladu různých proporcí různé směsi. Každý produkt a tedy také jejich směs obsahuje m látek.

Nechť a_{ij} představuje množství i -té látky ($i = 1, 2, \dots, m$), které je obsaženo v jednotce j -tého produktu ($j = 1, 2, \dots, n$) a a_i množství i -té látky v jednotce výsledné směsi. Předpokládáme lineární závislost mezi a_{ij} a a_i . Jestliže směs obsahuje x_j jednotek j -tého produktu, pak

$$a_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j.$$

Nechť čísla $c_1, c_2, \dots, c_n$ charakterizují cenu, váhu, kalorickou hodnotu apod. jednotky j -tého produktu, čísla $b_1, b_2, \dots, b_m$ představují minimálně nutný obsah i -té látky v dané směsi.

Je třeba určit takové složení směsi (tj. čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$), při kterých by celková cena byla minimální (nebo jiná celková charakteristika byla nejlepší).

Matematická formulace.

Nalézt maximum (minimum) lineární funkce

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

a

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Příklad 4.

Je třeba stanovit nejlevnější složení dávky krmné směsi pro drůbež tak, aby hmotnost dávky byla alespoň 1 q, obsahovala alespoň 60 škrobových jednotek, 21 kg bílkovin a nejvýše 15% hrubé vlákniny. V tabulce jsou uvedena krmiva, která jsou k dispozici, jejich ceny a obsah živin.

Krmiva	Obsah ve 100 kg			Cena Kč/1q
	bílkoviny	škrob. jedn.	vláknina	
Melasa	3	48	-	60
Sušené řízky řepné	4.5	51	17	20
Ječmen	8	71	4.5	118
Oves	9	64	10	108
Klíčené žito	11	54	6.5	125
Klíčená pšenice	11.5	48	10	125
Řepkový šrot	30	54	12.5	110
Sojový šrot	45.5	72	6	190

Tab. 2.7 Ekonomický model příkladu 4.

Řešení.

Definujme hospodářské procesy modelu jako nákup určitého druhu krmiva a jeho použití pro krmnou směs. Činiteli těchto procesů jsou jednak sama nakupovaná krmiva, vyjadřovaná jak v hmotnostních tak v hodnotových jednotkách, a jednak živiny obsažené v krmivech – bílkoviny, škrob, vláknina. Rozdělení činitelů na vstupující a vystupující není v tomto modelu významné a je do značné míry sporné. Např. můžeme považovat živiny za výstupy, ostatní činitele za vstupy.

Proměnné modelu x_j , ($j = 1, 2, \dots, 8$) budou reprezentovat úrovně jednotlivých procesů měřené ve 100 kg množstvích nakupovaných (a směšovaných) krmiv.

Omezení na celkovou hmotnost dávky krmné směsi, která nesmí klesnout pod 100 kg, lze vyjádřit nerovností:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 1,$$

omezení na minimální celkový množství obsah škrobových jednotek:

$$48x_1 + 51x_2 + 71x_3 + 64x_4 + 54x_5 + 48x_6 + 54x_7 + 72x_8 \geq 60,$$

omezení na minimální množství obsah bílkovin:

$$3x_1 + 4.5x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 11x_5 + 11.5x_6 + 30x_7 + 45.5x_8 \geq 21,$$

a omezení na maximální poměrné zastoupení vlákniny:

$$17x_2 + 4.5x_3 + 10x_4 + 6.5x_5 + 10x_6 + 12.5x_7 + 6x_8 \leq 15(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8) ,$$

(pravá strana nerovnosti musí být rovněž v 100 kg).

Úpravou poslední nerovnosti dostaneme

$$-15x_1 + 2x_2 - 10.5x_3 - 5x_4 - 8.5x_5 - 5x_6 - 2.5x_7 - 9x_8 \leq 0.$$

Účelová funkce bude vyjadřovat celkové náklady v Kč na krmnou dávku. Tyto náklady musí být minimální:

$$z = 60x_1 + 20x_2 + 118x_3 + 108x_4 + 125x_5 + 125x_6 + 110x_7 + 190x_8 \dots \min.$$

Matematický model:

$$\text{Hledáme nezáporný vektor } \mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8],$$

který vyhovuje podmínkám

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &\geq 1 \\ 48x_1 + 51x_2 + 71x_3 + 64x_4 + 54x_5 + 48x_6 + 54x_7 + 72x_8 &\geq 60 \\ 3x_1 + 4.5x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 11x_5 + 11.5x_6 + 30x_7 + 45.5x_8 &\geq 21 \\ -15x_1 + 2x_2 - 10.5x_3 - 5x_4 - 8.5x_5 - 5x_6 - 2.5x_7 - 9x_8 &\leq 0 \end{aligned}$$

a minimalizuje funkci

$$z = 60x_1 + 20x_2 + 118x_3 + 108x_4 + 125x_5 + 125x_6 + 110x_7 + 190x_8 .$$

2.4.3 Úlohy o dělení materiálu

Úlohy tohoto typu jsou označovány jako tzv. řezné nebo krájecí problémy a řeší otázku, jak rozdělit výchozí materiál standardních rozměrů na určité počty dílů menších rozměrů tak, aby spotřeba výchozího materiálu byla minimální, nebo aby odpad byl minimální. Základem těchto úloh je tzv. řezné schéma, které je buď zadáno nebo jej lze sestavit, a v něm jsou zachyceny všechny možné kombinace dělení výrobního materiálu na požadované menší díly.

V obecném vyjádření lze úlohu o dělení materiálu formulovat následujícím způsobem. Je třeba rozřezat n různých materiálů. Z těchto materiálů se vyrábí m různých výrobků v množství úměrných číslům $b_1, b_2, \dots, b_m$. Necht' každá jednotka j -tého materiálu ($j = 1, 2, \dots, n$) může být rozřezána p různými technologickými způsoby tak, že při využití i -tého způsobu ($i = 1, 2, \dots, p$) dostáváme a_{ik}^j jednotek výrobků k -tého druhu ($k = 1, 2, \dots, m$). Úkoly určení optimálního plánu rozřezání výchozího materiálu mohou být dvojího typu:

- 1) určit plán, který by zabezpečoval výrobu maximálního počtu kompletů, za podmínky, že j -tého druhu materiálu je k dispozici a^j jednotek,
- 2) určit plán, který by zabezpečoval výrobu b_k jednotek k -tého výrobku při minimální spotřebě výchozího materiálu nebo minimálním celkovém odpadu.

Matematická formulace.

Označme x_i^j počet jednotek j -tého výchozího materiálu, který je rozřezán i -tým způsobem. Dostáváme tak následující úlohu lineárního programování:

1) Za podmínek

$$x_i^j \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^p x_i^j = a^j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p a_{ik}^j x_i^j = b_k x, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

kde x je počet kompletů vyráběných výrobků, nalézt maximum lineární funkce

$$z = x.$$

Zjednodušeným případem je problém, kdy ke zpracování přichází materiál jednoho druhu, tj. $n = 1$ v množství a jednotek. Dostáváme následující úlohu:

Nalézt maximum funkce

$$z = x$$

za podmínek

$$\sum_{i=1}^p x_i = a,$$

$$\sum_{i=1}^p a_{ik} x_i = b_k x, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

2) Za podmínek

$$x_i^j \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p a_{ik}^j x_i^j = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

nalézt minimum funkce

$$z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p x_i^j.$$

Příklad 5.

Výrobní jednotka má zakázku na trubky o délce 1.25m a 1m. Minimální požadovaná dodávka je 250 kusů trubek délky 1.25m a 380 kusů trubek délky 1m. K dispozici jsou trubky 4.5m a 3m. Ztráty při řezání neuvažujeme. Jakým způsobem je třeba trubky řezat, aby

- spotřeba materiálu byla minimální,
- odpad byl minimální.

Řešení.

Sestavme řezné schéma všech možných způsobů dělení trubek o délce 3m a 4.5m na kusy požadované délky. Postupujeme přitom tak, že začneme maximálním počtem delších trubek

a doplníme kratšími trubkami tak, aby odpad byl vždy menší než nejmenší požadovaná délka. V dalším řezném plánu ubereme jednu delší trubku a je-li to možné, zvětšíme počet kratších trubek atd. Výsledek postupu je uveden v následujících tabulkách.

trubky	řezné plány			
4.5 m	1	2	3	4
1.25 m	3	2	1	0
1 m	0	2	3	4
odpad	0.75	0	0.25	0.5

trubky	řezné plány		
3 m	1	2	3
1.25 m	2	1	0
1 m	0	1	3
odpad	0.5	0.75	0

Tab. 2.8.a, b Řezné plány příkladu 5.

Z tabulek je patrné, že materiál lze řezat celkem sedmi způsoby. Definujme proto sedm proměnných:

x_1 ... počet 4.5 m trubek rozřezaných podle plánu 1 tab. 2.8.a,

x_2 ... počet 4.5 m trubek rozřezaných podle plánu 2 tab. 2.8.a,

$\vdots$

x_7 ... počet 3 m trubek rozřezaných podle plánu 3 tab. 2.8.b.

Jestliže rozřezáme x_1 trubek o délce 4.5 m podle prvního plánu, dostaneme $3x_1$ trubek o délce 1.25 m, rozřezáním x_2 trubek délky 4.5 m podle plánu 2 získáme $2x_2$ trubek dlouhých 1.25 m a $2x_2$ trubek o délce 1 m, atd.

Dvěma činitelům (stanovený počet trubek o délce 1.25 m a 1 m) tedy odpovídají dvě omezení modelu:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6 \geq 250$$

$$2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_6 + 3x_7 \geq 380$$

a) Chceme-li minimalizovat spotřebu materiálu, bude účelová funkce

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7,$$

b) chceme-li minimalizovat odpad, pak bude účelová funkce

$$z = 0.75x_1 + 0.25x_3 + 0.5x_4 + 0.5x_5 + 0.75x_6.$$

Ve většině případů vedou oba požadavky a), b) ke stejným výsledkům a to hlavně tehdy, když nepřipouštíme výrobu na sklad. V opačném případě se mohou objevit mezi různými plány i takové, při kterých sice není žádný odpad, ale jejich vzájemnou kombinací se zvyšuje spotřeba materiálu.

2.4.4. Distribuční modely

Distribuční modely tvoří rozsáhlou a speciální třídu optimalizačních úloh. Jejich matematický model se po formální stránce poněkud liší od ostatních úloh lineárního programování a k jejich řešení se používá speciálních metod, které jsou pro tento typ úloh mnohem efektivnější než metody obecné. Řešením těchto úloh se bude zabývat podrobněji zvláštní kapitola, nyní budou ilustrativně uvedeny některé vybrané distribuční úlohy. Mezi nejrozšířenější distribuční úlohy patří dopravní problém řešící plán přepravy s minimálními náklady, přiřazovací problém, který řeší optimální přiřazení strojů nebo lidí na pracoviště, obecný distribuční problém, který podobně jako kapacitní problémy řeší otázku rozdělení výroby, osevních ploch apod., problém obchodního cestujícího, který se zabývá plánováním okružních jízd apod.

2.4.4.1. Dopravní problém

Podstata problému spočívá ve stanovení takového plánu přepravy homogenní produkce od skupiny výrobců (ze skladů) skupině zákazníků (odběratelů), aby celkové přepravní náklady (celková přepravní vzdálenost) byly minimální.

Předpokládejme m dodavatelů $A_1, A_2, \dots, A_m$, jejichž kapacity činí $a_1, a_2, \dots, a_m$ a n spotřebitelů $B_1, B_2, \dots, B_n$ s požadavky $b_1, b_2, \dots, b_n$, přitom kapacity dodavatelů mohou beze zbytku uspokojit požadavky spotřebitelů. Dodání produkce od i -tého dodavatele k j -tému spotřebiteli je spojeno s určitými náklady, označme je c_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$). Předpokládáme tedy, že existuje jistá komunikační síť, kterou lze spojit i -tého dodavatele s j -tým spotřebitelem. Ocenění c_{ij} mohou představovat vzdálenosti v km, tarify, spotřebu pohonných hmot apod., může však jít např. o hypoteticky zvolenou stupnici preferencí.

Úkolem je nalézt takový plán přepravy produkce od dodavatelů ke spotřebitelům, při kterém by byly celkové přepravní náklady minimální (nebo přepravní vzdálenost co nejkratší).

Matematická formulace.

Označme x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) objem přepravy od i -tého dodavatele k j -tému spotřebiteli. Veškeré vstupní informace lze přehledně znázornit v pracovní tabulce – viz tab. 2.9.

Předpokládáme, že celkový objem kapacit se rovná celkovému objemu požadavků spotřebitelů, (hovoříme o tzv. vyrovnaném dopravním problému):

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Předpokládáme, že celkový objem kapacit se rovná celkovému objemu požadavků spotřebitelů, (hovoříme o tzv. vyrovnaném dopravním problému):

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Při formulaci omezujících podmínek rozlišujeme dvě základní skupiny omezení - řádková (kapacitní) a sloupcová (požadavková). První typ omezení charakterizuje rozdělení

kapacit dodavatelů mezi spotřebitele a druhý typ naplnění potřeb spotřebitelů (uspokojení požadavků). Omezení jsou reprezentována lineárními rovnicemi.

spotřebitelé→ dodavatelé ↓	B_1	B_2	...	B_n	kapacity
A_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
požadavky	b_1	b_2	...	b_n	$\Sigma b / \Sigma a$

Tab. 2.9. Vstupní informace dopravní úlohy.

Úlohu lineárního programování lze tedy formulovat následujícím způsobem:

Za podmínek

$$\begin{array}{rcl}
 x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} & & = a_1 \\
 & x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} & = a_2 \\
 & \vdots & \vdots \\
 & x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} & = a_m
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 x_{11} & + x_{21} + \dots & + x_{m1} & = b_1 \\
 x_{12} & & + x_{22} + \dots & + x_{m2} & = b_2 \\
 \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\
 x_{1n} & & + x_{2n} & & + x_{mn} & = b_n
 \end{array}$$

a

$$x_{ij} \geq 0$$

nalézt minimum lineární funkce

$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + \dots + c_{mn}x_{mn}.$$

Stručně lze zapsat model dopravního problému popsat následovně:

Nalézt minimum funkce

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

Příklad 6.

Tři výrobní jednotky jistého kvalitativně stejného produktu (např. pobočky jediné firmy) zásobují čtyři zákazníci, přitom každý z výrobců může principiálně zásobovat kteréhokoliv ze zákazníků. Jsou dány kapacity výrobců (dodavatelů), nároky zákazníků (odběratelů) a vzdálenosti mezi každým dodavatelem a odběratelem (viz tabulka 2.10). Úkolem je navrhnout takový program rozvozu, aby celkový objem přepravy byl minimální. Objem přepravy vyjádříme v jednotkách např. tunokilometry.

odběratelé→ dodavatelé ↓	O_1	O_2	O_3	O_4	kapacita
D_1	7	10	15	15	100
D_2	3	15	20	17	100
D_3	10	5	10	15	100
požadavky	50	60	120	50	280/300

Tab. 2.10. Zadání dopravní úlohy - příklad 6.

Řešení.

Označme $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{34}$ objem přepravovaného produktu od dodavatelů k odběratelům (první index značí dodavatele, druhý odběratele). Kapacita dodavatelů je vyšší než požadavek odběratelů, nemusí být tedy kapacita dodavatelů zcela vyčerpána, požadavky odběratelů však musí být splněny.

První část omezení se týká dodavatelů:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 100$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 100$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 100$$

Druhá část omezení se týká odběratelů:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 50$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 120$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 50$$

Účelová funkce má tvar

$$z = 7x_{11} + 10x_{12} + 15x_{13} + 15x_{14} + 3x_{21} + 15x_{22} + 20x_{23} + 17x_{24} + 10x_{31} + 5x_{32} + 10x_{33} + 15x_{34}$$

a má být minimalizována.

2.4.4.2. Zobecněný distribuční problém

Příklad 7.

Strojírenský závod vyrábí čtyři druhy výrobků na dvou automatických linkách *A* a *B*. Každý ze čtyř druhů výrobků může být vyroben na příslušné lince s vynaložením určitého strojového času. Náklady na hodinu práce linky *A* jsou 120 Kč a na hodinu práce linky *B* 90 Kč. Na každé automatické lince je k dispozici 3000 strojových hodin. Plány výroby pro jednotlivé druhy výrobků jsou postupně 800, 1800, 1200 a 1000 kusů. Čas v hodinách potřebný na výrobu jednotky určitého druhu výrobku na příslušné lince je uveden v tabulce 2.11. Je třeba přidělit výrobu na jednotlivé linky tak, aby plán byl splněn s minimálními náklady.

výrobek→ ↓ linka	1	2	3	4
<i>A</i>	0.4	0.2	0.4	0.2
<i>B</i>	0.8	0.6	0.4	0.6

Tab. 2.11. Časová náročnost určitého druhu výrobku na jednotlivých linkách

Řešení.

Nejdřív je nutné stanovit, které druhy výrobků budou vyráběny na které lince a v jakém množství. Definujme osm proměnných, kterými lze vyjádřit všechny kombinace druhů výrobků a linek. Tedy x_{ij} je počet výrobků j -tého druhu vyráběných na i -té lince ($j = 1, 2, 3, 4; i = 1, 2$).

Vlastní omezení zaručující splnění požadavků plánu jsou:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &\geq 800 \\ x_{12} + x_{22} &\geq 1800 \\ x_{13} + x_{23} &\geq 1200 \\ x_{14} + x_{24} &\geq 1000 \end{aligned}$$

Omezení vyplývající z dané kapacity linek jsou:

$$\begin{aligned} 0.4x_{11} + 0.2x_{12} + 0.4x_{13} + 0.2x_{14} &\leq 3000 \\ 0.8x_{21} + 0.6x_{22} + 0.4x_{23} + 0.6x_{24} &\leq 3000 \end{aligned}$$

Účelová funkce bude vyjadřovat náklady na výrobu jednotlivých druhů výrobků. Nejdřív je však třeba vypočítat náklady na výrobu každého druhu výrobků na jednotlivých linkách. Tyto

koeficienty dostaneme vynásobením nákladů na 1 hod práce linky časem potřebným k výrobě 1 kusu výrobku na této lince - viz tabulka 2.12.

výrobek→ ↓ linka	1	2	3	4
A	120x0.4	120x0.2	120x0.4	120x0.2
B	90x0.8	90x0.6	90x0.4	90x0.6

Tab. 2.12. Náklady na výrobu určitého výrobku na jednotlivých linkách.

Náklady pro uskutečnění hledaného výrobního programu jsou dány následujícím výrazem:

$$Z = 48x_{11} + 24x_{12} + 48x_{13} + 24x_{14} + 72x_{21} + 54x_{22} + 36x_{23} + 54x_{24},$$

který má být minimalizován.

Připojením podmínek nezápornosti obdržíme výsledný matematický model úlohy:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4.$$

2.4.4.3. Přiřazovací problém

Úloha spočívá v optimálním přiřazení (s minimálními náklady, ztrátami apod.) n jednotek objektů (prací, mechanismů, pracovníků apod.) k n jiným objektům (stavenišť, funkce, předměty apod.) tak, aby ke každému objektu první skupiny byl přiřazen právě jeden objekt druhé skupiny.

Nechť je zadána matice efektivnosti přiřazení $C = \{c_{ij}\}$, $(i, j = 1, 2, \dots, n)$, kde c_{ij} kvantitativně charakterizuje efektivnost např. vyplnění i -té práce j -tým pracovníkem. Přitom musí být splněny následující podmínky:

- každý pracovník může vykonávat pouze jednu práci,
- každá práce může být vykonána pouze jedním pracovníkem.

Matematická formulace.

Zavedeme celkem n^2 nezáporných proměnných x_{ij} , které se rovnají 1, jestliže i -tý pracovník vykonává j -tou práci, nebo 0, jestliže ji nevykonává.

Z matematického hlediska dostáváme následující celočíselnou úlohu lineárního programování:

Nalézt maximum (minimum) lineární funkce

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

za podmínek

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}. \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Příklad 8.

Ze tří garáží má být přistaveno po jednom nákladním automobilu třem zákazníkům. Jsou známy všechny vzdálenosti mezi garážemi a zákazníky - viz tabulka 2.13. Je třeba stanovit, z které garáže pojedete nákladní auto ke kterému zákazníkovi tak, aby celkový počet ujetých kilometrů byl minimální.

zákazníci→ ↓garáže	1	2	3
1	5	4	3
2	6	8	9
3	4	5	5

Tab. 2.13. Vzdálenosti mezi garážemi a zákazníky

Řešení.

Máme nalézt minimum lineární funkce

$$z = 5x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 6x_{21} + 8x_{22} + 9x_{23} + 4x_{31} + 5x_{32} + 5x_{33}$$

za podmínek

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$

a

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

2.5. DUALITA

2.5.1. Duální problém

Každému matematickému modelu problému lineárního programování lze jednoznačně přiřadit tzv. duální neboli sdružený matematický model. Duální matematický model má svou ekonomickou interpretaci - duální ekonomický model. Společně označujeme duální matematický model a duální ekonomický model jako duální nebo sdružený problém.

Dualitou nazýváme přiřazení duálního matematického modelu k tzv. primárnímu (přímému) matematickému modelu. V širším slova smyslu pak dualitou rozumíme i vztah mezi duálním a primárním ekonomickým modelem i vztah duálního a primárního problému lineárního programování.

Dualita je vztah reflexivní, tzn., že je-li matematický model $\mathbf{M}$ duálně přiřazen k matematickému modelu $\mathbf{M}'$, pak i $\mathbf{M}'$ je duálně přiřazen k $\mathbf{M}$. Zkoumání vzájemně sdružených modelů a problémů přináší cenné poznatky jak pro techniku řešení, tak i pro ekonomické závěry.

2.5.2. Primární a duální model

Nesouměrná dualita.

Primárním modelem $\mathbf{M}$ nazveme tento matematický model:

Hledáme vektor

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n], \quad (2.5.1)$$

vyhovující podmínkám

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \quad (m < n) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \\ x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

a maximalizující účelovou funkci

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n. \quad (2.5.4)$$

Duálním modelem $\mathbf{M}'$ pak nazveme tento matematický model:

Hledáme vektor

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_m], \quad (2.5.5)$$

vyhovující podmínkám

$$\begin{aligned}
a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{m1}u_m &\geq c_1 \\
a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{m2}u_m &\geq c_2 \\
&\vdots \\
a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{mn}u_m &\geq c_n
\end{aligned}
\tag{2.5.6}$$

a minimalizující účelovou funkci

$$f = b_1u_1 + b_2u_2 + \dots + b_mu_m . \tag{2.5.7}$$

Vzájemné přiřazení $\mathbf{M}$ a $\mathbf{M}'$ nazýváme nesymetrickou dualitou.

Souměrná dualita.

Primárním modelem nazveme matematický model:

Hledáme vektor

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n], \tag{2.5.8}$$

vyhovující podmínkám

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \quad (m < n) \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2.5.9}$$

$$\begin{aligned}
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\
x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)
\end{aligned}
\tag{2.5.10}$$

a maximalizující účelovou funkci

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n . \tag{2.5.11}$$

Duálním modelem pak nazveme matematický model:

Hledáme vektor

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_m], \tag{2.5.12}$$

vyhovující podmínkám

$$\begin{aligned}
a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{m1}u_m &\geq c_1 \\
a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{m2}u_m &\geq c_2 \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2.5.13}$$

$$\begin{aligned}
a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{mn}u_m &\geq c_n \\
u_i &\geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)
\end{aligned}
\tag{2.5.14}$$

a minimalizující účelovou funkci

$$f = b_1u_1 + b_2u_2 + \dots + b_mu_m . \tag{2.5.15}$$

Poznámka. Jestliže v nesouměrné dualitě je účelová funkce primárního modelu typu minimalizačního, pak odpovídající duální model má vlastní omezení ve formě nerovností typu $\leq$ a účelovou funkci maximalizačního typu.

Při formulaci duálního problému se postupuje tak že se nejprve upraví primární problém do tvaru jednoho z modelů souměrné duality nebo jednoho z možných tvarů primárního modelu nesouměrné duality (vlastní omezení ve tvaru rovnic s maximalizační nebo minimalizační účelovou funkcí). Duálních proměnných bude tolik, kolik je vlastních omezení primárního modelu. Sloupec koeficientů u proměnné x_1 v soustavě (2.5.2) nebo (2.5.9) s odpovídajícími duálními proměnnými vytvoří první nerovnost duálního modelu. Počet proměnných primárního modelu tedy určuje počet vlastních omezení duálního modelu. Konstanty pravých stran v omezeních primárního modelu se stávají koeficienty duální účelové funkce a koeficienty primární účelové funkce se stanou konstantami pravých stran omezení duálního modelu. Řešením primárního problému je vektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ rozměru n , řešením duálního problému je vektor $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_m]$ rozměru m .

Primární a duální problém spolu úzce souvisí. O jejich vztahu platí následující poučky a tvrzení.

Základní věta o dualitě. Má-li jeden ze sdružených matematických modelů optimální řešení s konečnou hodnotou účelové funkce, má i druhý model optimální řešení s konečnou hodnotou účelové funkce a hodnoty účelových funkcí obou modelů jsou stejné. Jestliže hodnota účelové funkce jednoho ze sdružených modelů není konečná, pak druhý model nemá vůbec přípustné řešení.

Tvrzení. Známe-li základní optimální řešení primárního modelu, lze sdružené řešení stanovit řešením soustavy m rovnic o m neznámých $u_1, u_2, \dots, u_m$, kterou dostaneme tak, že vybereme z n omezení duálního modelu jen ty nerovnosti, které odpovídají základním proměnným v optimálním řešení primárního modelu.

Uvedený postup lze zobecnit v tom smyslu, že ke každému základnímu přípustnému řešení $\mathbf{x}$ primárního modelu lze nalézt sdružené řešení $\mathbf{u}$. Takto zavedený pojem sdruženého řešení umožňuje formulovat důležitou větu, z které vycházejí hlavní výpočetní metody lineárního programování.

Věta. Stanovíme-li k základnímu přípustnému řešení $\mathbf{x}$ primárního modelu sdružené řešení $\mathbf{u}$, které je též přípustným řešením duálního modelu, pak základní přípustné řešení $\mathbf{x}$ je optimálním řešením.

Z předcházející věty okamžitě plyne, že také $\mathbf{u}$ je optimálním řešením duálního modelu, což lze zformulovat do následující věty:

Věta. Jsou-li základní řešení $\mathbf{x}$ a k němu sdružené řešení $\mathbf{u}$ obě přípustnými řešeními, pak jsou také optimálními řešeními primárního a duálního modelu.

Na této větě je založen test optimality základního přípustného řešení výpočetních metod pro řešení matematických modelů lineárního programování.

2.5.3. Ekonomická interpretace

Také sdružené ekonomické modely spolu navzájem úzce souvisí; zobrazují určitý jev ekonomické reality ze dvou různých hledisek. Ekonomická interpretace řešení duálního modelu přináší neméně cenné poznatky o zkoumané realitě než primární řešení.

Obecný princip je zcela jednoduchý a vychází ze základní věty o dualitě. Pro optimální řešení navzájem sdružených modelů

$$\mathbf{x}^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0], \quad \mathbf{u}^0 = [u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0]$$

platí:

$$\text{maximální } z = c_1 x_1^0 + \dots + c_n x_n^0 = b_1 u_1^0 + \dots + b_m u_m^0 = \text{minimální } f \text{ (2.5.16)}$$

Položme si otázku: Jak se změní optimální hodnota z (primární účelové funkce) při změně b_i o jednotku? Označíme-li $z(b_i)$ maximální hodnotu z v (2.5.16) a $z(b_i + 1)$ maximální hodnotu z při změně b_i o jednotku, pak

$$z(b_i + 1) = b_1 u_1^0 + \dots + (b_i + 1) u_i^0 + \dots + b_m u_m^0$$

a

$$\Delta z(b_i) = z(b_i + 1) - z(b_i) = u_i^0.$$

Tedy při změně b_i o jednotku vzroste maximální hodnota z právě o u_i^0 , což lze zformulovat do následujícího tvrzení.

Známe-li optimální řešení obou navzájem sdružených modelů $\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0$, pak duální hodnoty u_i^0 udávají přírůstek optimální hodnoty primární účelové funkce Δz při jednotkovém přírůstku pravých stran vlastních omezení Δb_i .

Řešení duálního modelu tedy poskytuje ocenění vlastních omezení primárního modelu vzhledem k primární účelové funkci. Označují se jako *stínové ceny zdrojů* nebo *požadavků*. Ekonomický význam duálních proměnných lze rovněž odhadnout podle jejich dimenze - fyzikálního rozměru.

Poznámka. Uvedené závěry o ocenění zdrojů nebo požadavků platí pouze pro optimální řešení a jen pro jejich malé změny. Při větších změnách se mohou vyměnit základní proměnné v optimálním řešení a pak se mění i ocenění činitelů.

Příklad 10.

Čokoládovna vyrábí pět druhů výrobků. Spotřebovává tři základní suroviny - tuk, kakao a cukr, které jsou k dispozici v omezených množstvích 1500 kg, 300 kg a 450 kg na den. Kapacity strojového zařízení, energie, pracovní síly, i dalších zdrojů jsou k dispozici v dostatečném množství. Spotřeba surovin na výrobky je uvedena v tab. 2.14. Odbytové ceny pro výrobky V_1 až V_5 jsou postupně 20, 120, 100, 140 a 40 Kč. Stanovte takový denní výrobní program, aby hodnota výroby vyjádřená v Kč byla maximální.

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
tuk	-	0.4	0.3	0.6	0.6
kakao	0.05	0.2	0.1	0.1	-
cukr	0.1	0.2	0.2	0.1	0.2

Tab. 2.14. Spotřeba surovin na jednotlivé výrobky

Řešení.

Primární matematický model úlohy,
hledáme nezáporný vektor

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$$

vyhovující omezením

$$\begin{aligned} 0.4x_2 + 0.3x_3 + 0.6x_4 + 0.6x_5 &\leq 150\text{€} \\ 0.05x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 0.1x_4 &\leq 30\text{€} \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 + 0.1x_4 + 0.2x_5 &\leq 45\text{€} \end{aligned}$$

a maximalizující účelovou funkci

$$z = 20x_1 + 120x_2 + 100x_3 + 140x_4 + 40x_5,$$

má řešení

$$\mathbf{x}^0 = [0, 0, 1000, 2000, 0, 0, 50], \quad z = 380000 \text{ Kč.}$$

Interpretace řešení je následující: Vyrábět pouze výrobky V_3 a V_4 v množství 1000 kg a 2000 kg, ostatní výrobky nevyrábět, suroviny tuk a kakao budou spotřebovány beze zbytku, nebude spotřebováno 50 kg cukru (viz následující kapitola). Maximální hodnota výroby bude 380000 Kč.

Duální matematický model,

hledáme vektor

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$$

vyhovující podmínkám

$$\begin{aligned} 0.05u_2 + 0.1u_3 &\geq 20 \\ 0.4u_1 + 0.2u_2 + 0.2u_3 &\geq 120 \\ 0.3u_1 + 0.1u_2 + 0.2u_3 &\geq 100 \\ 0.6u_1 + 0.1u_2 + 0.1u_3 &\geq 140 \\ 0.6u_1 + 0.2u_3 &\geq 40 \\ u_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

a minimalizující účelovou funkci

$$f = 1500u_1 + 300u_2 + 450u_3,$$

má řešení

$$\mathbf{u} = [133.3, 600, 0].$$

Z poučky o ocenění vlastních omezení primárního modelu (stínové ceny zdrojů) tedy plyne:

- bude-li mít závod o 1 kg první suroviny (tuku) více, může při optimálním programu výroby zvýšit hodnotu produkce o 133.3 Kč, obdobně pro druhou surovinu,
- nulové ocenění třetí suroviny (cukru) naznačuje, že této suroviny není plně využito v tom množství, v kterém je k dispozici při optimálním programu a že dodatečné množství cukru navíc by nepřineslo zvýšení hodnoty produkce.

2.6. SIMPLEXOVÁ METODA

Simplexová metoda je univerzální metodou řešení úloh lineárního programování. Je to metoda iterační, vychází z libovolného známého základního řešení a umožňuje v konečném počtu kroků buď nalézt optimální řešení nebo zjistit, že optimální řešení neexistuje. V každém kroku simplexové metody se jedna základní proměnná nahradí jednou nezákladní proměnnou tak, aby hodnota účelové funkce pro nové základní řešení byla větší než hodnota účelové funkce základního řešení v předchozím kroku. Jednoznačný výběr obou proměnných, vzrůst hodnoty účelové funkce v každém kroku a tím i konečnost postupu, jsou zaručeny v nede degenerovaných úlohách lineárního programování.

2.6.1. Kanonický tvar matematického modelu

Simplexovou metodou lze řešit matematické modely lineárního programování upravené do kanonického tvaru, který lze formulovat následujícím způsobem:

Hledáme vektor

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n], \quad (2.6.1)$$

vyhovující vlastním omezením ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,n-m}x_{n-m} + x_{n-m+1} &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2,n-m}x_{n-m} + x_{n-m+2} &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{m,n-m}x_{n-m} + x_n &= b_m \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

a dále podmínkám nezápornosti

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.6.3)$$

a maximalizující (minimalizující) funkci

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n. \quad (2.6.4)$$

Přitom $m < n$, $b_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), alespoň jedno $c_j \neq 0$ a účelová funkce neobsahuje proměnné $x_{n-m+1}, \dots, x_n$, t.j. ty proměnné, jejichž koeficienty v soustavě (2.6.2) tvoří jednotkovou matici (tj. $c_{n-m+1} = c_{n-m+2} = \dots = c_n = 0$).

Pro řešení modelu se účelová funkce (2.6.4) přiřadí k soustavě rovnic (2.6.2), přitom z se stane jednou z proměnných modelu a její koeficient rozšíří původní jednotkovou submatici. Dostaneme tedy následující matematický model:

Hledáme vektor

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n, z],$$

vyhovující soustavě

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,n-m}x_{n-m} + x_{n-m+1} &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2,n-m}x_{n-m} + x_{n-m+2} &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{m,n-m}x_{n-m} + x_n &= b_m \\ -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_{n-m}x_{n-m} + z &= 0 \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.6.3)$$

přitom z má dosáhnout maximální (minimální) hodnoty.

Pro následující výklad je užitečné vyjádřit soustavu (2.6.2) a (2.6.5) ve vektorovém a maticovém tvaru.

Vektorový zápis soustavy (2.6.2):

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1,n-m} \\ a_{2,n-m} \\ \vdots \\ a_{m,n-m} \end{bmatrix} x_{n-m} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} x_{n-m+1} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (2.6.6)$$

vektorový zápis soustavy (2.6.5):

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ -c_1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ -c_2 \end{bmatrix} x_2 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1,n-m} \\ a_{2,n-m} \\ \vdots \\ a_{m,n-m} \\ -c_{n-m} \end{bmatrix} x_{n-m} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_{n-m+1} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_n + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.6.7)$$

a maticový zápis soustavy (2.6.7):

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{c} & \mathbf{0} & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.6.8)$$

kde $\mathbf{A}$ je matice soustavy (2.6.2) bez jednotkové submatice, $\mathbf{I}$ je jednotková matice typu $(m \times m)$, $\mathbf{c}$ je řádkový vektor koeficientů v účelové funkci (2.6.4), $\mathbf{x}$ je sloupcový vektor proměnných soustavy (2.6.2) a $\mathbf{b}$ je vektor pravých stran soustavy (2.6.2).

2.6.2. Postup výpočtu

Matematický model zformulovaný na základě ekonomického modelu nebývá obvykle v kanonickém tvaru. Obecně jsou vlastní omezení tvořena soustavou nerovností obojího typu a rovnic. Především je nutné *převést model do kanonického tvaru*. V nejjednodušším případě, kdy vlastní omezení tvoří pouze nerovnosti typu $\leq$, provedeme pouze "vyrovnání" nerovností na rovnice.

Jakmile je matematický model v kanonickém tvaru, lze *nalézt výchozí základní řešení* známým způsobem (dosazení nul za nezákladní proměnné, základní proměnné jsou rovny pravým stranám). Další postup spočívá v *testu optimality* tohoto řešení, který je založen na vlastnostech sdruženého řešení. Test optimality dá odpověď na otázky, zda výchozí základní řešení je optimálním řešením, v případě, že není optimální, jak nalézt další základní řešení takové, aby se hodnota účelové funkce co nejvíce zvýšila (snížila), resp. přesněji, která dvojice základní a nezákladní proměnné si v novém základním řešení vymění svá místa.

V případě, že řešení není dosud optimální, hledá se nové základní řešení. *Soustava rovnic se transformuje* tak, že jedna z dosud nezákladních proměnných se stane základní v novém

řešení. Je to proměnná, kterou vybral test optimality, a označuje se jako *vstupující proměnná*. Tato proměnná nahradí jednu z původně základních proměnných, která se označuje jako *vystupující proměnná*, aby nové základní řešení bylo opět přípustné.

Postup se pak vrací k testu optimality, který opět zjistí, zda-li nové základní řešení je již optimální. V kladném případě výpočet končí, v opačném případě se pokračuje hledáním dalšího základního řešení uvedeným postupem.

V následujícím textu bude vyloženo postup při řešení matematického modelu, jehož omezení tvoří soustavu nerovností typu $\leq$. Postup bude ilustrován na příkladu 10 uvedeném v kapitole 2.5.3.

2.6.3. Úprava soustavy omezení na rovnice. Přídavné proměnné

Nerovnost typu $\leq$ převedeme na rovnici tak, že k levé straně nerovnosti přičteme nezápornou proměnnou, označovanou jako tzv. *přídavná proměnná*. Přídavná proměnná vyjadřuje rozdíl mezi pravou a levou stranou nerovnosti. Do účelové funkce se přídavné proměnné nepřidávají, mají nulové koeficienty, resp. nulové ceny.

Ekonomická interpretace smyslu přídavných proměnných. Přídavné proměnné vyjadřují rozdíl mezi pravou a levou stranou nerovnosti. Levá strana nerovnosti (typu $\leq$) představuje spotřebu určitého zdroje, pravá strana jeho disponibilní množství. Rozdíl pravé a levé strany tedy vyjadřuje nevyužitou kapacitu zdroje (např. nespotřebovanou surovinu).

Touto ekonomickou interpretací se vysvětluje také nulové ocenění přídavných proměnných v účelové funkci. Koeficienty proměnných v účelové funkci obecně představují přínos jednotkové hodnoty proměnné k hodnotě účelové funkce. Avšak nevyužitý zdroj nemůže přispět k vyšší hodnotě účelové funkce.

Příklad 10 - kanonický tvar modelu.

Matematický model problému:

Hledáme nezáporný vektor

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5], \quad (2.6.9)$$

vyhovující podmínkám

$$\begin{aligned} 0.4x_2 + 0.3x_3 + 0.6x_4 + 0.6x_5 &\leq 1500 \\ 0.05x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 0.1x_4 &\leq 300 \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 + 0.1x_4 + 0.2x_5 &\leq 450 \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

a maximalizující funkci

$$z = 20x_1 + 120x_2 + 100x_3 + 140x_4 + 40x_5, \quad (2.6.11)$$

upravíme do kanonického tvaru následujícím způsobem.

K levé straně každé nerovnosti přičteme postupně nezáporné přídavné proměnné x_6, x_7, x_8 , o které je nutno rozšířit vektor (2.6.9). Výraz pro účelovou funkci (2.6.11) připojíme k soustavě rovnic, přičemž z budeme považovat za další proměnnou a členy na pravé straně rovnice převedeme na levou. Dostaneme model:

Hledáme vektor

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, z], \quad (2.6.12)$$

vyhovující

$$\begin{aligned}
 0.4x_2 + 0.3x_3 + 0.6x_4 + 0.6x_5 + x_6 &= 1500 \\
 0.05x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 0.1x_4 + x_7 &= 300 \\
 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 + 0.1x_4 + 0.2x_5 + x_8 &= 450 \\
 -20x_1 - 120x_2 - 100x_3 - 140x_4 - 40x_5 + z &= 0
 \end{aligned} \tag{2.6.13}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 8, \tag{2.6.14}$$

takový, aby z dosáhlo maximální hodnoty.

2.6.4. Výchozí základní řešení. Simplexová tabulka

Výchozí základní řešení se nalezne standardním postupem. Základními proměnnými budou ty proměnné, jejichž koeficienty tvoří v soustavě (2.6.5) jednotkovou submatici matice soustavy. Soustava má $m+1$ lineárně nezávislých rovnic, jednotková submatice je typu $(m+1) \times (m+1)$ a poslední jednotkový vektor je tvořen sloupcem koeficientů proměnné z . Proměnná z je tedy základní a zůstává jí po všechnch kroky výpočtu.

Simplexová tabulka je formou zápisu soustavy rovnic. Proměnné se zapíší do záhlaví tabulky a do tabulky se zapisují pouze koeficienty. Na levé straně tabulky se uvádí seznam základních proměnných, každá vždy v řádku, kde je její jednotkový koeficient. Poslední sloupec soustavy (2.6.5), t.j. jednotkový vektor u proměnné z , se nevypisuje.

Příklad 10 - výchozí základní řešení, simplexová tabulka.

Soustavu (2.6.13) přepíšeme do tvaru simplexové tabulky - tab. 2.15. Základní proměnné jsou x_6, x_7, x_8, z , nezákladní proměnné jsou x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 - za ně dosadíme v řešení nuly. Dostaneme výchozí základní řešení

$$\mathbf{x}^1 = [0, 0, 0, 0, 0, 1500, 300, 450, z = 0]. \tag{2.6.15}$$

Řešení se běžně čte přímo z tab. 2.15. Základní proměnné jsou rovny hodnotám v odpovídajícím řádku sloupce pravých stran, nezákladní jsou rovny nule.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_6		0.4	0.3	0.6	0.6	1			1500
x_7	0.05	0.2	0.1	0.1			1		300
x_8	0.1	0.2	0.2	0.1	0.2			1	450
z	-20	-120	-100	-140	-40				0

Tab. 2.15. Simplexová tabulka příkladu 10.

Ekonomická interpretace výchozího základního řešení. Žádný výrobek se nevyrábí, hodnota produkce je nulová, zůstává nespoteřováno veškeré disponibilní množství surovin. Výchozí základní řešení neříká nic nového, slouží pouze jako výchozí bod pro další výpočet.

Ve vektorové interpretaci simplexového postupu představují koeficienty v tab. 2.15 souřadnice čtyřsložkových sloupcových vektorů $\mathbf{a}_j$ matice soustavy (2.6.13) a vektoru pravých stran $\mathbf{b}$ v jednotkové bázi $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ čtyřrozměrného prostoru. Souřadnice vektoru v jednotkové bázi jsou rovny jejich složkám, a proto tato vektorová interpretace výchozího kroku simplexové tabulky nepřináší mnoho užitku. Jiná situace však bude v dalších krocích, kdy se vektory v bázi vymění a vztahu mezi vektorem, jeho souřadnicemi v určité bázi a bazickými vektory se bude úspěšně využívat (např. ke kontrole nebo ekonomické interpretaci testu optimality). Platí totiž následující vztahy:

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^4 \alpha_{ij} \mathbf{e}_i, \quad (j = 1, 2, \dots, 8) \quad (2.6.16)$$

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^4 \beta_i \mathbf{e}_i, \quad (2.6.17)$$

kde $\mathbf{e}_i$ jsou vektory báze, α_{ij} jsou koeficienty ve vnitřní části simplexové tabulky (i -tý řádek, j -tý sloupec) a β_i jsou koeficienty v posledním sloupci. Speciálně $\mathbf{a}_6 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{a}_7 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{a}_8 = \mathbf{e}_3$.

2.6.5. Test optimality

Výchozí i každý další krok simplexové tabulky obsahuje soustavu lineárních rovnic a účelovou funkci matematického modelu v kanonickém tvaru. Každému kroku simplexové tabulky odpovídá určité základní přípustné řešení. O tom, zda-li je toto řešení také řešením optimálním či nikoliv, rozhodují znaménka koeficientů v řádku účelové funkce, označené vlevo symbolem z . Označme tyto koeficienty $z_j, j = 1, 2, \dots, n$ (ve výchozím kroku $z_j = -c_j$). Platí

a) při maximalizaci:

jsou-li $z_j \geq 0$ pro všechna $j = 1, 2, \dots, n$, pak základní řešení je maximální,

je-li $z_j < 0$ alespoň pro jedno $j = 1, 2, \dots, n$, pak základní řešení není maximální,

b) při minimalizaci:

jsou-li $z_j \leq 0$ pro všechna $j = 1, 2, \dots, n$, pak základní řešení je minimální,

je-li $z_j > 0$ alespoň pro jedno $j = 1, 2, \dots, n$, pak základní řešení není minimální.

Teoretické zdůvodnění testu optimality je založeno na vlastnostech duálního modelu a sdruženého řešení. Lze dokázat, že vektor koeficientů z_j vyjadřuje rozdíl levé a pravé strany nerovností (2.5.6). Jsou-li všechna z_j nezáporná, znamená to, že vektor $\mathbf{u}$, řešení sdružené se zkoumaným základním řešením $\mathbf{x}$, je přípustným řešením duálního modelu. To však znamená, že řešení $\mathbf{x}$ i $\mathbf{u}$ jsou optimální.

Příklad 10 - test optimality.

V řádku účelové funkce jsou nulové koeficienty $z_6 = z_7 = z_8 = 0$ a záporné koeficienty $z_1, \dots, z_5 < 0$. Jedná se o maximalizační úlohu a odpovídající základní řešení tedy není optimální.

Jednoduše lze test optimality interpretovat takto. Nezákladní proměnné x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 jsou rovny nule, základní proměnné x_6, x_7, x_8 jsou sice kladná čísla, mají však nulové koeficienty v účelové funkci, tedy $z = 0$. Lze zvýšit hodnotu účelové funkce výběrem jiného

základního řešení? Vzroste-li některá z nezákladních proměnných o jednotku, zvýší se účelová funkce o odpovídající koeficient proměnné (dle vlastností duálně sdružených úloh a jejich řešení), tedy ano. Závěr úvahy je ten, že výchozí základní řešení není optimální.

Navíc test optimality naznačuje, které nové základní řešení vybrat, aby přírůstek účelové funkce byl co největší. Pro nové základní řešení vybereme tu nezákladní proměnnou, která má záporný koeficient s maximální absolutní hodnotou. V našem příkladu je to proměnná x_4 .

2.6.6. Přejít na nové základní řešení. Iterační postup

Přejít na nové základní řešení se provádí stejně jako v úplné eliminační metodě vhodnou transformací soustavy. Jedna ze základních proměnných je nahrazena jinou, původně nezákladní proměnnou. Zatímco v eliminační metodě se tato záměna prováděla libovolně, v simplexové metodě se řídíme hlediskem co největšího přírůstku účelové funkce a nezápornosti nového řešení. Postup lze shrnout do následujících pravidel:

1) Jedna z nezákladních proměnných výchozího řešení se v novém řešení má stát základní (*vstupující proměnná*). Při maximalizační úloze se vybírá z těch proměnných, jejichž koeficient v účelové funkci je záporný. Volíme z nich proměnnou s absolutní hodnotou $|z_j|$ největší. Sloupec koeficientů této proměnné v uvažovaném kroku simplexové tabulky se označuje jako *klíčový sloupec*.

2) Jedna ze základních proměnných výchozího řešení se v novém řešení stane nezákladní (*vystupující proměnná*). Určí se následovně:

Novou základní proměnnou, zvolenou dle pravidla 1), označme x_k , koeficienty klíčového sloupce, s výjimkou koeficientu v řádce účelové funkce, označme α_{ik} ($i = 1, 2, \dots, m$), koeficienty v sloupci pravých stran výchozího kroku označme β_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Nejmenší podíl $\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$ pro řádky, kde $\alpha_{ik} > 0$ určuje tzv. *klíčový řádek* a základní proměnná v tomto řádku (s koeficientem 1) se stává v novém řešení nezákladní proměnnou.

Jestliže ve sloupcích všech nezákladních proměnných přicházejících v úvahu podle pravidla 1) není ani jeden koeficient $\alpha_{ik} > 0$, pak neexistuje základní přípustné řešení s hodnotou účelové funkce vyšší než ve výchozím základním řešení a matematický model vůbec nemá konečné optimální řešení.

Pokud je zvolena podle uvedených pravidel nová základní a nová nezákladní proměnná, přechází se metodou úplné eliminace na nové základní řešení. Nové základní řešení nahradí výchozí základní řešení a je opět podrobena testu optimality. Výpočet pokračuje opakováním těchto iterací tak dlouho, dokud buď není nalezeno optimální řešení, nebo se ukáže, že konečné optimální řešení neexistuje.

Příklad 10 - přechod na nové základní řešení, iterace.

V tab. 2.15. zvolíme dle pravidla 1) mezi nezákladními proměnnými x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 (pro všechny je $z_j < 0$) proměnnou x_4 jako vstupující, neboť $z_4 = -140$ je v absolutní hodnotě nejvyšší. Podle pravidla 2) vypočteme podíly

$$\frac{\beta_1}{\alpha_{14}} = \frac{1500}{0.6} = 2500, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_{24}} = \frac{300}{0.1} = 3000, \quad \frac{\beta_3}{\alpha_{34}} = \frac{450}{0.1} = 4500.$$

Nejmenší podíl je pro $i = 1$. První řádek obsahuje základní proměnnou x_6 . Při přechodu od výchozího základního řešení na nové základní řešení se proměnná x_4 stane základní a x_6 nezákladní proměnnou. Přejdeme tedy ke třetímu kroku simplexové tabulky. Přejdeme tedy ke třetímu kroku simplexové tabulky na další základní řešení. Vstupující proměnnou x_3 nahrazuje vystupující proměnnou x_7 , která se stává nezákladní.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
$\rightarrow x_4$		0.6	0.5	1	0.6	1.6			2500
x_7	0.05	0.13	0.05		-0.1	-0.16	1		50
x_8	0.1	0.13	0.15		0.1	-0.16		1	200
z	-20	-26.6	-30		100	233.3			350000

Tab. 2.16. Simplexová tabulka příkladu 10 - druhý krok.

Druhý krok simplexové tabulky.

Šipka $\rightarrow$ označuje řádek, v kterém má vstupující proměnná koeficient 1. Nové základní řešení vyplývající z druhého kroku tedy je

$$\mathbf{x}^2 = [0, 0, 0, 2500, 0, 0, 50, 200, 350000]. \quad (2.6.18)$$

Ekonomická interpretace: Vyrábí se 2500 kg čtvrtého výrobku, plně je spotřebována první surovina, nevyužito zůstává 50 kg druhé a 300 kg třetí suroviny, hodnota produkce je 350000 Kč.

Test optimality ukazuje, že řešení ještě není optimální. Přejdeme tedy ke třetímu kroku simplexové tabulky na další základní řešení. Vstupující proměnnou x_3 nahrazuje vystupující proměnnou x_7 , která se stává nezákladní.

Třetí krok simplexové tabulky.

Ve třetím kroku, který zobrazuje tab. 2.17, dostáváme řešení

$$\mathbf{x}^3 = [0, 0, 1000, 2000, 0, 0, 0, 50, 380000], \quad (2.6.19)$$

které je již optimální, neboť všechna $z_j \geq 0$. V ekonomické interpretaci dává toto řešení optimální výrobní program: vyrábět pouze dva výrobky - 1000 kg třetího a 2000 kg čtvrtého výrobku, plně se přitom spotřebují dvě suroviny - první a druhá surovina, nevyužito zůstává 50 kg třetí suroviny, hodnota produkce je 380000 Kč.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_4	-0.5	-0.6		1	2	3.3	-10		2000
$\rightarrow x_3$	1	2.6	1		-2	-3.3	20		1000
x_8	-0.05	-0.36			0.4	0.3	-3	1	50
z	10	53.3			40	133.3	600		380000

Tab. 2.17. Simplexová tabulka příkladu 10 - třetí krok.

2.6.7. Interpretace testu optimality. Stínové ceny. Řešení duálního modelu

Libovolný vektor soustavy (2.6.5) lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze (po přečíslování vektorů), analogicky se vztahem (2.6.16)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_j \\ -c_j \end{bmatrix} = \alpha_{1j} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ -c_1 \end{bmatrix} + \dots + \alpha_{mj} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ -c_m \end{bmatrix} + z_j \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.6.20)$$

kde $\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{mj}, z_j$ jsou koeficienty v j -tém sloupci libovolného kroku simplexové tabulky. Koeficienty vystupují v součinu s vektory, které tvoří bázi v tomto kroku; jsou to vektory, které odpovídají základním proměnným v tomto kroku.

Vektory soustavy (2.6.5) charakterizují procesy, neboli činnosti ekonomického modelu. *Základními procesy* označme ty procesy, které odpovídají bazickým vektorům v určitém kroku simplexové tabulky. Koeficient c_j představuje cenu j -tého procesu. Definujme pojem kombinace základních procesů ekvivalentní j -tému procesu a pojem cena ekvivalentní kombinace procesů.

Ze vztahu (2.6.20) lze vyjádřit vektor $\mathbf{a}_j$ jako lineární kombinaci bazických vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$:

$$\mathbf{a}_j = \alpha_{1j} \mathbf{a}_1 + \alpha_{2j} \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_{mj} \mathbf{a}_m. \quad (2.6.21)$$

Kombinaci základních procesů, charakterizovaných bazickými proměnnými, ekvivalentní j -tému procesu, charakterizovanému vektorem $\mathbf{a}_j$, nazveme jejich ekvivalentní kombinací (pravá strana vztahu (2.6.21)). Ekonomicky lze tuto ekvivalenci interpretovat tak, že kombinace na pravé straně rovnice (2.6.21) je stejně náročná na výrobní zdroje a stejně výhodná vzhledem k požadavkům jako j -tý proces realizovaný na jednotkové úrovni.

Cenou ekvivalentní kombinace základních procesů - pravá strana rovnice (2.6.21) - pak rozumíme číslo

$$c'_j = \alpha_{1j} c_1 + \alpha_{2j} c_2 + \dots + \alpha_{mj} c_m, \quad (2.6.22)$$

kde α_{ik} jsou koeficienty kombinace (2.6.21) a c_i jsou ceny procesů, které se vyskytují na pravé straně rovnice (2.6.21). Vzhledem k tomu, že c_j představují přínos jednotkové úrovně j -tého procesu k hodnotě účelové funkce, pak c'_j představuje přínos kombinace základních procesů ekvivalentní j -tému procesu z hlediska zdrojů a požadavků modelu. Ze vztahů (2.6.20) a (2.6.22) plyne, že

$$z_j = c'_j - c_j. \quad (2.6.23)$$

Koeficienty z_j lze tedy v každém kroku simplexové tabulky interpretovat jako rozdíl mezi cenou kombinace základních procesů ekvivalentní j -tému procesu a zadanou cenou tohoto procesu.

Jestliže $z_j < 0$, pak $c'_j < c_j$, což znamená (při maximalizační úloze), že nezákladní j -tý proces je ve srovnatelné úrovni realizace výhodnější z hlediska účelové funkce než jemu ekvivalentní kombinace základních procesů. To ale znamená, že odpovídající krok simplexové tabulky neposkytuje optimální řešení. Jestliže naopak $z_j \geq 0$, pak $c'_j \geq c_j$, což znamená, že nezákladní j -tý proces není výhodnější než jemu ekvivalentní kombinace základních procesů. Platí-li tento vztah pro všechny nezákladní procesy, pak bylo nalezeno optimální řešení.

Příklad 10 - ekvivalentní kombinace procesů, stínové ceny, řešení duálního modelu.

Poslední krok simplexové tabulky (tab. 2.17) doplníme o ceny ekvivalentních procesů c'_j a rozdíly z_j . Např. $c'_1 = -0.5c_4 + c_3 - 0.05x_8 = 30$.

ceny základních procesů		20 x_1	120 x_2	100 x_3	140 x_4	40 x_5	0 x_6	0 x_7	0 x_8	
140	x_4	-0.5	-0.6		1	2	3.3	-10		2000
100	x_3	1	2.6	1		-2	-3.3	20		1000
0	x_8	-0.05	-0.36			0.4	0.3	-3	1	50
c'_j		30	173.3	100	140	80	133.3	600	0	380000
$z_j = c'_j - c_j$		10	53.3	0	0	40	133.3	600	0	

Tab. 2.18. Upravená simplexová tabulka příkladu 10.

Interpretujeme koeficienty z_j ve sloupcích přidatných proměnných. Především $z_j = c'_j$, neboť přidatné proměnné mají nulové ceny. Obecně lze říci, že z_j zde vyjadřuje přínos kombinace optimálních základních procesů, ekvivalentní jedné jednotce nevyužitého zdroje, tj. hodnotový přínos kombinace výroby nejvýhodnějších výrobků v množství, které lze vyrobit z jedné jednotky suroviny. Z tab. 2.18. lze např. odečíst, že 1 kg druhé suroviny je ekvivalentní výrobě 20 kg výrobku V_3 , snížení výroby výrobku V_4 o 10 kg a zvýšení spotřeby třetí suroviny o 3 kg. Za tuto kombinaci ekvivalentní 1 kg druhé suroviny lze získat 600 Kč na hodnotě produkce. Podobně pro první surovinu. Získá-li podnik 1 kg těchto surovin, umožní mu to zvýšit hodnotu produkce o příslušné částky. Získá-li však navíc 1 kg třetí suroviny, pak to hodnotu produkce neovlivní ($z_8 = 0$), což je pochopitelné, neboť třetí surovina se v optimálním výrobním programu plně nevyužívá (zbývá 50 kg). Jeden kg navíc by pouze zvýšil toto nevyužívané množství.

Tato interpretace se plně shoduje s ekonomickým významem duálních proměnných. Duální proměnné vyjadřují ocenění surovin; vzhledem k požadavku maximální hodnoty produkce jsou označovány jako *stínové ceny surovin*. Lze dokázat, že optimální hodnoty duálních proměnných jsou rovny koeficientům z_j přidatných proměnných primárního modelu v posledním kroku simplexové tabulky.

2.6.8. Pomocné proměnné. Rozšířený model. Dvofázová simplexová metoda

Dosud řešený matematický model byl nejjednoduššího typu, kdy soustava omezení obsahovala pouze nerovnosti typu $\leq$. Složitější případ nastává, jestliže ekonomický model vede přímo na rovnice nebo nerovnosti typu $\geq$. Přidatné proměnné, které vyrovnávají nerovnosti mají znaménko minus a tvoří jednotkovou submatici matice soustavy. V případě, že se vyskytne byť jediná rovnice nebo nerovnost typu $\geq$, je třeba vytvořit tzv. rozšířený model následujícím způsobem:

a) k původnímu modelu připojíme tzv. pomocné proměnné do těch rovnic, kde chybí základní proměnné pro výchozí základní řešení,

b) k původnímu modelu rozšířenému o pomocné proměnné připojíme další účelovou funkci Z' , minimalizující součet pomocných proměnných.

Takto vytvořený pomocný model má následující tři důležité vlastnosti:

- Matice soustavy rovnic modelu obsahuje jednotkovou submatici potřebného typu. V každé rovnici lze tedy určit základní proměnnou a nalézt tak výchozí základní řešení rozšířeného modelu.
- Z některých řešení rozšířeného modelu lze bezprostředně získat řešení původního modelu. Jsou to taková základní řešení, v nichž jsou všechny pomocné proměnné rovny nule. Potom hodnoty ostatních proměnných vyhovují původnímu modelu a mohou sloužit jako výchozí základní řešení tohoto modelu.
- Řešíme-li rozšířený model podle jeho účelové funkce $Z' \rightarrow \min$, pak musíme vždy po konečném počtu kroků dospět k takovému řešení rozšířeného modelu, v kterém jsou všechny pomocné proměnné rovny nule, pokud takové řešení vůbec existuje.

Rozšířený model obsahuje sice jednotkovou submatici, ale koeficienty základních proměnných v účelové funkci Z' nejsou všechny nulové. Je nutné je před výpočtem eliminovat vhodnou transformací soustavy; k účelové funkci Z' se přičtou řádky obsahující pomocné proměnné.

Příklad 11.

Chemický závod vyrábí čtyři výrobky, V_1, V_2, V_3, V_4 , které postupně procházejí třemi zařízeními, Z_1, Z_2, Z_3 . Kapacita prvních dvou zařízení je 400 hod., třetího 430 hod. Doba v hodinách, po kterou prochází 1 t výrobků zařízeními, je uvedena v tab. 2.19. Zařízení Z_2 a Z_3 musí být plně využito. Ceny výrobků jsou 200, 250, 250 a 300 Kč za 1 t. Úkolem je stanovit výrobní program, kterým závod dosáhne maximální hodnoty produkce.

Řešení.

Označme x_j vyrobené množství výrobku V_j v tunách, $j = 1, 2, 3, 4$. Nezáporný vektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ pak popisuje výrobní program.

Matematický model:

Hledáme nezáporný vektor

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4],$$

vyhovující podmínkám

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + 2x_4 &\leq 400 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 400 \\ 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 430 \end{aligned}$$

a maximalizující funkci

$$z = 200x_1 + 250x_2 + 250x_3 + 300x_4.$$

Úpravou dostane model, kde hledáme nezáporný vektor

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, z], \quad (2.6.24)$$

vyhovující

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & + & 2x_3 + & 2x_4 + x_5 & = 400 \\
 3x_1 + & 2x_2 + & x_3 & & = 400 \\
 & 2x_2 + & 2x_3 + & 3x_4 & = 430 \\
 -200x_1 - 250x_2 - 250x_3 - 300x_4 & + z & = & 0,
 \end{array} \tag{2.6.25}$$

kde z je maximální.

Tento model není v kanonickém tvaru. Ve druhé a třetí rovnici nejsou proměnné, které by mohly být základní ve výchozím řešení. Tyto rovnice rozšíříme o pomocné proměnné a utvoříme další účelovou funkci, která je součtem pomocných proměnných a kterou budeme minimalizovat. Připojíme-li ji k soustavě v anulovaném tvaru, opět by tato nebyla v kanonickém tvaru. Po eliminaci pomocných proměnných v účelové funkci Z' (přičtením rovnic obsahujících pomocné proměnné), dostáváme rozšířený model v kanonickém tvaru:

Nalézt nezáporný vektor

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, z], \tag{2.6.26}$$

vyhovující

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & + & 2x_3 + & 2x_4 + x_5 & = 400 \\
 3x_1 + & 2x_2 + & x_3 & & + x_6 = 400 \\
 & 2x_2 + & 2x_3 + & 3x_4 & + x_7 = 430 \\
 -200x_1 - 250x_2 - 250x_3 - 300x_4 & + z & = & 0 \\
 & - x_6 - x_7 & + z' & = & 0,
 \end{array}$$

kde Z' je minimální.

Pomocné proměnné, na rozdíl od přídatných proměnných, jsou pouze výpočetní pomůckou, nemají svůj ekonomický protějšek, nevyjadřují úroveň nějaké hospodářské činnosti nebo procesu. Tím postrádá ekonomickou interpretaci rovněž rozšířený model a jeho řešení. Teprve, až se podaří nalézt takové přípustné řešení rozšířeného modelu, kde $x_6 = x_7 = 0$, dostaneme po vynechání pomocných proměnných vektor přípustného řešení původního modelu.

Model je řešen v simplexové tabulce (tab. 2.19). V třetím kroku simplexové tabulky dostáváme optimální řešení rozšířeného modelu:

$$\mathbf{x}^3 = [0, 200, 0, 10, 380, 0, 0, 53000, 0].$$

Vynecháním nulových proměnných x_6, x_7, z' dostaneme vektor, který je přípustným řešením původního problému. V simplexové tabulce vynecháme sloupce pomocných proměnných a řádek účelové funkce Z' a přecházíme na maximalizaci funkce z . Ve čtvrtém kroku dostaneme optimální řešení původního problému:

$$\mathbf{x}^4 = [126.6, 10, 0, 136.6, 0, 68833.3].$$

Interpretace řešení. Optimální výrobní program je vyrábět 126.6 t výrobku V_1 , 10 t V_2 , 136.6 t V_4 . Hodnota produkce je 68833.3 Kč, výrobek V_3 se nevyrábí. Kapacity všech zařízení jsou plně využity.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i / α_{ik}
I.	x_5	1		2	2	1			400
	x_6	3	2	1			1		400
	x_7		2	2	3			1	430
	z	-200	-250	-250	-300				0
	z'	3	4	3	3				830
II.	x_5	1		2	2	1			400
	$\rightarrow x_2$	3/2	1	1/2			1/2		200
	x_7	3		1	3		-1	1	30
	z	175		-125	-300		125		50000
	z'	-3		1	3		-2		30
III.	x_5	3		4/3		1	2/3	-2/3	380
	x_2	3/2	1	1/2			1/2		200
	$\rightarrow x_4$	-1		1/3	1		-1/3	1/3	10
	z	-125		-25			25	100	53000
	z'						-1	-1	
IV.	$\rightarrow x_1$	1		4/9		1/3			380/3
	x_2		1	-1/6		-1/2			10
	x_4			7/9	1	1/3			410/3
	z			30.5		41.6			68833.3
	z'								

Tab. 2.19. Simplexová tabulka příkladu 11.

2.7 DISTRIBUČNÍ METODA

2.7.1 Model distribučního typu

Každý matematický model lineárního programování lze obecně řešit simplexovou metodou. Distribuční metoda řeší výhodně jistou skupinu matematických modelů - modely distribučního typu. Použití simplexové metody pro řešení těchto modelů je nevýhodné z hlediska časové náročnosti a velkého rozsahu výpočtů.

Distribuční metodou lze řešit matematické modely typu:

Hledáme matici

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}, \quad (2.7.1)$$

vyhovující vlastním omezením ve tvaru

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

kde

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (2.7.3)$$

podmínkám nezápornosti

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.7.4)$$

a minimalizující funkci

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (2.7.5)$$

Model (2.7.1 - 2.7.5) se označuje jako *model distribučního typu*. Počet proměnných v tomto modelu je $m \times n$ a počet rovnic v soustavě (2.7.2) je $(m + n)$, avšak vzhledem k podmínce (2.7.3) je pouze $(m + n - 1)$ lineárně nezávislých. Součet levých stran prvních m rovnic je roven součtu levých stran dalších n rovnic, součty pravých stran jsou si rovny dle vztahu (2.7.3).

Distribuční metoda je tedy vhodná pro řešení dopravního problému, přiřazovacího problému, zobecněného distribučního problému a příp. jiných úloh, které lze převést na modely distribučního typu. Stejně jako simplexová je i metoda distribuční metodou iterační. Postupuje v krocích přes jednotlivá základní řešení tak dlouho, dokud není nalezeno optimální řešení.

1. Je-li to nutné, upraví se matematický model tak, aby platila podmínka (2.7.3).
2. Nalezne se výchozí základní řešení. Je-li toto řešení degenerované, je nutné formálně degeneraci odstranit.
3. Provede se test optimality, který ukáže, zda-li lze nalézt jiné základní řešení s menší hodnotou účelové funkce. Pokud nelze takové řešení nalézt, výpočet končí, výchozí řešení je optimální. V opačném případě test optimality ukáže, jak lze nalézt toto nové "levnější" řešení.
4. Hledá se nové základní řešení podle výsledků testu optimality. Je-li toto nové řešení degenerované, degenerace se formálně odstraní. Na toto řešení pohlížíme jako na nové výchozí řešení, podrobíme je testu optimality, t.j. pokračujeme dále bodem 3. To se opakuje

tak dlouho, dokud test optimality neukáže, že naposledy nalezené základní řešení je optimální.

Prvky matice řešení x_{ij} , matice sazeb c_{ij} (koeficientů v účelové funkci) a matice nepřímých sazeb c'_{ij} (význam bude uveden později), prvky matice rozdílů Δ_{ij} (rozdíl nepřímé a přímé sazby), prvky vektoru kapacit dodavatelů a_i a požadavků zákazníků b_j , zapisujeme do následující tabulky.

zákazníci→ ↓ dodavatelé	Z_1	Z_2	...	Z_n	kapacity
D_1	Δ_{11} c_{11} x_{11} c'_{11}	Δ_{12} c_{12} x_{12} c'_{12}	...	Δ_{1n} c_{1n} x_{1n} c'_{1n}	a_1
D_2	Δ_{21} c_{21} x_{21} c'_{21}	Δ_{22} c_{22} x_{22} c'_{22}	...	Δ_{2n} c_{2n} x_{2n} c'_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
D_m	Δ_{m1} c_{m1} x_{m1} c'_{m1}	Δ_{m2} c_{m2} x_{m2} c'_{m2}	...	Δ_{mn} c_{mn} x_{mn} c'_{mn}	a_m
požadavky	b_1	b_2	...	b_n	$\Sigma b_j / \Sigma a_i$

Tab. 2.20 Tabulka pro řešení modelu distribučního typu

Prvních m rovnic soustavy (2.7.2) je reprezentováno řádky tabulky 2.20, dalších n rovnic je pak představováno sloupci této tabulky. K výpočtu distribuční metodou se užívá uvedené tabulky, pro každé základní řešení se sestavuje jedna.

2.7.2 Výchozí základní řešení

Základní přípustné řešení musí podle definice (str. 24) obsahovat nejvýše tolik nenulových složek, kolik má soustava (2.7.2) lineárně nezávislých rovnic, t.j. $(m + n - 1)$. Sloupce koeficientů u těchto nenulových proměnných v soustavě (2.7.2) musí tvořit skupinu lineárně nezávislých vektorů.

Do odpovídajících polí se vepisují pouze hodnoty nenulových proměnných, nulové hodnoty se nezapisují. Pole s uvedenou nenulovou proměnnou označujeme jako *obsazené pole*, pole bez uvedení proměnné označujeme jako volné nebo *neobsazené pole*. Hodnoty proměnných x_{ij} nazýváme *přepřavami*. Základní řešení dostaneme tak, že postupně obsazujeme pole ve zvoleném pořadí. Pořadí obsazování je dáno typem použité metody pro nalezení výchozího základního řešení. U všech metod je však nutné dodržovat následující pravidlo: každé pole lze obsadit nejvyšší možnou hodnotou s ohledem na kapacity a_i a požadavky b_j a již dříve obsazená

pole (minimum z hodnot kapacity a požadavku snížených o odebrané kapacity a uspokojené požadavky - *redukováné hodnoty* kapacity a požadavku). Pořadí obsazování polí nemá vliv na to, zda-li řešení bude či nebude základní. Postupně budou uvedeny tři metody nalezení výchozího základního řešení pro následující příklad.

Příklad 12.

Nalezněte základní řešení dopravního problému. Čtyři dodavatelé mají na skladech 110, 120, 130, 140 jednotek produktu a pět zákazníků požaduje po 100 jednotkách. (Konečným úkolem je sestavení takového plánu přepravy, aby celkové přepravní náklady byly minimální.) Sazby, vyjadřující náklad v Kč na dopravu jednotky produktu mezi příslušným dodavatelem a zákazníkem, je dána maticí

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 11 & 3 & 11 \\ 13 & 2 & 10 & 4 & 8 \\ 10 & 4 & 11 & 8 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.7.2.1 Metoda severozápadního rohu

Výpočet provádíme v tabulce 2.20. Dodavatele označíme D_i , zákazníky Z_j . Zapišeme do tabulky kapacity a požadavky a zkontrolujeme, zda-li jsou součty kapacit rovny součtu požadavků - tj. zda-li se jedná o vyrovnaný problém. Potom obsazujeme pole tabulky po řádcích, počínaje polem vlevo nahoře ("severozápadní roh"), nejvyššími možnými hodnotami proměnných, tak aby řádkové a sloupcové součty hodnot proměnných odpovídaly zadaným číslům a_i , b_j . Při obsazování polí touto metodou tedy nebereme v úvahu sazby - proto také nejsou v tabulce uvedeny.

Příklad 12 - nalezení výchozího základního řešení metodou severozápadního rohu.

Obsazování tabulky začneme polem D_1Z_1 , které lze obsadit nejvýše hodnotou $x_{11} = 100$. Tím je splněn požadavek na součet hodnot prvního sloupce Z_1 a dále již první sloupec neobsazujeme. Pokračujeme polem D_1Z_2 , do kterého lze zapsat nejvýše $x_{12} = 10$. Tím je splněn požadavek na součet prvního řádku a dále již neobsazujeme ani první řádek. Pokračujeme tedy polem D_2Z_2 , které obsadíme hodnotou $x_{22} = 90$ atd. Řešení ukazuje tabulka 2.21. a lze jej zapsat ve tvaru matice, jejíž prvky jsou nezáporné a splňují omezení úlohy 2.7.2.:

$$X = \begin{bmatrix} 100 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 90 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 100 \end{bmatrix}.$$

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	a_i
D_1	100	10				110
D_2		90	30			120
D_3			70	60		130
D_4				40	100	140
b_j	100	100	100	100	100	500/500

Tab. 2.21 Výchozí základní řešení příkladu 12 - metoda severozápadního rohu.

Matice $\mathbf{X}$ obsahuje $(m + n - 1) = 8$ nenulových prvků a lze se přesvědčit, že sloupkové vektory koeficientů u těchto nenulových proměnných v soustavě 2.7.2. jsou lineárně nezávislé. Je to tedy základní přípustné řešení, které je nede degenerované.

Spojíme-li obsazená pole v tabulce vodorovnými a svislými čarami, vznikne graf. Podle tvaru grafu lze spolehlivě určit vlastnosti řešení v tabulce. Platí následující poučka:

- tvoří-li graf, byť jen svou částí, uzavřený obvod, není řešení v tabulce základní,
- netvoří-li graf uzavřený obvod, pak řešení je základní.

Graf sestavený z obsazených polí tabulky 2.21. netvoří uzavřený obvod, řešení $\mathbf{X}$ je tedy základní.

Poznámka.

1. Obsazujeme-li pole vždy nejvyšší možnou hodnotou, pokaždé buď vyčerpáme jednu kapacitu nebo uspokojíme jeden požadavek, a tak vyloučíme z obsazování zbývající pole v řádce nebo sloupci. Vzhledem k tomu, že posledním obsazením současně vyčerpáme poslední kapacitu a uspokojíme poslední požadavek, je celkový počet obsazených polí roven součtu řádků a sloupců minus jedna. Obsazená pole rovněž nemohou tvořit uzavřený obvod.
2. Řešení příkladu 12 je určeno obsazenými poli $x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34}, x_{44}, x_{45}$. Vektory sloupců koeficientů $\mathbf{a}_i$ u těchto proměnných obsahují vždy dvě jedničky a sedm nul. Poloha jedniček je obecně určena indexy i, j - první jednička je na i -tém místě, druhá na $(m + j)$ -tém místě. Poučku o neuzavřeném grafu pro základní řešení lze tedy dokázat tak, že se dokáže lineární nezávislost vektorů $\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{23}, \mathbf{a}_{33}, \mathbf{a}_{34}, \mathbf{a}_{44}, \mathbf{a}_{45}$:

$$\mathbf{a}_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{33} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{atd.}$$

Místo naznačeného důkazu (laskavý čtenář si proveďte sám) poučky ukažme, že sloupcové vektory koeficientů u proměnných, které tvoří uzavřený okruh, jsou lineárně závislé. Bez újmy na obecnosti uvažujme vektory $\mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{24}, \mathbf{a}_{32}, \mathbf{a}_{34}$, které necht' přísluší vybraným nenulovým proměnným $x_{22}, x_{24}, x_{32}, x_{34}$ řešení (sestrojený graf tvoří zjevně uzavřený obvod). Lineární kombinace těchto vektorů s koeficienty 1, -1, -1, 1 je rovna $\mathbf{0}$ (nulový vektor):

$$\mathbf{a}_{22} - \mathbf{a}_{24} - \mathbf{a}_{32} + \mathbf{a}_{34} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Vzhledem k tomu, že metoda severozápadního rohu nepřihlíží k sazbám, nelze očekávat, že získané základní řešení bude blízké optimu či dokonce přímo optimální. Naopak, často je třeba toto řešení zlepšovat v mnoha krocích, než se dospěje k optimu.

2.7.2.2 Indexní metoda

Metody nalezení výchozího základního řešení, které je již blízké optimálnímu, se označují jako tzv. aproximační metody. Indexní metoda je její nejjednodušší podobou. Při obsazování polí přednostně obsazujeme pole s nižší sazbou, v případě shodnosti sazeb upřednostníme pole s nižším součtem sloupcového a řádkového indexu, v případě shodnosti s nižším řádkovým indexem.

Příklad 12 - nalezení výchozího základního řešení indexní metodou.

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	a_i
D_1	6 100	9	11 10	3	11	110
D_2	13	2 100	10 20	4	8	120
D_3	10	4	11 30	8	1 100	130
D_4	6	6	3 40	1 100	4	140
b_j	100	100	100	100	100	500/500

Tab. 2.22 Výchozí základní řešení příkladu 12 - metoda indexní.

Řešení je uvedeno v tabulce 2.22. Tabulka obsahuje osm obsazených polí, graf spojující obsazená pole netvoří uzavřený obvod - je tedy základním přípustným nede degenerovaným řešením, které lze zapsat ve tvaru matice $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 40 & 100 & 0 \end{bmatrix}.$$

Porovnáme-li hodnoty účelových funkcí pro výchozí základní řešení obdržené metodou severozápadního rohu $z_{SZR} = 2560$ Kč a metodou indexní $z_{IND} = 1770$ Kč, ukazuje se, že indexní metoda poskytuje lepší výchozí základní řešení (ve smyslu blíže k optimálnímu) než metoda severozápadního rohu.

2.7.2.3 Vogelova aproximační metoda

Indexní metoda nalezení výchozího základního řešení sice přednostně obsazuje pole s nižšími sazbami, někdy se však nevyhneme situaci, kdy je nutné obsadit i pole s příliš vysokými sazbami. Tento nedostatek odstraňuje Vogelova aproximační metoda (VAM), která bere v úvahu i rozdíly mezi nejnižšími sazbami v řádcích a sloupcích. Metodou VAM, i když je mnohem pracnější než obě předcházející metody, dostaneme výchozí základní řešení, které se zpravidla jen velmi málo liší od optimálního, nebo je s ním přímo totožné. Většinou se s výchozím základním řešením nalezeným metodou VAM spokojíme jako s přibližným výsledným řešením.

Postup nalezení výchozího základního řešení metodou VAM lze shrnout do následujících pravidel:

- pro každý řádek a sloupec (obecně řadu) se stanoví difference mezi dvěma nejnižšími sazbami v této řadě (jsou-li stejné, difference je nula),
- vybereme řadu s nejvyšší diferencí, v ní obsadíme největší možnou přepravou pole s nejnižší sazbou,
- řadu s vyčerpanou kapacitou nebo uspokojeným požadavkem z dalšího postupu vyloučíme,
- znovu stanovíme difference; pokud byl vynechán řádek, přepočítají se sloupcové difference a naopak,
- výše uvedeným způsobem postupně obsazujeme pole tak dlouho dokud nezůstane jedna řada nebo jeden sloupec,
- jestliže je nejvyšší difference stejná u více řad, hledáme tzv. sedlový bod, tj. pole s nejnižší sazbou z hlediska řádku i sloupce, který obsadíme; v případě několika sedlových bodů obsadíme ten, pro který je součet řádkové a sloupcové difference největší,
- neexistuje-li v řadách s nejvyšší diferencí ani jeden sedlový bod, pak stanovíme tzv. druhé difference; druhá difference je rozdíl mezi druhou nejnižší sazbou v řadě a mezi nejnižší sazbou v řadě kolmé na původní; vybereme řadu s nejvyšší druhou diferencí a v ní obsadíme pole s nejnižší sazbou.

Příklad 12 - nalezení výchozího základního řešení metodou VAM.

Výpočet je proveden v tabulce 2.23. K původní tabulce jsou připojeny další řádky a sloupce pro difference, příp. druhé difference (jsou uvedeny jako druhé číslo za čárkou). Největší difference jsou vyznačeny tučně, sedlové body jsou označeny hvězdičkou.

Řešení je nedegenerované a splňuje požadavky na základní přípustné řešení. Hodnota účelové funkce z_{VAM} je nejmenší z dosud uvedených metod - $z_{VAM} = 1530$. Jak mnoho se liší jednotlivá základní přípustná řešení od optimálního však lze zodpovědět až po testu optimality, příp. nalezení optimálního řešení.

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	a_i	diference			
D_1	6 100	9	11	3 10	11	110	3	3	3	6
D_2	13	2 70	10	4 50	8	120	2	2	2	2
D_3	10	4 30	11	8	* 1 100	130	3	3	4,5	4,4
D_4	6	6	3 100	* 1 40	4	140	2	3	5	
b_j	100	100	100	100	100	500/500				
diference	0	2	7	2	3					
	4,6	2		1						
		2		4,4						

Tab. 2.23 Výchozí základní řešení příkladu 12 - metoda VAM

2.7.3 Test optimality

Test optimality lze použít pro libovolné základní nedegenerované řešení. Postup pro degenerované řešení je uveden v kapitole 2.7.5. Je založen na porovnání sazby c_{ij} s tzv. nepřímou sazbou c'_{ij} v každém neobsazeném poli. Nepřímé sazby se vypočítají následujícím způsobem:

1. Stanoví se pomocná řádková čísla u_i , $i = 1, 2, \dots, m$ a sloupcová čísla v_j , $j = 1, 2, \dots, n$ (okrajová čísla) dle předpisu:

- a) Pro obsazená pole sestavíme rovnice

$$u_i + v_j = c_{ij}, \quad (2.7.6)$$

tj. pro takové kombinace i, j , pro které $x_{ij} > 0$.

- b) Jedno z pomocných čísel u_i nebo v_j položíme rovno nule, ostatní vypočteme z rovnic (2.7.6) - pro $(m + n)$ proměnných máme $(m + n - 1)$ rovnic.

2. Pro neobsazená pole vypočteme nepřímé sazby c'_{ij} z rovnic

$$c'_{ij} = u_i + v_j, \quad (2.7.7)$$

a rozdíly Δ_{ij} z rovnic

$$\Delta_{ij} = c'_{ij} - c_{ij}. \quad (2.7.8)$$

Pro obsazená pole zřejmě platí $c'_{ij} = c_{ij}$, na neobsazených polích jsou sazby c_{ij} a c'_{ij} obecně různé. Jestliže platí na všech polích $c'_{ij} - c_{ij} \leq 0$, je řešení optimální. Je-li alespoň na jednom (neobsazeném) poli $c'_{ij} - c_{ij} > 0$, pak testované řešení není optimální a lze nalézt jiné řešení s nižší hodnotou účelové funkce.

Poznámka.

S výhodou lze položit rovno nule pomocné číslo pro takovou řadu, která má nejvíce obsazených polí.

Příklad 12 - test optimality výchozího základního řešení.

Podrobme testu optimality výchozí základní řešení vypočtené indexní metodou. Řešení vypočtené v tabulce 2.22. je nede degenerované, lze tedy přistoupit k výpočtu pomocných čísel. Pro obsazená pole sestavme rovnice podle předpisu (2.7.6):

$$\begin{array}{cccc} u_1 + v_1 = 6 & u_1 + v_3 = 11 & u_3 + v_3 = 11 & u_4 + v_4 = 1 \\ u_2 + v_2 = 2 & u_2 + v_3 = 10 & u_4 + v_3 = 3 & u_3 + v_5 = 1 \end{array} \quad (2.7.9)$$

Vzhledem k tomu, že nejvíce obsazených polí obsahuje třetí sloupec, je výhodné volit odpovídající pomocné sloupcové číslo v_3 rovno nule (vyskytuje se ve čtyřech rovnicích (2.7.9). Ostatní pomocná čísla vypočteme z rovnic (2.7.9). Tedy:

$$\begin{array}{cccccc} u_1 = 11 & u_2 = 10 & u_3 = 11 & u_4 = 3 & & \\ v_1 = -5 & v_2 = -8 & v_3 = 0 & v_4 = -2 & v_5 = -10 & \end{array} \quad (2.7.10)$$

Pro neobsazená pole vypočteme nepřímé sazby c'_{ij} dle rovnice (2.7.7):

$$\begin{array}{ccc} c'_{12} = 3 & c'_{14} = 9 & c'_{15} = 1 \\ c'_{21} = 5 & c'_{24} = 8 & c'_{25} = 0 \\ c'_{31} = 6 & c'_{32} = 3 & c'_{34} = 9 \\ c'_{41} = -2 & c'_{42} = -5 & c'_{45} = -7 \end{array}, \quad (2.7.10)$$

a rozdíly mezi nepřímými a přímými sazbami dle rovnice (2.7.8):

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{12} = -6 & \Delta_{14} = 6 & \Delta_{15} = -10 \\ \Delta_{21} = -8 & \Delta_{24} = 4 & \Delta_{25} = -8 \\ \Delta_{31} = -4 & \Delta_{32} = -1 & \Delta_{34} = 1 \\ \Delta_{41} = -8 & \Delta_{42} = -11 & \Delta_{45} = -11 \end{array} \quad (2.7.11)$$

Pro tři neobsazená pole je rozdíl Δ_{ij} kladný - pro D_1Z_4, D_2Z_4, D_3Z_4 . Výchozí základní řešení nalezené indexní metodou tedy není optimální.

Výpočty spojené s testem optimality jsou natolik průhledné a jednoduché, že se většinou provádějí přímo do tabulky. Stačí si uvědomit, že součet řádkového čísla u_i a sloupcového čísla v_j musí být roven sazbě c_{ij} v poli na průsečíku i -tého řádku a j -tého sloupce, přitom pole musí být obsazeno. Součet řádkového a sloupcového čísla poskytuje nepřímou sazbu c'_{ij} v poli

průsečíku i -tého řádku a j -tého sloupce a počítá se jen pro neobsazená pole. Na obsazených polích může sloužit ke kontrole výpočtu.

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	a_i	řádk.č
D_1	6 100	-6 9 3 10	11	6 3 9	-10 11 1	110	11
D_2	-8 13 5	2 100	10 20	4 4 8	-8 8 0	120	10
D_3	-4 10 6	-1 4 3 30	11	1 8 9	1 100	130	11
D_4	-8 6 -2	-11 6 -5 40	3 100	1 100	-11 4 -7	140	3
b_j	100	100	100	100	100		
sl.č.	-5	-8	0	-2	-10		

Tab. 2.24 Test optimality výchozího základního řešení příkladu 12.

Teoretické zdůvodnění testu optimality je založeno podobně jako u simplexové metody na vlastnostech duálního modelu. Duální model k dopravnímu modelu (2.7.1) - (2.7.5) lze vyjádřit:

Hledáme vektor

$$\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n], \quad (2.7.12)$$

(kde proměnné $u_1, \dots, u_m$ se vztahují k prvním m rovnicím soustavy (2.7.2) a proměnné $v_1, \dots, v_n$ k posledním n rovnicím), vyhovující vlastním omezením

$$\begin{aligned}
 u_1 + v_1 &\leq c_{11} \\
 u_1 + v_2 &\leq c_{12} \\
 &\vdots \\
 u_1 + v_n &\leq c_{1n} \\
 u_2 + v_1 &\leq c_{21} \\
 &\vdots \\
 u_m + v_n &\leq c_{mn}
 \end{aligned} \quad (2.7.13)$$

a maximalizující funkci

$$f = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m + b_1 v_1 + \dots + b_n v_n. \quad (2.7.14)$$

Pro dané základní nedegenerované řešení $\mathbf{X}^0$ vypočteme sdružené řešení $\mathbf{u}^0$ tak, že řešíme $(m + n - 1)$ nerovností soustavy (2.7.13) odpovídajících $(m + n - 1)$ kladným prvkům $\mathbf{X}$ jako rovnice (viz věty o dualitě str. 51). Pak dosadíme vypočtené sdružené řešení $\mathbf{u}^0$ do ostatních nerovností soustavy (2.7.13). V testu optimality označujeme levé strany nerovností (2.7.13), tj. součty $u_i + v_j$ jako nepřímé sazby c'_{ij} . Vyhovuje-li sdružené řešení $\mathbf{u}^0$ všem nerovnostem

(2.7.13), t.j. jestliže $c'_{ij} - c_{ij} \leq 0$, pak $\mathbf{u}^0$ je přípustným řešením duálního modelu a podle vět o dualitě (str. 51) jsou $\mathbf{X}^0$ i $\mathbf{u}^0$ optimální. Není-li $\mathbf{u}^0$ přípustné, není $\mathbf{X}^0$ optimální.

2.7.4 Přejchod na nové základní řešení

Jestliže test optimality nepotvrdí výchozí základní řešení jako optimální, výpočet pokračuje přechodem na nové základní řešení s nižší hodnotou účelové funkce. Nové základní řešení hledáme následujícím postupem:

1. Vyhledáme v tabulce výchozího základního řešení pole, kde rozdíl Δ_{ij} je největší (kladný). Na toto neobsazené pole je nutné přesunout jistou přepravu tak, aby byly zachovány součty sloupců a řádků. Pole nazýváme *nově obsazované pole*.
2. K nově obsazovanému poli vyhledáme mezi obsazenými poli ve výchozím základním řešení taková pole, která budou tvořit spolu s nově obsazovaným polem uzavřený okruh. Pro nede degenerované řešení vždy lze takový okruh nalézt a je jediný.
3. Na nově obsazované pole umístíme přepravu, kterou označme t . Pak na polích uzavřeného okruhu s tímto polem střídavě odečítáme a přičítáme přepravu t . Řádkové a sloupcové součty tak zůstanou nezměněny - v každé řadě je pole s $(+t)$ i pole s $(-t)$.
4. Přepravu t určíme jako nejmenší přepravu umístěnou na polích uzavřeného okruhu, na nichž se t odečítá. Tím se zaručí jednak nezápornost nového řešení, jednak bude nové řešení opět základní, neboť na uzavřeném okruhu se jedno z polí stane neobsazeným a okruh se přeruší.

Provedením naznačených součtů a rozdílů $(x_{ij} \pm t)$ dostaneme tedy nové základní řešení, které podrobíme opět testu optimality, přitom toto nové základní řešení zaujme místo výchozího základního řešení.

Příklad 12 - přechod na nové základní řešení.

Nalezneme nové základní řešení k výchozímu základnímu řešení nalezenému indexní metodou a podrobenému testu optimality (se záporným výsledkem). V tabulce 2.24. je největší rozdíl Δ_{ij} v poli D_1Z_4 , s ním tvoří uzavřený okruh obsazená pole D_4Z_4, D_4Z_3, D_1Z_3 . Pole D_1Z_4 obsadíme zatím neurčenou přepravou t , kterou budeme střídavě odečítat a přičítat na ostatních polích okruhu, jak naznačuje tabulka 2.25 - odečítat se bude na polích D_1Z_3, D_4Z_4 , přičítat se bude na poli D_4Z_3 .

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	a_i
D_1	6 100	9	11 10 - t	3 + t	11	110
D_2	13	2 100	10 20	4	8	120
D_3	10	4	11 30	8	1 100	130
D_4	6	6	3 40 + t	1 100 - t	4	140
b_j	100	100	100	100	100	500/500

Tab. 2.25 Návrh nového základního řešení - uzavřený okruh pro přesun přepravy.

Minimální hodnota přepravy na polích okruhu, na kterých se bude odečítat, je $x_{13} = 10$ na poli D_1Z_3 , tedy $t = 10$. Tabulka 2.26. představuje nové základní řešení po provedení operací na polích okruhu naznačených v tabulce 2.25.

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	a_i
D_1	6 100	9	11	3 10	11	110
D_2	13	2 100	10 20	4	8	120
D_3	10	4	11 30	8	1 100	130
D_4	6	6	3 50	1 90	4	140
b_j	100	100	100	100	100	500/500

Tab. 2.26 Nové základní řešení.

Vyjádříme ještě změnu (úbytek) účelové funkce při přechodu na nové základní řešení. Účelová funkce z^1 výchozího základního řešení dle tabulky 2.22. je

$$z^1 = c_{11}x_{11} + c_{13}x_{13} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{33}x_{33} + c_{35}x_{35} + c_{43}x_{43} + c_{44}x_{44},$$

účelová funkce z^2 návrhu nového základního řešení dle tabulky 2.25. je

$$z^2 = c_{11}x_{11} + c_{13}(x_{13} - t) + c_{14}t + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{33}x_{33} + c_{35}x_{35} + c_{43}(x_{43} + t) + c_{44}(x_{44} - t)$$

Rozdíl Δz účelových funkcí je pak

$$\Delta z = z^2 - z^1 = -c_{13}t + c_{14}t + c_{43}t - c_{44}t.$$

Dosadíme-li za sazby na obsazených polích pomocná řádková a sloupcová čísla u_i a v_j (přitom pole O_1Z_4 považujeme za dosud neobsazené), dostaneme po úpravě hledaný vztah pro úbytek účelové funkce

$$\Delta z = t(-u_1 - v_3 + c_{14} + u_4 + v_3 - u_4 - v_4) = -t(c'_{14} - c_{14}),$$

neboť $u_1 + v_4 = c'_{14}$ značí nepřímou sazbu na neobsazeném poli. Uvedený vztah vysvětluje volbu obsazovaného pole v přechodu k novému základnímu řešení: obsazení pole s maximálním kladným rozdílem nepřímé a přímé sazby zaručí maximální úbytek účelové funkce. Tento výsledek lze zobecnit:

$$-\Delta z = t(c'_{ij} - c_{ij}),$$

tedy úbytek účelové funkce je roven součin přesunované přepravy a rozdílu nepřímé a přímé sazby na nově obsazovaném poli.

2.7.5 Degenerované řešení

Základní degenerované řešení obsahuje méně než $(m + n - 1)$ obsazených polí. Graf spojující obsazená pole není souvislý. Nelze vypočítat pomocná řádková a sloupcová čísla (málo rovnic) a nelze ke každému neobsazenému poli najít uzavřený okruh z obsazených polí. Pokračování výpočtu pro degenerované základní řešení je možné až po formálním odstranění degenerace.

Vhodné neobsazené pole se obsadí nulovou přepravou a je pro test optimality považováno za obsazené. Pole pro obsazení nulovou přepravou je nutné zvolit tak, aby s ostatními obsazenými poli nebyl vytvořen uzavřený okruh. V případě dvojnásobné, příp. vícenásobné degenerace se doplňují nulové přepravy na více polích tak, aby celkový součet obsazených polí byl vždy $(m + n - 1)$.

2.7.6 Ekonomická interpretace nepřímých sazeb a duálního řešení

Při ekonomické interpretaci pomocných řádkových a sloupcových čísel se můžeme obrátit k ekonomické interpretaci proměnných duálního modelu sdruženého s dopravním problémem. Ekonomicky představují u_i ocenění kapacit dodavatelů a v_j ocenění požadavků zákazníků z hlediska vzájemné výhodnosti jejich polohy. Nepřímá sazba c'_{ij} je jejich součtem. Lze ji chápat jako ocenění určité dvojice dodavatel - zákazník z dopravního hlediska, tedy jako ocenění cesty od dodavatele D_i k zákazníkovi Z_j . Jde však o relativní ocenění vázané na určité základní řešení primárního dopravního modelu, tedy na určitou skupinu obsazených polí, t.j. používaných cest.

Uvažujme ještě jednou výchozí základní řešení nalezené indexní metodou, pro které hledáme nové základní řešení. Pro vybraný uzavřený okruh, po kterém se uskuteční přesun přepravy lze vyjádřit nepřímou sazbou na neobsazeném poli pomocí lineární kombinace přímých sazeb obsazených polí (jak bylo ukázáno v předcházející kapitole)

$$c'_{14} = c_{13} - c_{43} + c_{44}.$$

Na uvedený vztah lze pohlížet rovněž jako na cenu ekvivalentní kombinace přeprav - viz analogie se simplexovou metodou v kap. 2.6.7.. Nepřímá sazba c'_{ij} pak udává dopravní náklady na jednotku přepravovanou od dodavatele D_i k zákazníkovi Z_j po systému obsazených polí, tj. používaných cest v daném základním řešení. Je-li tedy ekvivalentní kombinace přeprav dražší než přímá přeprava, obsadíme pole přímou přepravou a přejdeme k novému základnímu řešení. Pro optimální řešení naopak není ekvivalentní kombinace přeprav dražší než přímá přeprava.

3. Stochastické modely ekonomických procesů

3.1. ÚVOD

Základním předpokladem použití deterministických modelů je existence funkčního vztahu mezi proměnnými. Takový funkční vztah je často účelnou abstrakcí v tom smyslu, že skutečný vztah mezi proměnnými může mít náhodný charakter, ale odchylky od funkčního vztahu jsou zanedbatelné, resp. náhodné výkyvy jsou malé ve srovnání s úrovní procesu. V opačném případě je nutné použít modelů stochastických např. při hromadění jednotek, které mají být určitým způsobem obslouženy (osoby v prodejně, telefonní hovory, stroje čekající na opravu) nebo které mají zabezpečit plynulost určitého procesu (výrobky na skladě) nebo se postupně opotřebovávají (dopravní prostředky, vyřazované a opotřebované stroje). Všechny tyto jevy mají řadu společných rysů a právě těmi se zabýváme při zkoumání stochastických procesů. K jejich popisu lze s výhodou použít aparátu poskytovaného teorií markovských procesů, která v podstatě popisuje jistý pravděpodobnostní vývoj stavu systémů v čase.

3.2. STOCHASTICKÉ PROCESY MARKOVSKÉHO TYPU

Z hlediska matematické teorie se stochastický proces zavádí jako soustava náhodných veličin $\{X(t), t \in T\}$, kde množina T většinou značí množinu časových okamžiků, náhodná veličina např. $X(1)$ reprezentuje *stav systému* v čase "1" atd. Předpokládáme tedy, že systém se může nacházet v jednom z s stavů $X_1, X_2, \dots, X_s$. Množina všech stavů stochastického procesu se zpravidla označuje jako *stavový prostor*. Pravděpodobnost, že se systém nachází v okamžiku n ($n = 0, 1, 2, \dots$) právě ve stavu X_i ($i = 1, 2, \dots, s$), budeme označovat $p_i(n)$, vektor pravděpodobností $\mathbf{p}(n) = [p_1(n), p_2(n), \dots, p_s(n)]$, $n = 0, 1, 2, \dots$, se nazývá *pravděpodobnostním vektorem stavu systému* v okamžiku n . Přitom vždy platí

$$0 \leq p_i(n) \leq 1 \text{ a } \sum_{i=1}^s p_i(n) = 1 \quad \text{pro všechna } i \text{ a } n.$$

Vektor $\mathbf{p}(0)$ budeme nazývat *pravděpodobnostním vektorem počátečního (výchozího) stavu systému*.

Předpokládejme, že systém může v čase přecházet z jednoho stavu do druhého, přitom *pravděpodobnost přechodu systému* ze stavu X_i do stavu X_j ($i, j = 1, 2, \dots, s$) může záviset pouze na tom, ve kterém stavu se systém nachází v daném okamžiku a do kterého stavu má přejít v následujícím okamžiku, nebo také na tom jakými stavy systém procházel dříve, než dospěl do stavu X_i . Pokud připustíme první možnost, označíme pravděpodobnost přechodu systému ze stavu X_i do stavu X_j v okamžiku n $p_{ij}(n)$, ($i, j = 1, 2, \dots, s$). Modelem časového vývoje takového systému (s jednoduchou pravděpodobnostní zpětnou vazbou mezi bezprostředně po sobě následujícími stavy) je *markovský proces*. Jestliže množina časových okamžiků T je diskrétní, pak stochastický proces nazýváme *markovským řetězcem*. Jsou-li všechny pravděpodobnosti přechodu pro daný proces v čase konstantní, tj. platí-li

$$p_{ij}(0) = p_{ij}(1) = \dots = p_{ij},$$

říkáme, že proces je homogenní (v čase). Předmětem našeho dalšího studia budou především markovské homogenní procesy.

Na základě znalosti pravděpodobností přechodu a vektoru stavu systému v předcházejícím okamžiku lze určit pro kterýkoliv okamžik pravděpodobnost, že systém se bude nacházet v určitém stavu (tzv. *absolutní pravděpodobnost stavu*), z rovnice

$$p_j(n+1) = \sum_{i=1}^s p_i(n) \cdot p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (3.2.1)$$

Např. pro $n = 0$ to znamená, že v okamžiku "0" se může vyskytnout libovolný stav, z něhož se přechází do stavu j v okamžiku "1". Názorněji lze situaci ilustrovat na rozepsaném tvaru rovnice (3.2.1)

$$\begin{aligned} p_1(1) &= p_1(0) \cdot p_{11} + p_2(0) \cdot p_{21} + \dots + p_s(0) \cdot p_{s1} \\ p_2(1) &= p_1(0) \cdot p_{12} + p_2(0) \cdot p_{22} + \dots + p_s(0) \cdot p_{s2} \\ &\vdots \\ p_s(1) &= p_1(0) \cdot p_{1s} + p_2(0) \cdot p_{2s} + \dots + p_s(0) \cdot p_{ss} \end{aligned} \quad (3.2.1a)$$

Zapišeme-li pravděpodobnosti přechodů systému do tvaru matice

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1s} \\ p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2s} \\ \vdots \\ p_{s1}, p_{s2}, \dots, p_{ss} \end{bmatrix}, \quad (3.2.2)$$

můžeme soustavu rovnic (3.2.1) pro $j = 1, 2, \dots, s$ zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{p}(n+1) = \mathbf{p}(n) \cdot \mathbf{P}, \quad (3.2.3)$$

$\mathbf{p}(n)$, $\mathbf{p}(n+1)$ představují řádkové vektory stavu systému v okamžicích n a $n+1$. Matici $\mathbf{P}$ nazýváme *maticí přechodu systému*, nebo také *stochastickou maticí*. Pro prvky matice přechodu platí

$$\begin{aligned} 0 \leq p_{ij} \leq 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, s, \\ \sum_{j=1}^s p_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Z rovnice (3.2.3) dostaneme postupně pro $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(1) &= \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}, \\ \mathbf{p}(2) &= \mathbf{p}(1) \cdot \mathbf{P} = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}^2, \\ &\vdots \\ \mathbf{p}(n) &= \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}^n, \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Markovský homogenní proces je tedy plně popsán maticí přechodu $\mathbf{P}$ a pravděpodobnostním vektorem výchozího stavu $\mathbf{p}(0)$ (vektorem absolutních pravděpodobností výchozího okamžiku) za předpokladu jednoduché vazby a její neměnnosti.

Pravděpodobnostní model je definován pro určité abstraktní jevy. Při konkrétním zkoumání jsme nuceni parametry tohoto modelu odhadnout pomocí pozorovaných veličin (výběrových relativních četností, výběrových průměrů apod.). Tyto postupy jsou předmětem teorie statistického odhadu.

V následujícím jsou uvedeny většinou bez důkazu některé z důležitých výsledků teorie markovských procesů:

1. Jestliže matice $\mathbf{P}$ je stochastická, tj. pro její prvky platí rovnice (3.2.4), jsou stochastické i matice $\mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3, \dots$.
2. Jsou-li řádky stochastické matice $\mathbf{P}$ stejné, pak $\mathbf{P}^k = \mathbf{P}$, $k = 1, 2, 3, \dots$.
3. Lze-li matici $\mathbf{P}$ převést vhodným přechíslováním stavů na tvar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad (3.2.6)$$

kde $\mathbf{A}$ a $\mathbf{D}$ jsou čtvercové submatice matice $\mathbf{P}$ a $\mathbf{0}$ značí nulovou matici, říkáme, že matice $\mathbf{P}$ je *rozložitelná*.

4. Lze-li matici $\mathbf{P}$ převést vhodným přechíslováním stavů na tvar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad (3.2.7)$$

kde $\mathbf{A}$ a $\mathbf{D}$ jsou čtvercové submatice matice $\mathbf{P}$, pak pravděpodobnost, že systém se dostane do některého stavu odpovídajícího množině $\mathbf{D}$, monotónně klesá s růstem počtu přechodů (tj. s časem). Stavy odpovídající množině $\mathbf{D}$ označujeme jako *tranzientní*, stavy odpovídající množině $\mathbf{A}$ jako *rekurentní*.

5. Lze-li matici $\mathbf{P}$ převést vhodným přechíslováním stavů na tvar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.2.8)$$

kde $\mathbf{0}$ je čtvercová matice, pak liché mocniny matice $\mathbf{P}$ budou tvaru (3.2.8), zatímco sudé mocniny $\mathbf{P}$ budou tvaru (3.2.6). Systém bude oscilovat mezi dvěma podmnožinami svých stavů a nazýváme jej proto *periodický*.

6. Není-li matice přechodu $\mathbf{P}$ rozložitelná ani periodická, existuje vektor

$$\mathbf{p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}^{(n)} = [p_1, p_2, \dots, p_s]. \quad (3.2.9)$$

Souřadnice vektoru $\mathbf{p}$ nezávisí na vektoru počátečního stavu $\mathbf{p}^{(0)}$. V takovém případě říkáme, že systém je *ergodický* (nebo také statisticky stabilní). Souřadnice $p_1, p_2, \dots, p_s$ vektoru $\mathbf{p}$ lze interpretovat jako podíly celkové doby, kterou systém stráví ve stavech 1, 2, ..., s v rámci dosti dlouhého časového období. Vektor $\mathbf{p}$ bývá proto také nazýván *vektorem ustáleného (stacionárního stavu) systému*.

Pro matici přechodu $\mathbf{P}$, která charakterizuje ergodický proces, platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n = \mathbf{P}, \quad (3.2.10)$$

kde matice $\mathbf{P}$ je stochastická matice, jejíž každý řádek je stejný a rovný vektoru $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1s} \\ p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2s} \\ \vdots \\ p_{s1}, p_{s2}, \dots, p_{ss} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} p_1, p_2, \dots, p_s \\ p_1, p_2, \dots, p_s \\ \vdots \\ p_1, p_2, \dots, p_s \end{bmatrix}. \quad (3.2.11)$$

Položíme-li v případě ergodického procesu v rovnosti (3.2.5) $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}$ a přejdeme-li k limitě pro $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p} \cdot \mathbf{P}^n,$$

dostaneme

$$\mathbf{p} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{P}. \quad (3.2.12)$$

Vzhledem k (3.2.2) musí platit také

$$\mathbf{p} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{P}.$$

Z této rovnice a z podmínky

$$\sum_{i=1}^s p_i = 1$$

lze numericky stanovit složky vektoru $\mathbf{p}$ ustáleného stavu. Pro *stacionární pravděpodobnosti* (složky pravděpodobnostního vektoru v ustáleném stavu) platí

$$p_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n p_{ij}^{(k)}, \quad (3.2.13)$$

kde $p_{ij}^{(k)}$ jsou prvky matice $\mathbf{P}_n^k$, které se blíží veličinám p_j .

Hodnoty stacionárních pravděpodobností nezávisí na vektoru výchozích pravděpodobností a mohou se neustále vyskytovat všechny stavy - takový řetězec nazýváme pozitivně regulárním řetězcem.

Příklady:

1. Ergodický proces popisuje stochastická matice

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix},$$

vypočtete druhou a čtvrtou mocninu matice a limitní (stacionární) pravděpodobnosti. Matice může např. reprezentovat model procesu stroje, který se může nacházet ve dvou stavech - v provozu nebo v opravě. Stacionární pravděpodobnosti pak představují celkovou dobu strávenou v příslušném stavu za delší období.

2. Jestliže se v stochastické matici objevují stavy, pro které platí $p_{ii} = 1$, nazýváme je *absorpčními stavy*. V takovém stavu proces končí. Dostane-li se jednotka do tohoto stavu, je zde pohlcena. Ostatní stavy nazveme přechodné (tranzientní). Interpretace matice může být např. opět model procesu stroje, který se po vyřazení z provozu již nevrací do provozu.

3. Model periodického procesu může reprezentovat v nejjednodušším případě stochastická matice

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oba stavy se periodicky opakují. Vyjádřete liché a sudé mocniny stochastické matice.

3.3. STOCHASTICKÉ PROCESY S HODNOCENÍM A JEJICH OPTIMÁLNÍ ŘÍZENÍ

V předcházejícím výkladu byla věnována pozornost pouze pravděpodobnostní stránce stochastických procesů. V určitých modelových ekonomických situacích nás však mohou zajímat hodnotové důsledky spojené s přechody mezi stavy nebo setrváním v určitých stavech (např. zisk, náklady nebo ztráty) - obecně je budeme nazývat *přínosy procesu*. Hledáme tedy měřítko ocenění stavů a přechodů, které budeme označovat jako sazby. Matici pravděpodobností přechodu tedy přiřadíme *matici ocenění (sazeb)* jednotlivých přechodů

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1s} \\ r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2s} \\ \vdots \\ r_{s1}, r_{s2}, \dots, r_{ss} \end{bmatrix}. \quad (3.3.1)$$

Ocenění jednotlivých přechodů je východiskem zkoumání za větší počet časových intervalů. Výsledkem je pak střední hodnota budoucího výnosu za n časových intervalů za předpokladu, že proces začíná ve stavu i . Přitom existují dvě základní situace: hodnotovou a pravděpodobnostní stránku stochastického procesu buď nemůžeme ovlivňovat nebo ji v určitých diskrétních okamžicích můžeme ovlivnit výběrem jedné z variant, které jsou k dispozici, přičemž se tyto varianty liší jak v pravděpodobnostech přechodu p_{ij} , tak v přínosech r_{ij} . V druhém případě (můžeme ovlivňovat proces výběrem určité varianty) má pak smysl hledat takovou (optimální) posloupnost variant, která by *maximalizovala střední hodnotu celkového přínosu*.

Uvažujme nejprve první případ, kdy stochastický proces nemůžeme ovlivňovat. Celkový přínos procesu, který uskuteční n přechodů je hodnota náhodné veličiny, která obecně závisí jak na počtu přechodů, tak na výchozím stavu. Označme $v_i(n)$ střední hodnotu celkového přínosu procesu, který je na počátku v i -tém stavu a uskuteční n přechodů. Pro $v_i(n)$ platí rekurentní vztah

$$v_i(n) = \sum_{j=1}^N p_{ij} [r_{ij} + v_j(n-1)], \quad (3.3.2)$$

resp.

$$v_i(n) = \sum_{j=1}^N p_{ij} r_{ij} + \sum_{j=1}^N p_{ij} v_j(n-1), \quad (3.3.2a)$$

kde první člen na pravé straně výrazu (3.3.2a) je střední hodnota přínosu spojeného s jedním přechodem ze stavu i a druhý člen je střední hodnota přínosu procesu, kterému do konce zbývá $n-1$ přechodů a je s pravděpodobnostmi p_{i1} ve stavu 1, p_{i2} ve stavu 2, atd. První člen výrazu (3.3.2a) nezávislý na počtu přechodů označme q_i . Potom lze psát

$$v_i(n) = q_i + \sum_{j=1}^N p_{ij} v_j(n-1), \text{ kde } q_i = \sum_{j=1}^N p_{ij} r_{ij}$$

resp. ve vektorové formě

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}(n-1). \quad (3.3.3)$$

Uvedený vztah tedy vyjadřuje střední hodnotu výnosu podmíněného určitým výchozím stavem, který očekáváme po n příštích obdobích, a to s pomocí střední hodnoty výnosu jednoho období a pomocí matice pravděpodobností přechodu a střední hodnoty výnosů, které očekáváme v příštích $n-1$ obdobích.

Uvažujme nyní druhý případ, kdy zkoumaný proces můžeme ovlivňovat výběrem jedné z variant, které jsou k dispozici. Předpokládejme, že je-li proces v i -tém stavu, můžeme volit mezi k_i variantami (1, 2, ..., k_i). Počty variant mohou být pro různé stavy různé.

Zavedme označení

p_{ij}^k - pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j při k -té variantě,

r_{ij}^k - přírůstek z přechodu procesu ze stavu i do stavu j při k -té variantě.

Úlohu lze potom formulovat tak, že hledáme takovou posloupnost variant, která bude maximalizovat střední hodnotu celkového přírůstku, který je na počátku v i -tém stavu, uskuteční n přechodů a je optimálně (ve smyslu maximalizace) řízen. Pro $v_i(n)$ platí vztahy analogické k (3.3.2) až (3.3.3) s tím rozdílem, že jsou obohaceny o maximalizaci prováděnou přes množinu variant příslušnou k i -tému stavu.

Tedy

$$v_i(n) = \max_k \sum_{j=1}^N p_{ij}^k [r_{ij}^k + v_j(n-1)]. \quad (3.3.4)$$

Vztah (3.3.4) lze upravit analogicky jako vztah (3.3.2) zavedením veličiny q_i . K zahájení výpočtu je nutné stanovit hodnoty $v_i(n)$ pro $n=0$ a $i=1, 2, \dots, N$. Z definice $v_i(n)$ je patrné, že $v_i(0)$ je střední hodnota celkového přírůstku procesu, který je - v i tém stavu, a již neuskuteční žádný přechod, tj. skončil ve i -tém stavu. Je to tedy jakýsi jednorázový přírůstek plynoucí z toho, že proces skončí v i -tém stavu. Pokud nám tedy nezáleží na stavu, v kterém proces skončí, lze položit

$$v_i(0) = 0 \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, N.$$

Vztah (3.3.4) je typickým rekurentním vztahem *dynamického programování* s obvyklým obratem na řešení úlohy "odzadu" se záznamem mezivýsledků, které jsou následně užity ke konstrukci optimálního řízení vzhledem k libovolnému výchozímu stavu.

3.4. PROCESY SE SPOJITÝM ČASEM

V řadě stochastických procesů dochází ke změnám stavu procesu v libovolných okamžicích. Proces se stavy X_t je definován pro reálné hodnoty času t . V takových případech

jsou předmětem zkoumání místo pravděpodobností jisté limitní veličiny. Zavedme následující limitní veličiny:

$$a_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t + \Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t}, a_{ii} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t + \Delta t)}{\Delta t}.$$

Tyto limity nazýváme *intenzitami pravděpodobností přechodu*. Zatímco pro $i \neq j$ mají intenzity a_{ij} význam intenzity pravděpodobnosti přechodu analogicky k pravděpodobnosti přechodu p_{ij} mezi stavy i a j , a_{ii} vyjadřuje *intenzitu pravděpodobnosti opuštění stavu i* na rozdíl od pravděpodobnosti p_{ii} setrvání ve stavu i .

Matici pravděpodobností přechodu mezi okamžiky t a $t + \Delta t$ vyjádříme pomocí intenzit pravděpodobností přechodu:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t, t + \Delta t) &\equiv \begin{bmatrix} 1 - a_{11}\Delta t, & a_{12}\Delta t, & \dots, & a_{1s}\Delta t \\ a_{21}\Delta t, & 1 - a_{22}\Delta t, & \dots, & a_{2s}\Delta t \\ \vdots & & & \\ a_{s1}\Delta t, & a_{s2}\Delta t, & \dots, & 1 - a_{ss}\Delta t \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{E} + \Delta t \begin{bmatrix} -a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1s} \\ a_{21}, & -a_{22}, & \dots, & a_{2s} \\ \vdots & & & \\ a_{s1}, & a_{s2}, & \dots, & -a_{ss} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice. Vzhledem k tomu, že pro pravděpodobnosti platí

$$\sum_{j=1}^s p_{ij} = 1,$$

musí být řádkové součty matice intenzit a_{ij} nulové, t.j

$$-a_{ii} + \sum_{j \neq i}^s a_{ij} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Označíme-li matici intenzit $\mathbf{A}$, můžeme vyjádřit vztah pro absolutní pravděpodobnosti přechodu mezi okamžiky t a $t + \Delta t$

$$\mathbf{p}(t + \Delta t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{P}(t + \Delta t) = \mathbf{p}(t)(\mathbf{E} + \Delta t\mathbf{A}), \quad (3.4.2)$$

Postupnou úpravou rovnice (3.4.2) a limitním přechodem pro $\Delta t \rightarrow 0$ dostaneme

$$\frac{\mathbf{p}(t + \Delta t) - \mathbf{p}(t)}{\Delta t} = \mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{A},$$

a dle definice derivace

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}(t + \Delta t) - \mathbf{p}(t)}{\Delta t} = \mathbf{p}'(t)$$

pak máme vektorovou diferenciální rovnici pro vektor absolutních pravděpodobností

$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{A}. \quad (3.4.3)$$

Jestliže předmětem našeho zkoumání nebudou *přechodové jevy procesu*, ale chování procesu v ustáleném (stacionárním) stavu, pak pro *vektor absolutních pravděpodobností stacionárního stavu* platí rovnice

$$\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (3.4.4)$$

neboť $\mathbf{p}'(t) = 0$ pro $t \rightarrow \infty$

Využijme rovnici (3.4.3) pro vyjádření časové závislosti vektoru pravděpodobností ve speciálním případě, kdy jsou možné jen přechody mezi "sousedními" stavy, tj. ze stavu n lze přejít jen do stavu $n-1$, setrvat ve stavu n nebo přejít do stavu $n+1$. Příklad ještě zjednodušíme podmínkou, že systém nemůže přejít do stavu $n-1$, ale je možné jen setrvání ve stavu nebo přechod do stavu $n+1$. Počet stavů není omezen. Intenzita přechodu je konstantní a označíme ji λ . Matici intenzit pravděpodobností přechodu pak lze vyjádřit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix}. \quad (3.4.5)$$

Jednotlivé stavy mohou např. reprezentovat přítomnost počtu 0, 1, 2, ... jednotek v systému. Pro pravděpodobnosti výskytu jednotlivých stavů dostaneme z rovnice (3.4.3)

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda p_0(t) \\ p_1'(t) &= \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t) \\ p_2'(t) &= \lambda p_1(t) - \lambda p_2(t) \end{aligned}$$

Řešením soustavy diferenciálních rovnic dostaneme vyjádření pravděpodobnosti $p_n(t)$, že v čase t bude systém ve stavu n , tj. bude obsahovat n jednotek při definované počáteční podmínce $p_0(0) = 1$, která znamená, že v okamžiku "0" je systém prázdný (je ve stavu "0"), ve tvaru

$$p_n(t) = \frac{(t\lambda)^n}{n!} e^{-\lambda t}. \quad (3.4.6)$$

Obdržené *rozdělení pravděpodobností stavů* je známo jako *Poissonovo rozdělení*. V našem případě udávají hodnoty tohoto rozdělení pravděpodobnosti výskytu n jednotek v době t při intenzitě výskytu (vstupu) λ . Takto charakterizovaný proces vstupů se nazývá Poissonův.

Zatímco Poissonovo rozdělení udává pravděpodobnost rozdělení počtu jednotek, často se zajímáme také o *rozdělení časových intervalů mezi vstupujícími jednotkami*. Pravděpodobnost, že v intervalu od 0 do t nedošlo k žádnému vstupu, je z Poissonova rozdělení

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Pravděpodobnost, že v tomtéž intervalu dojde alespoň k jednomu vstupu je pak

$$\bar{p}_0(t) = 1 - p_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Tuto pravděpodobnost můžeme interpretovat také tak, že náhodná proměnná doby prvního vstupu T je menší než t , tj.

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

To je vlastně distribuční funkce doby mezi dvěma vstupy. Odpovídající funkce hustoty pravděpodobnosti je pak její derivací

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (3.4.7)$$

tedy *exponenciální*.

Poissonovo rozdělení počtu jednotek je tedy ekvivalentní exponenciálnímu rozdělení dob mezi vstupy.

Podobným způsobem lze modelovat ubývání jednotek v systému, tedy Poissonovým rozdělením výstupu a exponenciálním rozdělením doby mezi výstupy.

4. Modely hromadné obsluhy

4.1 ÚVOD

Teorie hromadné obsluhy, někdy označovaná též jako teorie front, zkoumá kvantitativně procesy hromadného charakteru, které jsou charakterizovány vznikem *požadavků* spojených s určitými jednotkami vyžadujícími *obsahu*, tj. provedení jistých operací. Vlivem omezené kapacity obsluhy může docházet k hromadění (čekání) jednotek s následným uspokojením požadavku nebo odmítnutím obsluhy. V systémech, které jsou předmětem studia teorie hromadné obsluhy, lze identifikovat dva základní prvky: jednotky - *požadavky*, *zákazníci*, které vyžadují obsluhu a prvky, které obsluhu poskytují - *obslužná zařízení*, *linky*, *kanály*.

Se systémy uvedeného charakteru se setkáváme v celé řadě reálných situací. Např. při studiu výrobních linek lze považovat jednotlivé stroje za obslužné kanály a polotovary výrobků v různém stupni rozpracovanosti za obsluhované jednotky. Podobného charakteru je průchod pacientů sítí zařízení polikliniky, zpracování informací pomocí výpočetní techniky, průjezd vozidel silniční sítí, obsluhy zákazníků v prodejně apod.

Všechny popsané systémy mají *charakter plynulých proudů požadavků* různé intenzity, v kterých se vyskytují určité *náhodné odchylky*. Pokud by tyto výkyvy neexistovaly, stačilo by pouze vyrovnávat rychlost, resp. intenzitu vstupu jednotek do obslužného zařízení s rychlostí, resp. intenzitou obsluhy.

Přístup při řešení problémů, pro které lze využít teorii hromadné obsluhy, je shodný se základními principy používanými v jiných oblastech operačního výzkumu. Východiskem je *matematický model* reálného systému, ten se pak řeší matematickými prostředky a výsledky se používají pro analýzu či zlepšení řízení reálného systému. Výsledky získané na základě modelu jsou použitelné pouze tehdy, jestliže model odráží dostatečně přesně základní rysy reálného systému. Specifikujeme tedy informace, které je třeba mít k dispozici při vytváření modelů reálných situací.

4.2 ZÁKLADNÍ PRVKY MODELŮ HROMADNÉ OBSLUHY

Při vytváření matematických modelů systémů hromadné obsluhy je třeba specifikovat:

- vstupní tok požadavků,
- síť obslužných linek,
- doby obsluh na jednotlivých linkách,
- pravidla pro odchod jednotek z fronty do obsluhy (čekací disciplína),
- speciální rysy systému.

Vstupní tok požadavků se charakterizuje *intenzitou*, tedy středním počtem požadavků za jednotku času. Je zřejmé, že intenzita vstupního toku je jedním ze základních faktorů, které mají vliv na činnost systémů hromadné obsluhy; ovlivňuje např. doby čekání, využití obslužných linek, délky front apod. Většinou přicházejí požadavky do systému v náhodných okamžicích, tedy délky časových intervalů mezi po sobě následujícími příchody jsou obecně *spojité náhodné veličiny*, k jejichž určení je třeba znát *typ rozdělení a jeho parametry*.

Specifikace příslušných náhodných veličin na základě dat získaných z reálného systému se provádí *metodami matematické statistiky*. Přitom mohou nastat některé problémy, např.

- a) *nestacionárnost vstupního toku* - intervaly mezi příchody jsou hodnoty časově závislých náhodných veličin; problém se řeší tak, že doba sledování se rozdělí na úseky, v kterých lze považovat vstupní tok za stacionární (např. období "špičkového" a "slabého" provozu,
- b) *nehomogenost požadavků* - existuje několik zdrojů, z nichž přicházející požadavky se liší v nároku na dobu obsluhy, různou prioritou při zpracování; výsledný vstupní tok je směsí několika toků,
- c) *skupinové vstupy* - požadavky nepřicházejí jednotlivě, ale po skupinách různé početnosti,
- d) *závislost intenzity vstupního toku na stavu systému* - např. je-li před obslužným zařízením velká fronta, část požadavků se nechá touto skutečností odradit a k systému se nepřipojí apod.

Síť obslužných linek se charakterizuje počtem a uspořádáním. Speciálními případy struktury sítě obslužných kanálů jsou:

- paralelní uspořádání,
- sériové uspořádání.

Složitější struktury pak mohou být sestaveny jako kombinace (zřetězení) paralelního a sériového uspořádání.

Doby obsluh. Pro jednotlivé obslužné kanály a jednotlivé typy požadavků je třeba znát doby obsluh, které jsou většinou opět hodnoty náhodných veličin. Přitom se mohou vyskytnout následující problémy:

- a) doby obsluh mohou být závislé na čase a stavu systému - změna rychlosti obsluhy v závislosti na délce fronty, únava obslužné linky apod.,
- b) nepravidelný provoz obslužných linek způsobený poruchami, údržbou apod..

Řád fronty je určen pravidlem, podle kterého se přicházející požadavky řadí do fronty, resp. odcházejí do obsluhy. U systémů, v nichž obsluhovanými jednotkami jsou lidé, se většinou používá řazení do fronty podle okamžiku příchodů. Jestliže jsou prvky nakládány na sebe, je přirozený opačný řád fronty - později přichází prvky brání v odchodu dříve přichozím. Hlavní typy řádu front (dle mezinárodně uznávané konvence) jsou:

- a) FIFO (first in, first out) - v pořadí příchodů,
- b) LIFO (last in, first out) - v opačném pořadí příchodů,
- c) SIRO (selection in random order) - v náhodném pořadí,
- d) PRI (priority) - podle priorit,
- e) GD (general discipline) - obecný řád fronty.

Problémy, které se mohou objevit v souvislosti s čekací disciplínou, jsou např.:

- a) časově proměnné priority (závisí např. na době strávené v systému),
- b) pořadí zpracování určitých prvků je pevně dáno (např. technologií, z důvodů kompletace celků apod.).

Speciální rysy systémů. Někdy nestačí k vystižení podstatných stránek systémů hromadné obsluhy popis vstupního toku požadavků, sítě obslužných linek, dob obsluh a řádu fronty, protože existují některé další vazby či omezení, např. konečný počet čekacích míst ve frontě, zastupitelnost obslužných linek, neúspěšná obsluha vedoucí k opakovanému zpracování apod., které je třeba v modelu respektovat.

4.3 KLASIFIKACE SYSTÉMŮ HROMADNÉ OBSLUHY

Popis modelů hromadné obsluhy zahrnuje popis vstupního toku požadavků, sítě obslužných kanálů, dob obsluh, řádu front a případně některých speciálních rysů systémů. Pro přehlednost byla zavedena D.G. Kendallem úsporná notace, která kompaktně zachycuje a klasifikuje standardní typy modelů hromadné obsluhy.

Modely jsou popsány posloupností znaků: "A / B / X / Y / z", kde

A - označuje rozdělení intervalů mezi příchody,

B - rozdělení dob obsluh,

Y - omezení na kapacitu systému (počet požadavků, které mohou být v systému přítomny),

X - počet paralelních kanálů,

z - řád fronty.

Na místě A, B se mohou vyskytovat symboly:

M - pro exponenciální rozdělení,

D - pro konstantu,

E_k - pro Erlangovo rozdělení,

G - pro obecné rozdělení,

na místě X a Y: čísla 1, 2, ..., ∞ ,

na místě z: FIFO, LIFO, SIRO, PRI, GD.

Např. M/D/6/ ∞ /FIFO je zkrácený zápis pro systém hromadné obsluhy, v kterém mají intervaly mezi příchody exponenciální rozdělení, doby obsluh na 6 paralelních kanálech jsou konstantní, neexistuje žádné omezení na počet požadavků v systému a řád fronty je FIFO.

4.4 POUŽITÍ MODELŮ HROMADNÉ OBSLUHY

Řešením matematického modelu rozumíme v teorii hromadné obsluhy výpočet hodnot základních charakteristik, které dávají informaci o *kvalitě provozu* systému. Z *hlediska obsluhovaných prvků* mezi takové charakteristiky patří např. *počet prvků v systému*, *délka fronty* (počet prvků ve frontě), *doba čekání ve frontě*, *pravděpodobnost obsluhy bez čekání* (fronta nulové délky), *doba pobytu v systému* apod. Z *hlediska obslužných linek* je důležitou charakteristikou *využitost* (vytíženost) jednotlivých zařízení, *podíl požadavků, které se z důvodu dlouhé fronty k systému nepřipojí*, *doby prostojů* způsobené nedostatkem práce apod. Pokud existují v modelu náhodné výkyvy, jsou i uvedené charakteristiky náhodnými veličinami a ve většině případů se v praxi spokojujeme se *středními hodnotami charakteristik*, tedy s průměrnou délkou fronty, průměrnou dobou čekání apod.

Jaká je *praktická využitelnost* teorie hromadné obsluhy. Proč vlastně vytvářet komplikované modely, pro které je třeba empiricky zjišťovat u jistého počtu požadavků intervaly mezi jejich příchody a doby obsluh, abychom na základě výpočtů stanovili průměry čekacích dob, průměrnou využitost zařízení apod.? Není jednodušší měřit přímo veličiny, které nás zajímají, a výsledky statisticky zpracovat, protože pokud model bude dobře aproximovat reálný systém, musíme dospět k podobným závěrům? Většinou nás ale nezajímají charakteristiky zařízení, která jsou v provozu a v kterých nelze nic měnit, spíše potřebujeme odpovědět na otázky typu: Co se stane, když se v následujícím období zvýší počet požadavků, které do systému vstupují o 15%? K jakému prodloužení čekacích dob povede zvýšená intenzita vstupního toku? Postačí k zabezpečení dosavadní úrovně činnosti systému přidat jeden obslužný kanál?

Nebo např. chceme vědět, jak se projeví na činnosti výrobní linky nahrazení určitého stroje novým s dvojnásobnou kapacitou. Je nahrazovaný stroj skutečně "úzkým" místem systému? Nebo např. pro projektovaný systém chceme znát hrubý odhad průměrné využitosti jednotlivých obslužných kanálů, průměrnou délku fronty (aby se mohla vhodně dimenzovat velikost "čekárny", skladu apod.).

Nebo si můžeme klást otázky opačného typu. Např. kolik by mělo být paralelních linek určitého typu, aby při daném vstupním toku nepřesáhla průměrná doba čekání stanovenou mez. Podobně lze hlavně při projektování systémů hledat při zadaných charakteristikách kvality provozu jeho popis.

Pro uvedené typy úloh mohou dát modely hromadné obsluhy dostatečně přesné odpovědi. Zavedeme-li dále určitá ekonomická kritéria ve formě ocenění ztrát, které vznikají čekáním požadavků ve frontách na jedné straně a ztrát z prostojů obslužných zařízení na druhé straně, můžeme systém optimalizovat (např. změnou počtu obslužných linek, změnou jejich výkonnosti, zavedením priorit pro určité typy požadavků apod.), např. ve smyslu minimalizace střední hodnoty celkových ztrát.

4.5 METODY ŘEŠENÍ MODELŮ HROMADNÉ OBSLUHY

Metody řešení matematických modelů systémů hromadné obsluhy lze rozdělit do dvou hlavních kategorií:

- analytické,
- simulační.

Analytický způsob řešení modelů spočívá v tom, že na základě parametrů modelu (parametry náhodných veličin, počet obslužných linek apod.) získáme využitím teorie pravděpodobnosti a jiných matematických disciplín výsledky, které jsou funkcemi parametrů modelu, tj. např. střední hodnota dob čekání T_f

$$\bar{T}_f = E[T_f] = g(p_1, p_2, \dots, p_n),$$

kde $p_1, p_2, \dots, p_n$ jsou parametry uvažovaného modelu.

Pouze určitá část modelů, které odpovídají reálným situacím, je v současné době analyticky řešitelná (znesnadněno složitým typem rozdělení náhodných veličin, složitou strukturou sítě obslužných zařízení, speciálními vlastnostmi systémů apod.). Kromě toho lze analytické výsledky získat většinou jen pro tzv. *stacionární situace* (pravděpodobnostní charakteristiky systému se již nemění s časem).

Simulačními metodami lze překonat problémy analytického řešení. Princip simulačních metod v oblasti hromadné obsluhy spočívá v tom, že se vytvoří model ve formě počítačového programu, jehož úkolem je ve správné časové a logické sekvenci napodobit příchody požadavků, jejich řazení do fronty, pobyt v obslužných linkách a výstupy ze systému. Problémy se stochastickými prvky se překonávají tak, že se programově generují hodnoty příslušných náhodných veličin, a charakteristiky systému (např. průměrné čekací doby) se spočtou z údajů získaných z průchodu jistého počtu požadavků modelem.

4.6 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI MODELŮ HROMADNÉ OBSLUHY

Na příkladu obecného systému hromadné obsluhy G/G/m zavedme základní veličiny a vztahy mezi nimi. Systém G/G/m tedy popisuje systém, v kterém intervaly mezi po sobě následujícími příchody požadavků jsou hodnoty obecné náhodné veličiny s distribuční funkcí

$A(t)$, doby obsluh hodnoty náhodné veličiny s distribuční funkcí $B(t)$ a systém obsahuje m paralelních obslužných linek. Řád fronty je libovolný.

$N(t)$ - počet požadavků přítomných v systému (ve frontě a v obslužných linkách),

T_n - okamžik příchodu n -tého požadavku do systému,

ζ_n - interval mezi příchody požadavků n a $n-1$ zřejmě platí $\zeta_n = T_n - T_{n-1}$.

Předpokládáme-li, že ζ_n jsou náhodné veličiny s distribuční funkcí $A(t)$, je

$$P(\zeta_n \leq t) = A(t) \text{ pro } n = 1, 2, \dots,$$

x_n - doba obsluhy n -tého požadavku.

Doby obsluh mají distribuční funkci $B(x)$, takže

$$P(x_n \leq x) = B(x) \text{ pro } n=1, 2, \dots,$$

w_n - doba čekání n -tého požadavku ve frontě,

S_n - doba pobytu n -tého požadavku v systému, tj. $S_n = w_n + x_n$.

Odvoďme důležitý vztah mezi průměrným počtem požadavků a průměrnou dobou pobytu požadavku v systému.

Označíme-li

$\alpha(t)$ - počet příchodů do systému během intervalu $(0, t)$,

$\beta(t)$ - počet odchodů (dokončených obsluh) během intervalu $(0, t)$,

pak zřejmě platí

$$N(t) = N(0) + \alpha(t) - \beta(t).$$

Celková doba, kterou strávily všechny požadavky v systému během intervalu $(0, t)$, je

$$\gamma(t) = \int_0^t N(t) dt.$$

Průměrná intenzita vstupu (průměrný počet příchodů za jednotku času) během období $(0, t)$ je

$$\bar{\lambda}_t = \frac{\alpha(t)}{t}.$$

Průměrná doba, kterou strávil jeden požadavek v systému - měřeno v intervalu $(0, t)$, je

$$\bar{T}_t = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}.$$

Zavedeme-li průměrný počet požadavků v systému v intervalu $(0, t)$ jako

$$\bar{N}_t = \frac{\gamma(t)}{t},$$

můžeme jej vyjádřit ve tvaru

$$\overline{N}_t = \frac{\gamma(t)}{t} = \frac{\gamma(t)}{t} \cdot \frac{\alpha(t)}{\alpha(t)} = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)} \cdot \frac{\alpha(t)}{t} = \overline{T}_t \cdot \overline{\lambda}_t.$$

Za předpokladu, že existují limity

$$\overline{\lambda} = \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\lambda}_t \quad \text{a} \quad \overline{T} = \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{T}_t,$$

pak existuje i limita

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{N}_t = \overline{N}$$

a platí

$$\overline{N} = \overline{\lambda} \cdot \overline{T}. \quad (4.6.1)$$

Vztah (4.6.1) je znám pod názvem *Littleův vztah*.

Vymezíme-li systém tak, že do něj nebudeme počítat obslužní linky, tj. vstup do obsluhy budeme považovat za výstup ze systému, dostaneme podobný vztah

$$\overline{N}_f = \overline{\lambda} \cdot \overline{T}_f, \quad (4.6.2)$$

kde $\overline{N}_f$ je průměrný počet požadavků v nově definovaném systému, tj. ve frontě, a $\overline{T}_f$ je průměrná doba čekání ve frontě.

Dále zřejmě platí, že

$$\overline{T} = \overline{T}_f + E[X], \quad (4.6.3)$$

kde $E[X]$ je střední hodnota doby obsluhy.

Při výpočtech základních charakteristik systémů hromadné obsluhy lze s výhodou použít vztahů (4.6.1), (4.6.2) a (4.6.3), kdy je známo rozdělení intervalů mezi příchody požadavků (a tedy i intenzita λ) a rozdělení dob obsluhy (a tedy i $E[X]$), neboť potom stačí vypočítat jednu z veličin ($\overline{N}, \overline{N}_f, \overline{T}, \overline{T}_f$) a ostatní lze získat pomocí uvedených vztahů.

4.7 JEDNODUCHÝ EXPONENCIÁLNÍ KANÁL

Nejjednodušším pravděpodobnostním modelem teorie hromadné obsluhy je systém s jedním obslužným kanálem, přitom intervaly mezi příchody mají exponenciální rozdělení s hustotou pravděpodobnosti

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{pro } t > 0,$$

doby obsluh mají rovněž exponenciální rozdělení s hustotou pravděpodobnosti

$$b(t) = \mu e^{-\mu t} \quad \text{pro } t > 0,$$

řád fronty je FIFO. Systém může být buď neomezený, a pak nejsou kladena žádná omezení ani na velikost fronty - systém M/M/1/∞/FIFO, nebo je systém a tím také počet čekacích míst omezen - systém M/M/1/K/FIFO. Jako doplňkovou speciální charakteristiku lze např. předpokládat neomezený (nekonečný) externí zdroj (mimo systém hromadné obsluhy).

I když s případem modelovaným takto jednoduchou formou se v praxi setkáme jen zřídka, bude na něm ilustrován postup při sestavení modelu a jeho popis pomocí *stacionárních*

pravděpodobností a určitých vybraných středních hodnot. Prakticky lze modelu využít jako první aproximace před tím, než se přistoupí k modelům složitějším.

Všechny výsledky, které lze odvodit na uvedeném modelu, budou zřejmě funkcemi parametrů λ a μ , tj. intenzity vstupu požadavků a intenzity obsluhy. Platí totiž, že střední hodnota doby mezi příchody je rovna převrácené hodnotě průměrného počtu příchodů za jednotku času, která je definicí intenzity:

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} t \cdot a(t) dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Stejně pro střední dobu obsluhy a intenzitu obsluhy platí:

$$\bar{s} = \int_0^{\infty} t \cdot b(t) dt = \frac{1}{\mu}.$$

Podrobněji bude uvedeno stanovení rozdělení pravděpodobností stavů a základních charakteristik systému s neomezeným počtem čekacích míst, pro konečný systém bude stanovení provedeno jako jeho modifikace.

4.7.1 Stanovení rozdělení pravděpodobností stavů ve stacionárním stavu pro systém M/M/1/∞

Vycházíme-li z předpokladu exponenciálních rozdělení intervalů mezi vstupy a dobami obsluhy, pak intenzity pravděpodobností vstupu resp. obsluhy více než jedné jednotky jsou zanedbatelně malé. Exponenciální rozdělení intervalů mezi vstupy bylo v kapitole 3.4. odvozeno na základě předpokladu Poissonova rozdělení příchodů, jehož jednou z vlastností je ordinálnost. V popisu systému se tedy mohou vyskytnout jen intenzity pravděpodobností setrvání v téže situaci a intenzity pravděpodobností přechodu do situací sousedních.

O systému budeme hovořit, že je ve stavu n v okamžiku t , jestliže je v něm přítomno n požadavků, tj. $N(t) = n$. Je-li systém ve stavu n , je jedna jednotka v obsluze a $n - 1$ jednotek ve frontě. Ze stavu n je pak možný přechod jen do stavů $n - 1$, n , $n + 1$. Necht' pravděpodobnost přechodu ze stavu n do stavu $n + 1$ (tj. pravděpodobnost vstupu jednotky do systému) v časovém intervalu $(t, t + \Delta t)$ je dána veličinou $\lambda \Delta t$, pravděpodobnost přechodu ze stavu n do stavu $n - 1$ (tj. pravděpodobnost ukončení obsluhy a výstupu jednotky ze systému) veličinou $\mu \Delta t$, pravděpodobnost setrvání ve stavu n veličinou $1 - \lambda \Delta t - \mu \Delta t$. Veličiny λ , μ jsou pak odpovídajícími intenzitami pravděpodobností přechodu. Matice pravděpodobností přechodu má pro uvedený případ tvar

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda \Delta t, & \lambda \Delta t, & 0, & \dots \\ \mu \Delta t, 1 - \mu \Delta t - \lambda \Delta t, & \lambda \Delta t, & 0, & \dots \\ 0, & \mu \Delta t, 1 - \mu \Delta t - \lambda \Delta t, & \lambda \Delta t, & 0, \dots \\ \vdots & & & \end{bmatrix}, \quad (4.7.1)$$

kde jednotlivé stavy mohou růst nade všechny meze, neboť počet míst ve frontě není podle uvedených výchozích předpokladů omezen.

Matici intenzit pravděpodobností přechodu pak lze psát v souladu s rovnicí (3.4.1) ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\lambda, & \lambda, & 0, \dots \\ \mu, & -\mu - \lambda, & \lambda, 0, \dots \\ 0, & \mu, & -\mu - \lambda, \lambda, 0, \dots \\ \vdots & & & \end{bmatrix}. \quad (4.7.2)$$

V modelu se tedy předpokládají stále stejné pravděpodobnosti, resp. intenzity vstupu i obsluhy. Nemění se ani pro jednotlivé stavy systému (tj. např. intenzita obsluhy je stejná při jedné jednotce v obsluze bez fronty jako při libovolné délce fronty) ani postupem času. Jsou tedy splněny předpoklady použití teorie homogenních markovských procesů ve stacionárním stavu.

Pro matici intenzit pravděpodobností přechodu $\mathbf{A}$ a vektor stacionárních pravděpodobností $\mathbf{p}$ platí rovnice (3.4.4)

$$\mathbf{p}\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

s podmínkou

$$\sum p_i = 1.$$

Vyjádříme-li uvedenou rovnici ve složkovém tvaru, dostaneme soustavu (nekonečnou) rovnic

$$\begin{aligned} -\lambda p_0 + \mu p_1 &= 0 \\ \lambda p_0 - (\lambda + \mu)p_1 + \mu p_2 &= 0 \\ \vdots & \\ p_{n-1} - (\lambda + \mu)p_n + \mu p_{n+1} &= 0 \\ \vdots & \end{aligned}. \quad (4.7.3)$$

Soustavu diferenčních rovnic pro p_n lze řešit postupným dosazováním ve formě

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0, \quad (4.7.4a)$$

$$p_2 = \frac{\lambda + \mu}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu} p_0 - \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0, \quad (4.7.4b)$$

$$p_3 = \frac{\lambda + \mu}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 - \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0, \quad (4.7.4c)$$

Lze tedy předpokládat (a matematickou indukcí rovněž dokázat), že obecně platí

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0. \quad (4.7.5)$$

K vyčíslení p_n zbývá stanovit p_0 , ke kterému použijeme podmínku $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$. Tedy z rovnice

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0 = p_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = 1$$

dostaneme p_0 ve tvaru

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}. \quad (4.7.6)$$

Velikost $\frac{\lambda}{\mu}$ udává poměr intenzity vstupů k intenzitě obsluhy, označuje se ρ , nazývá se *intenzita provozu* a vyjadřuje využitost obslužného kanálu (průměrný počet vstupů během průměrné doby obsluhy).

Řada ve jmenovateli výrazu pro p_0 je geometrickou řadou s kvocientem ρ , která konverguje pro $|\rho| < 1$. Existence *stacionárních pravděpodobností* modelu s neomezeným počtem míst ve frontě je tedy *podmíněna* nerovností $\rho < 1$. Vyjádříme-li pomocí součtu této nekonečné geometrické řady s kvocientem $\rho < 1$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = \frac{1}{1 - \rho}$$

pravděpodobnost p_0

$$p_0 = 1 - \rho$$

dostaneme pro stacionární pravděpodobnosti p_n vztah

$$p_n = (1 - \rho)\rho^n \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7.7)$$

Intenzita provozu je velmi důležitou charakteristikou popisovaného systému, na její velikosti závisí podstatným způsobem chování resp. kvalita systému. Zatímco stacionární chování je podmiňuje platnost $\rho < 1$, tzn. že pro konstantní λ a μ bude po určité době (pro $t \rightarrow \infty$) pravděpodobnost vzniku fronty určité délky stále stejná. Je-li naopak $\rho \geq 1$, systém se nedostane do stacionárního stavu a pravděpodobnost vzniku fronty bude neustále narůstat, neboť požadavky přicházejí rychleji než jsou obsluhovány - fronta roste nade všechny meze.

Poznámka.

Často nás bude při popisu systému zajímat, jaká je pravděpodobnost, že v systému bude méně než k jednotek nebo více než k jednotek.

1. Pravděpodobnost, že v systému bude k nebo méně jednotek, lze vyjádřit distribuční funkcí

$$\begin{aligned} P(N \leq k) &= \sum_{i=0}^k p_i = \sum_{i=0}^k \rho^i (1 - \rho) = \sum_{i=0}^k \rho^i - \sum_{i=0}^k \rho^{i+1} = \sum_{i=0}^k \rho^i - \sum_{i=0}^{k+1} \rho^i + 1 = \\ &= 1 - \rho^{k+1} \end{aligned}$$

2. Pravděpodobnost, že v systému bude více než k jednotek, je dána výrazem

$$P(N > k) = 1 - P(N \leq k) = \rho^{k+1}$$

nebo jiným postupem

$$P(N > k) = P(N \geq k + 1) = \sum_{i=k+1}^{\infty} p_i = (1 - \rho)\rho^{k+1} \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = \frac{(1 - \rho)\rho^{k+1}}{1 - \rho} = \rho^{k+1}$$

Pokud bychom požadovali vyčíslit pravděpodobnost, že v systému bude méně než k jednotek, stačí si uvědomit, že $P(N < k) = P(N \leq k-1)$.

4.7.2 Základní charakteristiky systému

Znalost rozdělení pravděpodobností stavů systému ve stacionárním stavu p_n umožňuje stanovit řadu charakteristik, podle kterých lze posuzovat různé stránky *kvality provozu* systému - jak z *hlediska obsluhovaných jednotek*, tak z *hlediska využitosti obslužné linky*. Těmito charakteristikami jsou např. průměrný počet požadavků v systému, průměrná délka fronty, průměrná doba čekání, průměrná doba strávená požadavkem v systému apod.

1. Průměrný počet prvků v systému

Pro střední hodnotu náhodné veličiny n podléhající rozdělení p_n platí

$$\bar{n} = E[n] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n = (1 - \rho) \rho \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1}.$$

Výraz $n \rho^{n-1}$ je derivací výrazu ρ^n . Protože řada je konvergentní, lze dále součet derivací nahradit derivací součtu. Tedy

$$\bar{n} = (1 - \rho) \rho \frac{d}{d\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n = (1 - \rho) \rho \frac{d}{d\rho} \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

S použitím parametrů λ a μ dostáváme

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}. \quad (4.7.8)$$

2. Průměrná délka fronty

Je-li v systému n jednotek, pak jedna jednotka je v obsluze a $n - 1$ jednotek je ve frontě. Tedy pro střední hodnotu náhodné veličiny n_f podléhající rozdělení p_n platí

$$\bar{n}_f = \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1) p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n - \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \bar{n} - (1 - p_0) = \frac{\rho}{1 - \rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1 - \rho}.$$

Vyjádřeno s použitím parametrů λ a μ

$$\bar{n}_f = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}. \quad (4.7.9)$$

Počet jednotek ve frontě je tedy v průměru roven počtu jednotek v systému zmenšenému o veličinu $(1 - p_0) = \rho$, která udává relativní četnost zaměstnané obsluhy (intenzitu provozu).

3. Pravděpodobnost výskytu fronty nenulové délky

K vytvoření nenulové fronty dochází v případě, kdy v systému jsou přítomny minimálně dva požadavky. Tedy

$$P(n > 1) = 1 - p_0 - p_1 = 1 - (1 - \rho) - \rho(1 - \rho) = \rho^2. \quad (4.7.10)$$

K výpočtu lze rovněž použít výsledky poznámky 2 kapitoly 4.7.1 s hodnotou $k = 2$.

4. Průměrná doba pobytu v systému

K výpočtu lze s výhodou využít Littleova vztahu odvozeného v kapitole (4.6.)

$$\bar{T}_s = \frac{\bar{n}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}. \quad (4.7.11)$$

Při odvození průměrné doby pobytu v systému lze postupovat také následovně: V průměru je v systému přítomno $\bar{n}$ požadavků. V průměru vstupuje do systému λ požadavků za jednotku času. Tedy počet průměrně pročekaných jednotek času dostaneme jako podíl $\bar{n}$ a λ .

5. Průměrná doba pobytu ve frontě

Podobně jako pro průměrnou dobu pobytu v systému lze i pro průměrnou dobu pobytu ve frontě využít Littleova vztahu aplikovaného na systém tvořící pouze frontu, tj.

$$\bar{T}_f = \frac{\bar{n}_f}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} \cdot \frac{\lambda}{\mu}. \quad (4.7.12)$$

Lze rovněž využít vztahu, že průměrná celková doba pobytu v systému je součtem průměrné doby pobytu ve frontě a průměrné doby obsluhy. Tedy

$$\bar{T}_f = \bar{T}_s - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}. \quad (4.7.12a)$$

4.7.3 Možnosti užití modelu

Model jednoduchého kanálu s exponenciálním vstupem a exponenciální obsluhou obsahuje mnoho zjednodušujících předpokladů, a proto se v předložené ("čisté") formě vyskytuje v praxi jen zřídka. Lze ho však použít pro jednoduchost jako *aproximace* složitějších (obecnějších) situací, např. s jiným rozdělením vstupu a obsluhy, ale s jedním obslužným kanálem.

Příklad 1.

Intervaly mezi příchody pacientů k pohotovostnímu lékaři jsou nezávislé hodnoty exponenciálního rozdělení se střední hodnotou 1 hodina. Doby nutné pro poskytnutí nezbytného ošetření jsou hodnoty exponenciálního rozdělení se střední hodnotou 20 minut.

Vypočteme průměrný počet čekajících pacientů, průměrnou dobu čekání a pravděpodobnost, že lékař bude volný. Určete, jak by se musela změnit průměrná doba obsluhy, aby průměrná doba, kterou pacient stráví čekáním na ošetření a ošetřením, byla kratší než 25 minut.

Řešení.

Uvedený příklad vyhovuje předpokladům jednoduchého exponenciálního kanálu - systému M/M/1/∞. Nejprve určíme hodnoty parametrů λ a μ .

Střední hodnoty příslušných exponenciálních rozdělení jsou

$$\frac{1}{\lambda} = 1 \quad \text{a} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{3},$$

tedy $\lambda = 1$ a $\mu = 3$. V tomto případě je $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{3} < 1$, a lze očekávat stabilizované chování.

Pro průměrný počet čekajících požadavků platí

$$\bar{n}_f = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{1}{3(3 - 1)} = \frac{1}{6} \doteq 0.167.$$

Pro průměrnou dobu čekání ve frontě

$$\bar{T}_f = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{1}{3(3 - 1)} = \frac{1}{6} \text{hod.} = 10 \text{minut}.$$

Pravděpodobnost, že lékař bude volný (tj. systém hromadné obsluhy bude ve stavu 0), udává

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Třetí problém, tj. určení průměrné doby obsluhy, která by vedla k tomu, že průměrná doba, kterou pacienti stráví v systému, bude kratší než 25 minut, je rovněž jednoduché. Hledáme μ takové, aby platilo

$$\bar{T} = \frac{1}{\mu - \lambda} < \frac{25}{60}.$$

Řešením dostáváme

$$\mu - 1 > \frac{60}{25}, \text{ takže } \mu > \frac{85}{25} \quad \text{a} \quad \frac{1}{\mu} < \frac{25}{85} = 0.294 \text{ hod.} = 17.6 \text{ minut}.$$

4.7.4. Omezená kapacita systému (M/M/1/K)

V předcházejících kapitolách byl vyšetřován jednoduchý exponenciální kanál bez jakéhokoliv omezení na délku fronty. V některých případech je však *kapacita systému konečná* - počet požadavků nemůže překročit hodnotu K , tj. maximálně přípustná délka fronty je pak $K - 1$. Požadavky, které přicházejí v situaci, kdy systém je ve stavu K , se nemohou k systému připojit.

Je-li systém ve stavu K , je pravděpodobnost příchodu jednotky do systému nulová. Matici intenzit pravděpodobností přechodů lze psát v souladu s rovnicí (3.4.1) ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\lambda, & \lambda, & 0, \dots, & \dots, & 0 \\ \mu, & -\mu - \lambda, & \lambda, & 0, \dots, & \dots, & 0 \\ 0, & \mu, & -\mu - \lambda, & \lambda, & 0, \dots, & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0, & \dots, & \dots, & 0, & \mu, & -\mu - \lambda, & \lambda, & 0 \\ 0, & \dots, & \dots, & 0, & \mu, & -\mu - \lambda, & \lambda \\ 0, & \dots, & \dots, & 0, & \mu, & -\mu \end{bmatrix}. \quad (4.7.13)$$

Soustava diferenčních rovnic analogická k (4.7.3) je tedy konečná, pro $n \leq K-1$ je platnost rovnic zachována, pro $n = K$ platí rovnice

$$p_K = \frac{\lambda}{\mu} p_{K-1}.$$

Pro stacionární pravděpodobnosti platí podobně jako v systémech (M/M/1/∞) vztahy

$$\begin{aligned} p_n &= \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0 & \text{pro } n \leq K, \\ p_n &= 0 & \text{pro } n > K. \end{aligned} \quad (4.7.14)$$

Z podmínky $\sum_{n=0}^K p_n = 1$ se určí analogicky k (4.7.6) vztah pro p_0

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^K \rho^i}. \quad (4.7.15)$$

Řada ve jmenovateli je nyní konečná a má součet

$$\frac{1 - \rho^{K+1}}{1 - \rho} \quad \text{pro } \rho \neq 1 \quad \text{a} \quad K+1 \quad \text{pro } \rho = 1,$$

tedy

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}}, & p_n &= \frac{(1 - \rho)\rho^n}{1 - \rho^{K+1}} & \text{pro } \rho \neq 1, \\ p_0 &= \frac{1}{K+1}, & p_n &= \frac{1}{K+1} & \text{pro } \rho = 1. \end{aligned} \quad (4.7.16)$$

V systému (M/M/1/K) tedy existují stacionární pravděpodobnosti i pro případ $\rho \geq 1$, což je přímým důsledkem omezené kapacity fronty, neboť není možný její neomezený růst.

Základní charakteristiky lze stanovit na základě pravděpodobností p_n analogicky jako v kapitole (4.7.2).

Např. průměrný počet požadavků v systému

$$\bar{n} = E[n] = \sum_{n=0}^K n p_n = \frac{1}{K+1} \sum_{n=0}^K n = \frac{K}{2} \quad \text{pro } \rho = 1,$$

$$\bar{n} = p_0 \sum_{n=0}^K n \rho^n = p_0 \rho \sum_{n=1}^K n \rho^{n-1} = p_0 \rho \frac{d}{d\rho} \sum_{n=0}^K \rho^n = \frac{\rho [1 - (K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}]}{(1-\rho)(1-\rho^{K+1})}$$

pro $\rho \neq 1$. (4.7.17)

Průměrná délka fronty je pro $\rho \neq 1$ dána vztahem

$$\bar{n}_f = \sum_{n=1}^K (n-1)p_n = \sum_{n=0}^K np_n - \sum_{n=1}^K p_n = \bar{n} - (1-p_0) = \bar{n} - \frac{1-\rho^K}{1-\rho^{K+1}}. \quad (4.7.18)$$

Přepíšeme-li vztah (4.7.17) pro $\rho \neq 1$ do tvaru

$$\bar{n} = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1 - (K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}},$$

a upravíme-li vztah (4.7.18) dosazením za $\bar{n}$ do tvaru

$$\bar{n}_f = \frac{\rho^2}{1-\rho} \cdot \frac{1 - K\rho^{K-1} + (K-1)\rho^K}{1-\rho^{K+1}},$$

pak první člen v obou výrazech představuje příslušnou průměrnou charakteristiku v případě neomezené fronty a druhý člen pak "korekci" na konečnost systému. Druhý člen je menší než jedna (pro $\rho < 1$) a tedy průměrné hodnoty jsou pro systém s neomezeným počtem čekacích míst vyšší než pro systém s konečným počtem míst se stejnou intenzitou provozu. Podobně lze diskutovat i vztah pro střední počet jednotek v systému. Tento fakt je přímým důsledkem omezení systému, neboť při obsazenosti systému (systém ve stavu K) se příchozí požadavky nemohou k systému připojit.

Průměrnou dobu pobytu požadavků v systému a ve frontě lze určit opět na základě Littleových vztahů

$$\bar{n} = \lambda' \cdot \bar{T} \quad \text{a} \quad \bar{n}_f = \lambda' \cdot \bar{T}_f,$$

kde λ' je průměrná intenzita vstupu. V tomto případě se s pravděpodobností p_K příchozí požadavek vstupního toku nemůže k systému připojit, tedy průměrná intenzita vstupu do systému je

$$\lambda' = \lambda(1 - p_K). \quad (4.7.19)$$

4.8. PROCESY MNOŽENÍ A ÚMRTÍ

Některé složitější modely hromadné obsluhy se dají efektivně studovat jako speciální případy jisté třídy stochastických procesů nazývané *procesy množení a úmrtí* (birth-death processes), v nichž *intenzity vstupu do systému a výstupu ze systému závisí na stavu systému*. Označení třídy stochastických procesů pochází z analogie populace, jejíž zvýšení (narození), resp. snížení počtu jedinců závisí na početnosti populace. Vstup do systému tedy odpovídá narození, dokončení obsluhy a odchod ze systému odpovídá úmrtí.

Zavedeme následující označení a výchozí předpoklady. Narození a úmrtí v populaci jsou nezávislé jevy. Necht' pravděpodobnost, že v k -členné populaci dojde k jednomu narození v intervalu $(t, t + \Delta t)$ je $\lambda_k \Delta t$, pravděpodobnost, že ve stejně početné populaci dojde k jednomu úmrtí, je $\mu_k \Delta t$, pravděpodobnost, že ve stejně početné populaci nedojde k narození ani úmrtí, je $1 - \mu_k \Delta t - \lambda_k \Delta t$. Pravděpodobnost narození a úmrtí více prvků populace během intervalu

$(t, t + \Delta t)$ jsou zanedbatelné. V prázdné populaci nemůže dojít k úmrtí, tedy zřejmě $\mu_0 = 0$, ale v prázdném systému může dojít k narození, tedy $\lambda_0 \geq 0$. Veličiny λ_k a μ_k jsou pak v souladu s veličinami zavedenými v kapitole 3.4 *intenzitami pravděpodobností narození a úmrtí* v k -členné populaci.

Označme $p_k(t)$ pravděpodobnost, že populace je v okamžiku t k -členná ($k = 1, 2, \dots$). Zřejmě pro libovolný okamžik t platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1.$$

Naším cílem pak opět bude odvození vztahů pro $p_k(t)$, resp. limitních pravděpodobností p_k

$$p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t) \quad k = 1, 2, \dots,$$

tedy rozdělení pravděpodobností ve stacionárním stavu, pokud takový jev může nastat, příp. stanovení podmínek nutných pro existenci stacionárního stavu. Veličiny p_k lze tedy interpretovat jako pravděpodobnost, že v náhodně zvoleném okamžiku dostatečně vzdáleném od počátku procesu má uvažovaná populace k členů, resp. systém hromadné obsluhy je ve stavu k .

Sestavme na základě předchozích předpokladů o matici intenzit pravděpodobností přechodu pro uvažovanou populaci

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\lambda_0, & \lambda_0, & 0, & \dots, \\ \mu_1, & -\mu_1 - \lambda_1, & \lambda_1, & 0, & \dots, \\ 0 & \mu_2, & -\mu_2 - \lambda_2, & \lambda_2, & 0, & \dots, \\ \vdots & & & & & \\ 0, & \dots, & & & 0, & \mu_k, & -\mu_k - \lambda_k, & \lambda_k, & 0, & \dots \\ \vdots & & & & & & & & & \end{bmatrix}. \quad (4.8.1)$$

Soustava diferenčních rovnic pro rozdělení stacionárních pravděpodobností, kterou obdržíme z vektorové rovnice (3.4.4)

$$\mathbf{pA} = \mathbf{0}$$

má tvar

$$\begin{aligned} -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 &= 0 \\ \lambda_0 p_0 - (\mu_1 + \lambda_1) p_1 + \mu_2 p_2 &= 0 \\ \vdots & \\ \lambda_{k-1} p_{k-1} - (\mu_k + \lambda_k) p_k + \mu_{k+1} p_{k+1} &= 0 \\ \vdots & \end{aligned} \quad (4.8.2)$$

Soustavu (4.8.2) lze opět řešit postupným dosazováním

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1},$$

$$p_2 = \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_2} p_1 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} p_0 = \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} p_0 = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_0}{\mu_2 \cdot \mu_1} p_0,$$

$$p_3 = \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\mu_3} p_2 - \frac{\lambda_1}{\mu_3} p_1 = \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\mu_3} \cdot \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_0}{\mu_2 \cdot \mu_1} p_0 - \frac{\lambda_1}{\mu_3} \cdot \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 = \frac{\lambda_2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_0}{\mu_3 \cdot \mu_2 \cdot \mu_1} p_0$$

Lze očekávat (a matematickou indukcí rovněž dokázat), že obecný tvar pro systém ve stavu k bude

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1} \cdot \lambda_{k-2} \cdot \dots \cdot \lambda_0}{\mu_k \cdot \mu_{k-1} \cdot \dots \cdot \mu_1} p_0 = p_0 \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}. \quad (4.8.3)$$

Kromě rovnice (4.8.3) musí pro stacionární pravděpodobnosti p_k platit vztah

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1, \quad \text{tj.} \quad p_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) = 1, \quad (4.8.4)$$

tedy nutná a postačující podmínka existence stacionární situace je konvergence nekonečné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}.$$

Tato řada např. konverguje, jestliže existuje k_0 takové, že pro všechna $k > k_0$ je $\frac{\lambda_k}{\mu_k} < 1$.

Vztah (4.8.3) pro stacionární pravděpodobnosti procesu množení a úmrtí umožňuje snadno získat, známe-li parametry λ_k a μ_k , stacionární rozdělení pravděpodobností počtu požadavků pro řadu modelů hromadné obsluhy. Lze se o tom přesvědčit např. u dříve uvažovaného systému (M/M/1/∞/FIFO). Položíme-li

$$\lambda_k = \lambda \quad \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\mu_k = \mu \quad \text{pro } k = 1, 2, 3, \dots,$$

dostaneme dosazením do rovnice (4.8.3) přímo

$$p_k = p_0 \cdot \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k,$$

což odpovídá dříve odvozenému vztahu (4.7.5).

Především však najde uvedený model procesů množení a úmrtí uplatnění ve složitějších případech vícekanálových systémů hromadné obsluhy.

4.9. PARALELNĚ ŘAZENÉ EXPONENCIÁLNÍ KANÁLY (M/M/C/∞)

V jednoduchých systémech (v systémech s jedním kanálem) lze počet čekajících jednotek nebo jednotek, které se v důsledku obsazenosti systému nepřipojí, snížit *zvýšením intenzity obsluhy*. Intenzitu obsluhy však nelze u jednoho obslužného kanálu zvyšovat neomezeně. Je ale možné *zvýšit počet obslužných kanálů*, které pracují paralelně. Bude-li v systému jen jedna jednotka, resp. méně jednotek než je obslužných kanálů, zůstanou některé kanály nevyužity. Snižujeme tedy dobu čekání nebo riziko nepřipojení se k systému a riskujeme naopak nevyužití obslužného zařízení.

Uvažujme tedy systém hromadné obsluhy, v kterém intervaly mezi příchody mají exponenciální rozdělení s hustotou pravděpodobnosti

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{pro } t > 0,$$

nebo-li intenzita příchodů požadavků je λ . Obsluha je poskytována soustavou c paralelně uspořádaných kanálů, přitom doby obsluh na jednotlivých kanálech mají exponenciální rozdělení s hustotou pravděpodobnosti

$$b(t) = \mu e^{-\mu t} \quad \text{pro } t > 0,$$

která je shodná pro všechny linky. Kapacitu systému a tedy i fronty předpokládejme v tomto případě neomezenou.

Intenzita obsluhy je tedy μ pro každý obslužný kanál. Obsluhují-li dva kanály, činí jejich intenzita obsluhy celkem 2μ atd. Intenzitu obsluhy lze zvýšit nejvýše na $c\mu$. Fronta se začíná vytvářet až při vstupu $c + 1$ -té jednotky.

Takový systém je speciálním případem procesu množení a úmrtí. Intenzita vstupu do systému nezávisí na stavu systému, tedy

$$\lambda_n = \lambda \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, \dots$$

Naproti tomu intenzita obsluhy závisí stavu systému - závisí na počtu jednotek v systému. Je-li stav systému $n \leq c$, tj. počet požadavků je menší nebo roven počtu kanálů, potom pracuje pouze n kanálů. Je-li stav systému $n > c$, pracují všechny kanály. Tedy

$$\mu_n = n\mu \quad \text{pro } 1 \leq n \leq c,$$

$$\mu_n = c\mu \quad \text{pro } n > c.$$

Rozdělení stacionárních pravděpodobností dostaneme dosazením příslušných hodnot za λ_n a μ_n do rovnice (4.8.3) odvozené pro systémy množení a úmrtí. Tedy

$$p_n = p_0 \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} p_0 \quad \text{pro } 1 \leq n \leq c, \quad (4.9.1a)$$

$$p_n = \frac{\lambda^n}{c! c^{n-c} \mu^n} p_0 \quad \text{pro } n \geq c. \quad (4.9.1b)$$

Zbývá stanovit veličinu p_0 , kterou získáme opět s použitím rovnice $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$. V uvedeném

součtu budou dva typy výrazů, protože i p_n je vyjádřeno dvojím způsobem - viz rovnice (4.9.1a) a (4.9.1b)

$$p_0 \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\lambda^n}{c! c^{n-c} \mu^n} \right) = 1. \quad (4.9.2)$$

Zavedeme-li označení

$$r = \frac{\lambda}{\mu} \quad \text{a} \quad \rho = \frac{\lambda}{c\mu},$$

lze rovnici (4.9.2) přepsat do tvaru

$$p_0 \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{r^n}{c! c^{n-c}} \right) = 1. \quad (4.9.3)$$

První suma v závorce výrazu (4.9.3) má vždy konečnou hodnotu. Upravíme-li druhou sumu do tvaru

$$\sum_{n=c}^{\infty} \frac{r^n}{c! c^{n-c}} = \frac{r^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{r}{c} \right)^{n-c} = \frac{r^c}{c!} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{r}{c} \right)^i, \quad (4.9.4)$$

pak suma nabývá konečné hodnoty, právě když $\rho = \frac{r}{c} < 1$ a její hodnota je součet nekonečné geometrické řady

$$\frac{r^c}{c!} \frac{1}{1 - \frac{r}{c}} = \frac{r^c}{c!} \frac{1}{1 - \rho}.$$

Pro stacionární pravděpodobnost p_0 , že systém je prázdný, je pak

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{cr^c}{c!(c-r)}}. \quad (4.9.5)$$

Podmínkou pro existenci stacionární situace je tedy konvergence nekonečné řady (4.9.4), vyjádřená vztahem

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1.$$

Poznámka.

Pro $c = 1$ nabývají pravděpodobnosti vyjádřené rovnicemi (4.9.1a) a (4.9.1b) stejného tvaru, který je shodný se stacionárními pravděpodobnostmi systému (M/M/1/∞), vyjádřenými rovnicí (4.7.5).

Uvedme nyní *základní stacionární charakteristiky* systému (M/M/c/∞). Kromě průměrných počtů jednotek v systému a ve frontě, průměrné doby pobytu jednotky v systému a ve frontě, zavedeme další charakteristiku pro vícekanálové systémy - *průměrný počet obsazených kanálů*.

Pro průměrnou délku fronty platí

$$\bar{n}_f = \sum_{n=c}^{\infty} (n - c) p_n = \sum_{k=0}^{\infty} k p_{c+k},$$

kde

$$p_{c+k} = \frac{1}{c! c^k} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{c+k} p_0 = \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k p_c.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
 \bar{n}_f &= p_c \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\lambda}{c\mu} \right)^k = p_c \frac{\lambda}{c\mu} \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\lambda}{c\mu} \right)^{k-1} = p_c \frac{\lambda}{c\mu} \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{c\mu} \right)^2} = \\
 &= p_0 \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \frac{\lambda}{c\mu} \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{c\mu} \right)^2} = p_0 \frac{1}{(c-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \frac{\lambda\mu}{(c\mu - \lambda)^2}. \quad (4.9.6)
 \end{aligned}$$

Ostatní veličiny vypočteme opět s použitím Littleových vztahů

Průměrná doba čekání ve frontě je dána

$$\bar{T}_f = \frac{\bar{n}_f}{\lambda},$$

průměrná doba pobytu požadavku v systému je

$$\bar{T} = \bar{T}_f + \frac{1}{\mu}$$

a průměrný počet jednotek v systému je

$$\bar{n} = \lambda \bar{T}.$$

Průměrný počet obsazených kanálů lze vypočítat ze vztahu

$$\begin{aligned}
 \bar{c} &= \sum_{n=0}^c n p_n + \sum_{n=c+1}^{\infty} c p_n = \\
 &= p_0 \left[\sum_{n=1}^c n \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{n!} + \sum_{n=c+1}^{\infty} c \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{c!} \frac{1}{c^{n-c}} \right] = \\
 &= p_0 \frac{\lambda}{\mu} \left[\sum_{n=1}^c \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=c+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n-1} \frac{1}{(c-1)!} \frac{1}{c^{n-c}} \right] = \\
 &= p_0 \frac{\lambda}{\mu} \left[\sum_{n=0}^{c-1} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{n!} + \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{c!} \frac{1}{c^{n-c}} \right] = \frac{\lambda}{\mu}, \quad (4.9.7)
 \end{aligned}$$

neboť výraz v hranaté závorce je roven p_0^{-1} - viz rovnice (4.9.3).

Průměrný počet obsazených kanálů je tedy roven $r = \frac{\lambda}{\mu}$, což opodstatňuje zavedení

veličin r a ρ odlišně od případu jednoduchého exponenciálního kanálu. Zatímco velikost ρ je odpovědná za existenci stacionárních stavů a je označována jako intenzita provozu, velikost r představuje průměrný počet obsazených kanálů.

Průměrný počet neobsazených kanálů $\bar{c}'$ lze získat buď vyčíslením vztahu

$$\bar{c}' = \sum_{n=0}^c (c - n) p_n$$

nebo jednoduše ze vztahu

$$\bar{c}' = c - \bar{c} = c - \frac{\lambda}{\mu}. \quad (4.9.8)$$

Zajímavou veličinou pro systémy s paralelními kanály je pravděpodobnost, že požadavek bude čekat, tj. že v systému je c nebo více jednotek.

$$P(n \geq c) = \sum_{n=c}^{\infty} p_n = p_0 \frac{c^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c\mu} \right)^n = p_0 \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}}.$$

Příklad.

V laboratoři vyhodnocují přicházející požadavky 3 laborantky. V průměru přichází do laboratoře 15 požadavků za hodinu (intervaly mezi příchody zakázek jsou hodnoty exponenciálního rozdělení se střední hodnotou $1/15$ hod). Vyhodnocení jednoho požadavku trvá dobu, která je hodnotou exponenciálního rozdělení se střední hodnotou 10 minut.

Stanovme následující charakteristiky provozu laboratoře:

- pravděpodobnost, že všechny laborantky jsou vytíženy,
- průměrný počet zakázek čekajících na vyhodnocení,
- průměrnou dobu, která uplyne od předání zakázky do laboratoře do předání výsledků vyhodnocení zakázky.

Řešení.

Ze zadání příkladu lze stanovit parametry systému $M/M/c/\infty$, který je adekvátní popisované situaci:

$$\lambda = 15, \quad \mu = 6, \quad c = 3.$$

Nejprve je nutno ověřit, zda existuje stabilizované chování uvažovaného systému hromadné obsluhy. K tomu stačí, aby

$$\frac{\lambda}{c\mu} < 1,$$

což je v tomto případě splněno, neboť $\frac{15}{3 \cdot 6} < 1$.

a) Pravděpodobnost, že všechny 3 laborantky mají práci lze vyjádřit pravděpodobností, že stav systému (počet zakázek) je větší nebo roven 3, tj.

$$P(n \geq 3) = \sum_{k=3}^{\infty} p_k = 1 - p_0 - p_1 - p_2$$

Stanovme tedy hodnoty p_0 , p_1 a p_2 ze vztahů

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{cr^c}{c!(c-r)}},$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0,$$

$$p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0,$$

tj.

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{15}{6} + \left(\frac{15}{6}\right)^2 \frac{1}{2!} + \frac{3}{3!} \left(\frac{15}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{\left(3 - \frac{15}{6}\right)}} \doteq 0.0449,$$

$$p_1 = \frac{15}{6} p_0 = 0.1124,$$

$$p_2 = \left(\frac{15}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} p_0 = 0.1404.$$

Potom

$$P(n \geq 3) \doteq 0.7023.$$

b) Průměrný počet čekajících zakázek vypočteme ze vztahu

$$\bar{n}_f = p_0 \cdot \frac{1}{(c-1)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{\lambda\mu}{(c\mu - \lambda)^2},$$

tj.

$$\bar{n}_f = \frac{1}{2!} \left(\frac{15}{6}\right)^3 \frac{15 \cdot 6}{(3 \cdot 6 - 15)^2} = 3.5112.$$

c) Průměrnou dobu pobytu jedné zakázky v laboratoři vypočteme ze vztahu

$$\bar{T} = \frac{\bar{n}_f}{\lambda} + \frac{1}{\mu},$$

tj.

$$\bar{T} = \frac{3.5112}{15} + \frac{1}{6} = 0.4008 \text{ hod} = 24.04 \text{ min}.$$

4.9.1. Omezená kapacita systému (M/M/c/K)

Podobně jako v kapitole 4.7.4. provedme modifikaci předchozího modelu s tím, že maximálně přípustný počet požadavků v systému je K , tj. je-li systém ve stavu K , nemůže již přichodící požadavek do systému vstoupit. Ve frontě je tedy $K - c$ čekacích míst.

Pro tento případ systému hromadné obsluhy jsou parametry procesu množení a úmrtí následující:

$$\lambda_n = \lambda \quad \text{pro } 0 \leq n < K,$$

$$\lambda_n = 0 \quad \text{pro } n \geq K,$$

$$\mu_n = n\mu \quad \text{pro } 0 < n \leq c,$$

$$\mu_n = c\mu \quad \text{pro } n \geq c.$$

Rozdělení stacionárních pravděpodobností dostaneme dosazením příslušných hodnot za λ_n a μ_n do rovnice (4.8.3) odvozené pro systémy množení a úmrtí. Tedy

$$p_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0 \quad \text{pro } 0 \leq n \leq c,$$

$$p_n = \frac{1}{c! c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0 \quad \text{pro } c \leq n \leq K,$$

$$p_n = 0 \quad \text{pro } n > K.$$

Hodnotu p_0 určíme opět ze vztahu $\sum_{n=0}^K p_n = 1$, tedy

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \sum_{n=c}^K \frac{1}{c! c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n}.$$

Oba součty ve jmenovateli mají konečnou horní mez a jsou tedy konečné. To znamená, že v tomto případě existuje stacionární situace vždy.

Základní charakteristiky systému (M/M/c/K) lze odvodit naprosto stejným způsobem jako u systému (M/M/c/∞). Uvedeme pouze hodnotu průměrné délky fronty, z které lze ostatní charakteristiky snadno vypočítat.

$$\bar{n}_f = \sum_{n=c}^K (n-1)p_n = p_0 \frac{(c\rho)^c \rho}{c!(1-\rho)^2} [1 - \rho^{K-c-1} - (1-\rho)(K-c+1)\rho^{K-c}].$$

Průměrnou dobu čekání ve frontě lze použít Littleova vztahu

$$\bar{T}_f = \frac{\bar{n}_f}{\lambda'}$$

kde je třeba za průměrnou intenzitu vstupů λ' dosadit

$$\lambda' = \lambda(1 - p_K),$$

neboť s pravděpodobností p_K se příchozí požadavek nemůže k systému připojit. Další základní charakteristiky lze stanovit ze vztahu

$$\bar{T} = \bar{T}_f + \frac{1}{\mu}$$

pro průměrnou dobu pobytu požadavku v systému a

$$\bar{n} = \lambda' \bar{T}$$

pro průměrný počet požadavků v systému.

4.9.2. Systém bez čekacích míst (M/M/c/c)

Speciálním případem systému (M/M/c/K) je případ, kdy není žádné čekací místo ve frontě, takže požadavek, který přijde v okamžiku, kdy všechny kanály pracují, systém míjeji bez obsluhy. Systémy tohoto typu se vyskytují např. v telefonním provozu.

Pro tento případ systému hromadné obsluhy jsou parametry procesu množení a úmrtí následující:

$$\lambda_n = \lambda \quad \text{pro } 0 \leq n \leq c,$$

$$\lambda_n = 0 \quad \text{pro } n \geq c,$$

$$\mu_n = n\mu \quad \text{pro } 1 \leq n \leq c.$$

Rozdělení stacionárních pravděpodobností dostaneme dosazením příslušných hodnot za λ_n a μ_n do rovnice (4.8.3) odvozené pro systémy množení a úmrtí. Tedy

$$p_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0 \quad \text{pro } 0 \leq n \leq c,$$

$$p_n = 0 \quad \text{pro } n > c.$$

Hodnotu p_0 určíme opět ze vztahu $\sum_{n=0}^K p_n = 1$, tedy

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^c \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n}.$$

Důležitou charakteristikou tohoto systému je pravděpodobnost, že příchozí požadavek se k systému nepřipojí, což nastává v případě, kdy všechny kanály jsou obsazeny.

$$p_c = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c}{c! \sum_{n=0}^c \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n}.$$

Představuje-li např. takový systém hromadné obsluhy telefonní provoz, pak c je počet paralelních linek, doby obsazení linek jednotlivými hovory mají exponenciální rozdělení s parametrem μ , udává p_c podíl času, kdy se není možné dovolat, k celkové době.

4.10. SYSTÉMY S KONEČNÝM POČTEM PRVKŮ (CYKlickÉ SYSTÉMY)

Ve všech dosud uvedených modelech se předpokládalo, že zdroj požadavků je neomezený. V těchto případech pak nezávisí pravděpodobnost příchodu požadavku během určitého intervalu na počtu požadavků, které jsou v systému přítomny. Nyní se budeme zabývat takovými modely hromadné obsluhy, v kterých se vyskytuje *konečný počet prvků* s potenciálním nárokem na obsluhu. Předpokládáme tedy existenci určitého počtu požadavků, které jsou buď v systému (tj. ve frontě či v obsluze) nebo mimo systém. Typickou situací tohoto typu je například problém používání určitého počtu strojů, které při selhání vyžadují obsluhu spočívající v opravě. Po dokončení opravy se stávají potenciálními požadavky na další obsluhu.

Předpokládejme pro prvky, které nejsou v systému hromadné obsluhy (oprava nebo čekání na opravu), pravděpodobnost příchodu do systému během intervalu $(t, t+\Delta t)$ rovnou $\lambda \Delta t$. To odpovídá situaci, kdy doby pobytu prvků mimo systém hromadné obsluhy mají exponenciální rozdělení s parametrem λ . Je zřejmé, že *pravděpodobnost příchodu požadavku do systému závisí na tom, kolik je požadavků mimo systém*. Jsou-li např. všechny stroje v provozu (mimo systém), je za uvedených předpokladů pravděpodobnost selhání jednoho z nich během intervalu $(t, t+\Delta t)$ mnohem větší, než když jich je polovina v opravě. Jsou-li porouchány všechny stroje (v systému), nemůže k příchodu stroje do opravy dojít vůbec. Necht' celkem existuje R požadavků, pak intenzity λ_n , které popisují vstupní tok v závislosti na stavu systému, jsou dány vztahy

$$\lambda_n = \lambda(R - n) \quad \text{pro } 0 \leq n < R,$$

$$\lambda_n = 0 \quad \text{pro } n \geq R.$$

Doby obsluh necht' mají exponenciální rozdělení s parametrem μ . Dále budeme uvažovat dvě situace - k dispozici je jeden obslužný kanál (např. jeden opravář má na starosti R strojů), k dispozici je c paralelně řazených kanálů.

4.10.1. Jeden exponenciální kanál

Za předpokladu exponenciálního rozdělení dob pobytu jednotlivých požadavků mimo systém (parametr λ) a exponenciálního rozdělení dob obsluh (parametr μ) lze použít pro stanovení stacionárních pravděpodobností p_n výsledky teorie procesů množení a úmrtí s parametry:

$$\lambda_n = \lambda(R - n) \quad \text{pro } 0 \leq n < R,$$

$$\lambda_n = 0 \quad \text{pro } n \geq R,$$

$$\mu_n = \mu \quad \text{pro } n \geq 1.$$

Dosazením do vztahu (4.8.3) dostaneme

$$p_n = p_0 \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = p_0 \frac{R\lambda}{\mu} \cdot \frac{(R-1)\lambda}{\mu} \cdot \dots \cdot \frac{(R-n+1)\lambda}{\mu}$$

$$p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{R!}{(R-n)!} \quad \text{pro } 0 \leq n < R, \quad (4.10.1)$$

$$p_n = 0 \quad \text{pro } n > R.$$

Hodnotu p_0 určíme opět ze vztahu $\sum_{n=0}^R p_n = 1$, tedy

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^R \frac{R!}{(R-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n}. \quad (4.10.2)$$

Základní charakteristiky systému lze vypočítat na základě pravděpodobností p_n určených rovnicí (4.10.1) stejným způsobem jako v předchozích případech. Pouze je při použití Littleových vztahů nutné vzít v úvahu průměrnou intenzitu vstupu, kterou vypočteme dle rovnice

$$\lambda' = \sum_{n=0}^R (R-n)\lambda \cdot p_n = \sum_{n=0}^R R\lambda p_n - \sum_{n=0}^R n\lambda p_n = R\lambda \sum_{n=0}^R p_n - \lambda \sum_{n=0}^R np_n = R\lambda - \lambda \bar{n}$$

$$\lambda' = \lambda(R - \bar{n}). \quad (4.10.3)$$

Postup výpočtu základních charakteristik ($\bar{n}$, $\bar{n}_f$, $\bar{T}$ a $\bar{T}_f$) ilustruje následující příklad.

Příklad.

Skupinu 5 stejných strojů má na starosti jeden údržbář. Délky intervalů bezporuchového provozu každého stroje mají exponenciální rozdělení se střední hodnotou 1/2 směny, doby oprav každého stroje mají exponenciální rozdělení se střední hodnotou 1/20 směny. Úkolem je zjistit následující charakteristiky:

- využití údržbáře,
- průměrnou dobu, po kterou jsou stroje mimo provoz,
- pravděpodobnost, že počet vyřazených strojů bude větší nebo roven 2.

Řešení.

Ze zadání příkladu stanovíme parametry uvažovaného systému potřebné k výpočtům. Jednotku času je 1 směna:

$$\lambda = 2, \quad \mu = 20, \quad R = 5.$$

a) Využití údržbáře stanovíme např. jako pravděpodobnost, že v systému hromadné obsluhy není žádný požadavek. Pravděpodobnost lze interpretovat jako část směny, po kterou bude údržbář bez práce.

Pravděpodobnost p_0 určíme z rovnice $\sum_{n=0}^5 p_n = 1$, nejprve však musíme vyjádřit pravděpodobnosti p_1 až p_5 pomocí vztahu (4.10.1)

$$p_1 = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \frac{5!}{(5-1)!} = 5 \cdot 0.1 \cdot p_0 = 0.5 p_0,$$

$$p_2 = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 \frac{5!}{(5-2)!} = 20 \cdot 0.01 \cdot p_0 = 0.2 p_0,$$

$$p_3 = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^3 \frac{5!}{(5-3)!} = 60 \cdot 0.001 \cdot p_0 = 0.06 p_0,$$

$$p_4 = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^4 \frac{5!}{(5-4)!} = 120 \cdot 0.0001 \cdot p_0 = 0.012 p_0,$$

$$p_5 = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^5 \frac{5!}{(5-5)!} = 120 \cdot 0.00001 \cdot p_0 = 0.0012 p_0,$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + 0.5 + 0.2 + 0.06 + 0.012 + 0.0012} = 0.5640.$$

Pravděpodobnost, že všechny stroje jsou v provozu, je 0.564, tedy asi 56% směny bude údržbář bez práce.

b) Ke stanovení průměrné doby, kterou je každý ze strojů mimo provoz, nejprve vypočteme průměrný počet porouchaných strojů (tj. průměrný počet jednotek v systému) a použijeme vhodného Littleova vztahu.

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^5 np_n = 0.564(0.5 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.06 + 4 \cdot 0.012 + 5 \cdot 0.0012) = 0.638.$$

Pro využití Littleova vztahu je nutné stanovit průměrnou intenzitu vstupu použitím rovnice (4.10.3)

$$\lambda' = \lambda(R - \bar{n}) = 2(5 - 0.638) = 8.724.$$

Potom

$$\bar{T} = \frac{\bar{n}}{\lambda'} = 0.07 \text{ směny.}$$

c) Pravděpodobnost současného vyřazení 2 a více strojů je rovna součtu pravděpodobností p_1 až p_5 :

$$P(n \geq 2) = 0.564(0.2 + 0.06 + 0.012 + 0.0012) = 0.154.$$

Tedy asi v 15% směny lze pozorovat situaci, kdy alespoň dva stroje jsou mimo provoz.

4.10.2. Paralelně řazené exponenciální kanály

Modifikujme případ z předcházející kapitoly v tom smyslu, že pro obsluhu požadavků je k dispozici c paralelních kanálů, přitom doby obsluh na jednotlivých kanálech mají exponenciální rozdělení s parametrem μ , ostatní předpoklady zůstávají v platnosti.

Pro stanovení stacionárních pravděpodobností p_n na základě aplikace procesů množení a úmrtí máme následující parametry:

$$\lambda_n = \lambda(R - n) \quad \text{pro } 0 \leq n < R,$$

$$\lambda_n = 0 \quad \text{pro } n \geq R,$$

$$\mu_n = n\mu \quad \text{pro } 0 \leq n \leq c,$$

$$\mu_n = c\mu \quad \text{pro } n > c.$$

Dosazením do vztahu (4.8.3) dostaneme

$$p_n = \frac{1}{n!} \frac{R!}{(R-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0 \quad \text{pro } 0 \leq n \leq c,$$

$$p_n = \frac{1}{c! c^{n-c}} \frac{R!}{(R-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0 \quad \text{pro } c \leq n \leq R,$$

$$p_n = 0 \quad \text{pro } n > R.$$

Hodnotu p_0 a základní charakteristiky systému lze určit stejně jako v předchozím případě. V obou uvažovaných modelech (s konečným počtem požadavků) existují stacionární

pravděpodobnosti vždy, což je přímým důsledkem konečného počtu požadavků a nemůže tedy počet prvků v systému neomezeně vzrůstat.

4.11. OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHY V SYSTÉMECH HROMADNÉ OBSLUHY

Matematické modely lze rozdělit z hlediska typu dosažených výsledků, resp. podle způsobu použití výsledků, do dvou skupin, a to na modely

- deskriptivní,
- normativní.

Deskriptivní modely slouží k popisu určitých reálných situací, většinou je jejich cílem vysvětlit vztahy mezi prvky systému. Typickým příkladem deskriptivních modelů je většina ekonometrických modelů.

Normativní modely dávají přímo návrhy k rozhodování, jednání, neboť slouží k určení optimálních hodnot veličin, které odpovídají rozhodovacím proměnným modelovaných systémů.

Dosud probírané modely hromadné obsluhy měly převážně deskriptivní charakter. Stručně lze princip používaných postupů shrnout následovně: na základě parametrů systému (rozdělení dob mezi vstupy, dob obsluh, počet kanálů apod.), které byly považovány za konstanty, byly odvozeny hodnoty základních pracovních charakteristik systému (stacionární pravděpodobnosti počtu jednotek v systému, střední doba pobytu ve frontě apod.).

Pokud není ani jeden z parametrů systému "volný", tj. nelze-li v systému nic měnit, nemůže vzniknout žádný rozhodovací problém optimalizačního charakteru. Někdy však lze měnit např. doby obsluhy, počet obslužných linek nebo řád fronty, někdy lze dokonce i řídit vstupní tok požadavků.

Optimalizační úloha vyžaduje jednak vymezení *množiny přípustných řešení*, jednak stanovení *kriteriální funkce*, která kvantitativně popisuje sledovaný cíl. V systémech hromadné obsluhy jde většinou o stanovení rozumného kompromisního řešení mezi často protichůdnými požadavky optimalizace z hlediska obslužných linek a z hlediska obsluhovaných požadavků. Princip většiny postupů je následující: na množině charakteristik systému (čekací doby, využitost linek apod.) je definován funkcionál, který představuje nákladovou funkci. Úkolem je nalézt takové hodnoty volných parametrů systému, pro které nabude uvažovaný funkcionál extrému.

Dále bude uvedeno několik příkladů, které ilustrují některé postupy využitelné při optimalizaci a navrhování systémů hromadné obsluhy.

Použijme pojednání o *ocenění přechodů* uvedené v kapitole 3.3. Soustavě intenzit pravděpodobností přechodu byla přiřazena soustava ocenění těchto přechodů a odvozen vztah pro očekávané výnosy podmíněné určitou výchozí situací. Většinou lze stanovit čísla úměrná výnosům či nákladům, které vznikají při *setrvání v určitém stavu*, zatímco ocenění přechodů mezi jednotlivými stavy je mnohem obtížnější, ne-li často nemožné.

Předpokládejme, že ocenění přechodů nebude hlavní složkou ocenění, ale bude jí proces setrvání v určité situaci. "Celkovou hodnotu" procesu pak lze v souladu s rovnicí (3.3.3) (ve složkovém tvaru) vyjádřit

$$g = \sum_{i=0}^N p_i r_{ii}. \quad (4.11.1)$$

Tento výraz je pak funkcí pravděpodobností p_i , které lze vyjádřit pomocí intenzit vstupů λ a obsluh μ , a ocenění r_{ii} setrvání ve stavu i .

Jako první případ uvažujme nejjednodušší modelovou situaci jednoduchého exponenciálního kanálu. Pro stacionární pravděpodobnosti platí

$$p_n = (1 - \rho)\rho^n \quad \text{pro } \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1. \quad (4.11.2)$$

Setrvání v jednotlivých situacích nechť je spojeno s následujícími *náklady*, které reprezentují ohodnocení prostoje obslužného zařízení, ohodnocení probíhající obsluhy a ohodnocení pobytu požadavku v systému hromadné obsluhy:

c_0 - ohodnocení prostoje obslužné linky,

c_1 - ohodnocení probíhající obsluhy,

c_2 - ohodnocení pobytu požadavku v systému.

Koeficienty c_0 , c_1 , c_2 mohou představovat např. náklady vztažené na jednotku času. Chceme-li minimalizovat náklady spojené s činností systému v období Δt (ve stacionárním tvaru), vyjádříme nákladovou funkci ve tvaru

$$G = g\Delta t.$$

Je zřejmé, že pro minimalizaci nákladové funkce G stačí minimalizovat "okamžité" náklady g jako funkci ρ . Tedy

$$\begin{aligned} g(\rho) &= c_0 p_0 + (c_1 + c_2)p_1 + (c_1 + 2c_2)p_2 + \dots + (c_1 + nc_2)p_n, \\ g(\rho) &= c_0 p_0 + c_1 \sum_{n=1}^{\infty} p_n + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} np_n, \end{aligned} \quad (4.11.3)$$

a po úpravě s přihlédnutím k rovnostem

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 - p_0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} np_n = \bar{n} = \frac{\rho}{1 - \rho},$$

dostaneme

$$g(\rho) = c_0(1 - \rho) + c_1\rho + c_2 \frac{\rho}{1 - \rho}. \quad (4.11.4)$$

Pokud lze měnit hodnotu ρ (např. při pevném λ volbou μ), můžeme formulovat úlohu nalezení takového $\rho \in (0,1)$, pro které nabývá funkce (4.11.4) minima. Výraz pro optimální hodnotu ρ_0 dostaneme anulováním první derivace funkce v (4.11.4). Tedy z rovnice

$$\frac{dg(\rho)}{d\rho} = -c_0 + c_1 + \frac{c_2}{(1 - \rho)^2} = 0$$

vyjádříme

$$\rho_0 = 1 - \sqrt{\frac{c_2}{c_0 - c_1}}. \quad (4.11.5)$$

Protože pro $\rho \in (0,1)$ je druhá derivace kladná, jedná se skutečně o minimum dané funkce.

Jako další případ uvažujme soustavu paralelně řazených exponenciálních kanálů M/M/c.

Označíme-li

k_1 - ztráta (ve finančním vyjádření) způsobená čekáním jednoho požadavku na obsluhu po jednotkovou dobu,

k_2 - ztráta způsobená prostojem jednoho obslužného kanálu za jednotku času,

lze minimalizovat celkové ztráty nalezením minima funkce

$$g = k_1 \bar{T}_f + k_2 \bar{c}', \quad (4.11.6)$$

kde $\bar{T}_f$ je průměrný počet požadavků ve frontě a $\bar{c}'$ průměrný počet nevyužitých obslužných linek - viz např. (4.9.8).

Klademe-li si např. úkol stanovit "rozumný" počet obslužných linek, přicházejí v úvahu taková celá čísla c , pro něž je při známých hodnotách λ a μ splněna podmínka existence stacionárních stavů

$$\frac{\lambda}{c\mu} < 1,$$

- z těchto čísel pak vybereme takové, při kterém nabývá výraz (4.11.6) minima.

Oba uvedené případy je nutné přijmout jako první orientaci v daném problému, který je třeba dále zdokonalovat při zachycování údajů i vystižení některých dalších momentů.

5. Řízení zásob

5.1. ÚVOD

Moderní výroba se vyznačuje stále větší *hromadností*, rozsáhlou *dělbou práce* a úzkou *specializací*. To vede mimo jiné k zvyšujícím se nárokům na materiálně technické zásobování. Na jedné straně *nespojité charakter dodávek* surovin, materiálů apod., na druhé straně *kolísání spotřeby* těchto surovin, materiálů apod., vedou k účelnosti, resp. nezbytnosti vytvářet zásoby ve výrobních jednotkách. Zásoby jsou jakousi pojistkou proti problémům z případného nedostatku některých surovin, materiálů apod. ve společenských výrobních a spotřebních procesech. Jindy vznikají zásoby jako následek *zhromadňování výroby* - např. výrobce vyrobí během určitého období množství výrobků, které odpovídá spotřebě v mnohem delším období, aby dosáhl *ekonomicky výhodné velikosti výrobní dávky* (např. uplatněním progresivních technologií apod.). Zásoby mají význam i pro dokonalejší *uspokojování potřeb* spotřebitelů. Umožňují jim výběr potřebného druhu zboží z *velkého sortimentu*, zvyšují *stabilitu dostupnosti* oblíbeného druhu zboží na trhu apod.

Velké zásoby však mají i ekonomicky *negativní dopad*. Např. v sobě *vážou oběžné prostředky* a při dlouhé obrátce zásob jsou vyňaté z reprodukčního procesu, zpomalují jeho tempo, a tím i růst celé ekonomiky. Velké zásoby zvyšují *setrvačné hmoty* u uživatelů, vykazují jistý *protiinovační efekt* - uživatel chce nejdříve spotřebovat starý materiál, než se odhodlá užívat nový, i když vhodnější materiál. Samotná existence velkých zásob klade na uživatele vyšší nároky na udržování zásob - skladní prostory, ošetřování zásob, znehodnocování zásob s časem apod.

Z několika málo uvedených příkladů je zřejmé, že vliv zásob na efektivnost společenských výrobních procesů je velmi různorodý, z čehož vyplývá i složitost řízení stavu a pohybu zásob. Zjednodušeně lze říci, že *úkolem řízení zásob je zajistit všechny potřeby výroby nebo požadavky spotřeby s minimálními celkovými náklady*. Přitom mezi náklady zahrnujeme náklady na objednávání zásob, náklady z vázanosti oběžných prostředků v zásobách, náklady způsobené případným nedostatkem pohotové zásoby nebo naopak náklady způsobené nadbytečnými zásobami, náklady spojené se skladováním apod. K tomu ještě přistupuje skutečnost, že zásoby v podniku sestávají z velkého počtu položek - v praxi se seskupují jednotlivé položky dle různých účelových hledisek do skupin, které se pak řídí společně.

5.2. ZÁKLADNÍ POJMY TEORIE ZÁSOB

Praktická potřeba zrychlení obratu finančních prostředků v hmotných zásobách vyvolala vznik samostatné disciplíny operačního výzkumu - *teorie zásob*. I když se terminologie zásob i metodika konstrukce modelů zásob opírají stále o představy související s *hmotnými zásobami*, lze teorii zásob aplikovat i v jiných oblastech rozhodování, např. kapacit prostředků hromadné dopravy (*zásoba přepravních míst*), příprava specialistů (zásobu reprezentují specialisté), *výroba nových výrobních kapacit* ke krytí kolísající spotřeby některého druhu výrobku apod.

Definice. V rámci matematické teorie zásob rozumíme *zásobou* libovolný pohotový ekonomický zdroj, který se v daném časovém intervalu trvale plně nevyužívá, jeho velikost je však stanovena tak, aby zdroj z ekonomického hlediska umožňoval co nejvýhodnější krytí budoucí potřeby tohoto zdroje. Zdroj může být charakteru finančního, hmotného (materiálního), pracovních sil, výrobních kapacit apod.

Obsah řízení zásob. Řízení zásob zahrnuje jejich regulaci, prognózu, financování, evidenci a kontrolu. Přitom možnost regulace, která spočívá v ovlivňování buď vytváření a doplňování zásob nebo naopak jejich čerpání, je nutnou podmínkou řízení a optimalizace zásob.

Příčiny vzniku zásob. Vznik a existence jednotlivých druhů zásob má různé příčiny, z hlediska řídicího subjektu jak objektivní tak subjektivní, z nichž nejpodstatnější jsou:

- a) nutnost zabezpečit nepřetržitý výrobní proces, obecně plynulé fungování jakéhokoliv systému,
- b) časový a prostorový (místní) nesoulad mezi výrobou na jedné straně a poptávkou resp. potřebou na straně druhé,
- c) periodičnost výrobního cyklu (výhodnější technologie výroby větší dávky x plynulá spotřeba, větší sortiment),
- d) důsledek zvláštností přepravy od výrobce ke spotřebiteli - s výjimkou elektřiny a potrubní dopravy neprobíhá žádná doprava spojitě,
- e) jiný rytmus výroby a rytmus spotřeby (např. potravinové suroviny rostou jen v určitém období, sklízí se převážně v létě, ale potraviny se konzumují celý rok).

Předchozí tři body c) - e) lze společně charakterizovat jako technologická nebo technicko-organizační omezení.

- f) snížení rizika neuspokojení poptávky nebo výpadku produkce z titulu působení náhodných vlivů, příp. nenadálého vývoje ve výrobě, dovozu, poptávce nebo potřebě,
- g) ekonomické důvody - např. při nákupu většího množství výrobků nebo zboží lze získat slevu v ceně, nebo lze lépe využít dopravní prostředky a tím snížit dopravní náklady,
- h) vytváření a hromadění zásob pro spekulaci s očekávaným zvýšením cen materiálů, výrobků nebo zboží (ryze subjektivní příčina).

Druhy zásob. Z funkčního hlediska se zpravidla rozlišují následující druhy zásob:

- a) běžná nebo obratová zásoba,
- b) pojistná zásoba,
- c) sezónní zásoba,
- d) zásoba na cestě,
- e) technologická zásoba,

Běžná nebo obratová zásoba slouží ke krytí poptávky nebo potřeby za normálních, příp. průměrných výrobních či tržních podmínek. Při periodickém výrobním cyklu a doplňování zásob uspokojuje očekávanou potřebu v průběhu jednoho dodávkového cyklu. Vzniká v reprodukčním cyklu nezávisle (objektivně) - je podmíněna časovým a místním nesouladem mezi výrobou a potřebou a nesouladem v intenzitě výroby a potřeby.

Pojistná zásoba umožňuje čelit působení faktoru nejistoty a náhodnosti, který se projevuje odchylkami od průměru. Jak na straně poptávky či potřeby, tak na straně výroby či nabídky. V podstatě představuje rezervu, která snižuje pravděpodobnost vyčerpání zásoby na minimum.

Sezónní zásoba má stabilizační funkci a vytváří se z důvodů překlenutí časového nesouladu mezi intenzitou výroby a poptávkou.

Technologická zásoba vzniká např. tehdy, když proces výroby byl již ze strany výrobce ukončen (všechny operace jsou ukončeny), ale výrobek ještě není schopen plnit své ekonomické poslání, tj. uspokojovat příslušnou potřebu.

5.3. MODELÝ ŘÍZENÍ ZÁSOB

Nástrojem umožňujícím resp. usnadňujícím stanovení strategie řízení zásob, která je dle zvoleného kritéria fungování konkrétního systému nejlepší, je *optimalizační model*. Přitom nelze na jednotlivé modely pohlížet jako na univerzální modely zásob, které stačí v praxi pouze zavést. Je nutné na modely uváděné v tomto textu i podrobnější literatuře pohlížet jako na metodologické přístupy k řešení problematiky zásob a z nich konstruovat v praxi konkrétní modely zásob pro dané podmínky.

Podstata modelových přístupů k řízení zásob spočívá v existenci bipolární nákladové struktury problémů zásob. jedním nákladovým pólem je skupina nákladů rostoucích se zvětšováním objemu udržovaných zásob (např. náklady vázanosti oběžných prostředků v zásobách, náklady manipulace se zásobami, znehodnocování zásob apod.). Druhý pól tvoří skupina nákladů klesajících se zvětšováním objemu udržovaných zásob (např. náklady na objednání zásob, ztráty vznikající při nedostatku zásob apod.). Optimalizací velikosti zásob pak rozumíme stanovení takové úrovně zásob jednotlivých položek, při které celkové náklady na tvorbu, udržování a doplňování zásob, včetně ztrát z nedostatku zásob, jsou z dlouhodobého pohledu minimální. Na základě minimalizace nákladové kritériální funkce lze stanovit konkrétní strategii řízení zásob, tj. dát odpověď na otázky, kdy (jak často) a v jaké výši vytvářet nebo doplňovat zásoby.

Kritérium a řídicí a autonomní proměnné. Při řízení zásob je nutné dopředu stanovit kritéria, pomocí kterých se určují objemy jednotlivých druhů zásob v závislosti na známé resp. odhadované velikosti poptávky nebo potřeby. Každé kritérium musí obsahovat alespoň jednu proměnnou, kterou může řídicí subjekt ovlivňovat a která slouží jako nástroj řízení (*řídicí proměnná*). Proměnné, jejichž úroveň nemůže řídicí subjekt ovlivňovat, mají charakter *autonomních veličin*.

Na zvoleném rozhodovacím kritériu závisí povaha modelu optimalizace řízení zásob. Z tohoto hlediska rozlišujeme následující druhy optimalizačních modelů zásob:

- a) nákladově orientované,
- b) bez nákladové orientace,
- c) smíšené.

Cílem optimalizace *nákladově orientovaných modelů zásob* je nalezení takové strategie řízení zásob, která zaručuje obvykle uspokojení poptávky resp. potřeby při minimalizaci funkce celkových skutečných resp. očekávaných zásobovacích nákladů v určitém časovém intervalu. Nákladová funkce se vyjadřuje jako součet dvou typů dílčích nákladových funkcí, jedna je v závislosti na průměrném objemu zásob rostoucí, druhá klesající.

Nákladové hledisko při optimalizaci zásob převažuje, ale nemusí být jediné. Omezujícím prvkem při praktických aplikacích je obtížnost vyčíslení jednotlivých složek nákladů, které vznikají při vytváření, doplňování a udržování zásob, příp. i při jejich nedostatku. Vzhledem k tomu, že jednotlivé nákladové složky nelze zpravidla získat přímo z evidence, vyžadují nákladově orientované modely podrobnou analýzu jednotlivých druhů nákladů.

Jestliže nákladová funkce není předmětem optimalizace nebo není explicitně formulována, jedná se o *modely zásob bez nákladové orientace*. Kritérium optimality může pak být např. dosažení minimální výše finančních prostředků vázaných v zásobách, maximum rychlosti obratu zásob při daných omezeních resp. požadavcích nebo dosažení minimálního rizika vyčerpání zásob, tj. maximální zajištění poptávky resp. potřeby. I když v těchto případech nevystupují náklady přímo v kritériální funkci, je vlastně cílem optimalizace dosáhnout maximální efektivnosti oběžných prostředků a tím nepřímo i snížení nákladů souvisejících se zásobami.

O *modely zásob smíšeného typu* se jedná tehdy, hledáme-li optimální výši běžné zásoby na základě minimalizace funkce celkových očekávaných nákladů zásob, zatímco pojistnou

zásoba určíme bez explicitního zahrnutí nákladové funkce nebo zcela bez respektování principu optimalizace (na základě autonomně stanoveného pojistného činitele).

Řídící proměnné. Jsou to proměnné, které jsou nezávislé na ostatních nebo ve vzájemné vazbě měnitelné a slouží jako nástroj pro řízení zásob a dávají odpověď na otázky typu "v jaké výši" a "kdy (jak často)" vytvářet nebo doplňovat zásobu. Jsou to:

1. *Objem zdrojů* požadovaných k vytvoření nebo doplnění zásob. Zásoby jednotlivých zdrojů se vytvářejí a doplňují nejčastěji v dávkách stejné ale i proměnlivé velikosti. Pokud je objem zdroje náhodnou veličinou, nelze způsob doplňování plně regulovat. V takovém případě se objem požadovaného zdroje vyjadřuje pravděpodobnostně.
2. *Frekvence nebo termín* vyžádání zdrojů. Zásoby se vytvářejí buď jednorázově nebo se doplňují periodicky. Periodické resp. cyklické doplňování zásob může probíhat ve stejných ale i různě dlouhých časových intervalech anebo v určitých předem stanovených termínech. I frekvence příp. termíny doplňování zásob mohou mít pravděpodobnostní charakter, tzn. že mohou být ne plně regulovatelné.

V praxi se vyskytují případy, kdy lze regulovat plně či částečně oba druhy řídicích proměnných nebo pouze jednu z nich. Rozhodnutí, jakým způsobem se řídicí proměnné regulují, závisí na použité strategii řízení zásob.

Neřiditelné proměnné. Jsou to proměnné, které mají z hlediska modelu řízení zásob povahu vstupních dat, a patří mezi ně:

1. *Náklady* spojené s určitou úrovní zásob. Mohou mít povahu jednotkových nebo celkových nákladů. Zpravidla je rozdělujeme na proměnlivé (závislé) a pevné (nezávislé) v závislosti na výši zásob. Z věcného hlediska je při řízení zásob účelné rozlišovat následující typy nákladů:
 - a) *Pořizovací náklady* zásob, představované jednotkovými výrobními náklady nebo jednotkovou cenou (v případě dodavatelského pořizování zásob). Mohou být jak pevné tak proměnlivé (např. v případě množstevní slevy apod.).
 - b) *Objednací náklady*, např. fixní administrativní náklady spojené s objednáním zásoby, vyřízením objednávky, náklady na přejímku a kontrolu, příp. na reklamaci. Patří sem i náklady na provoz systému řízení zásob, např. náklady na evidenci, inventury, vypracování prognóz poptávky nebo spotřeby. Variabilní částí objednacích nákladů mohou být např. dopravní náklady.
 - c) *Skladovací náklady*, jejichž výše je většinou proměnlivá v závislosti na úrovni zásob. Základní složky těchto nákladů jsou úrok z oběžných prostředků vázaných v zásobách, materiální a mzdové náklady spojené s udržováním zásob (pokud jsou závislé na jejich výši), ztráty v důsledku přirozeného úbytku a zastarávání zásob, manka a škody apod.
 - d) *Náklady (resp. ztráty) vznikající z nedostatku zásob*, tj. není-li poptávka nebo potřeba pokryta zásobou, nebo je-li uspokojena opožděně, příp. v neodpovídající struktuře a kvalitě. Zjišťování a odhadování výše těchto nákladů resp. ztrát je zpravidla velice obtížné. Nepřímo je lze přibližně vyčíslit např. výší zisku ušlého v důsledku trvale neuspokojené poptávky nebo potřeby. Do těchto nákladů se zahrnují i pokuty a penále spojené s nespokojením poptávky.

V konkrétním modelu řízení zásob se obvykle neberou v úvahu všechny uvedené čtyři druhy nákladů z důvodů např. zanedbatelné váhy některé složky nákladů v nákladové funkci nebo přílišné komplikovanosti.

2. *Velikost poptávky nebo potřeby* v určitém časovém intervalu. Charakter poptávky nebo potřeby může být popsán absolutně (*deterministický případ*) nebo jen pravděpodobnostně (*stochastický případ*). Jsou-li poptávka nebo potřeba deterministického typu nezávislá na čase (konstantní v čase), jedná se o úlohu *statickou*. Mění-li se přesně známým nebo i jen odhadovaným způsobem, hovoříme o *dynamických úlohách* řízení zásob. Jestliže poptávka

nebo potřeba pravděpodobnostního charakteru je v čase neměnná (funkce hustoty pravděpodobnosti je konstantní), jde o úlohu *stacionární*, v opačném případě o *nestacionární*. Zvláštním případem nestacionární poptávky či potřeby jsou poptávka či potřeba *sezónního charakteru*.

3. *Pořizovací lhůta* zásob resp. *předstih objednávky*, tj. doba, která uplyne od okamžiku rozhodnutí o doplnění zásob v systému až k převzetí požadovaného zdroje na sklad. Skládá se zpravidla z doby potřebné k vystavení a doručení objednávky dodavateli, z doby výroby nebo vyskladnění, z doby dopravy a doby převzetí na sklad.

Kromě pořizovací lhůty je účelné rozlišovat *dodávkový* a *objednávkový cyklus*, který je představován časovými intervaly mezi dvěma dodávkami resp. objednávkami.

Obecná formulace optimalizační úlohy

Předpoklady vzniku úlohy. Problém hledání optimální výše zásob, resp. problém hledání strategie jejího doplňování a udržování na optimální výši může vzniknout pouze v následujících podmínkách:

- existuje určitý zdroj, který je schopen aspoň dočasně vytvářet přebytky nad stávající potřebou,
- existuje možnost vznikající přebytky aspoň omezenou dobu hromadit a uchovávat (vytvářet zásobu),
- udržování zásoby je spojeno s určitými náklady,
- neuspokojení potřeby z pohotovosti zásoby je spojeno s určitými náklady (vyběhnutí ze zásob),
- doplňování zásoby je spojeno s určitými fixními náklady, které jsou nezávislé na velikosti doplňované dávky.

Z uvedených předpokladů vzniku problému optimální zásoby lze vyvodit následující závěry:

- u dlouhodobě nedostatkových druhů neexistuje problém optimální zásoby, protože zdroj není schopen vytvářet dočasné přebytky a potřeba převyšující kapacitu zdroje ihned pohltí veškeré jeho výstupy,
- rovněž tak v případě, kdy není kde resp. jak skladovat, problém neexistuje, resp. úloha nemá řešení,
- vznikají-li náklady pouze při nedostatku zásob (výběhu ze zásob) a nikoliv v případě doplňování a udržování zásob, je problém jednoznačně vyřešen, protože optimální je maximální zásoba,
- také v případě, kdy vznikají náklady jen při nedostatku a doplňování zásob a ne při udržování, je optimální zásoba maximální zásoba,
- vznikají-li naopak náklady pouze při udržování zásoby a nikoliv při doplňování a nedostatku, pak optimální zásoba je žádná zásoba,
- nejde-li o žádný z uvedených mezních případů, pak optimální zásoba leží mezi oběma extrémy a je charakterizována tím, že minimalizuje souhrnnou újmu (náklady) hospodářského subjektu.

5.4. KLASIFIKACE MODELŮ ŘÍZENÍ ZÁSOB

Existuje několik kritérií, podle kterých lze klasifikovat optimalizační modely řízení zásob. V závislosti na charakteru zkoumaných systémů se proto používají různá třídící hlediska nebo jejich odlišná hierarchie. Nejčastěji používaná kritéria pro klasifikaci nákladově orientovaných modelů jsou:

1. *Použité metody řešení*

- klasická matematická analýza (hledání volného příp. vázaného extrému nákladové kritériální funkce)
- modely hromadné obsluhy,
- modely a metody matematického programování,
- simulační postupy a techniky.

2. *Charakter poptávky nebo potřeby a pořizovací lhůty zásob*

- deterministický model,
 - statický,
 - dynamický,
- stochastický model,
 - stacionární,
 - nestacionární.

3. *Režim doplňování zásob*

- modely jednorázových zásob,
- modely periodicky doplňovaných zásob,
 - s pevným režimem objednávkových cyklů (systémy s periodickou kontrolou),
 - s volným režimem objednávkových cyklů (systémy s průběžnou kontrolou, signální hladina).

Kromě uvedených hledisek lze klasifikovat optimalizační modely zásob podle dalších kritérií, která se mohou i různě kombinovat. Např. počet druhů skladovaných zdrojů, analytické formy použitých nákladových funkcí, formy zahrnování nákladů resp. ztrát z neuspokojené poptávky nebo potřeby do nákladové funkce, počet článků pohybu zásob, způsob čerpání zásob, povaha ceny zásob a další.

V následujícím budou podrobněji zmíněny základní typy optimalizačních modelů zásob, které lze aplikovat v ekonomické praxi, tj. deterministické a stochastické modely, založené na hledání volných příp. vázaných extrémů nákladové funkce metodami matematické analýzy.

5.5. MODEL Y DETERMINISTICKÉ

Jsou to nejjednodušší úlohy, které nemají často přímé uplatnění v praxi, ale používají se zpravidla jako aproximativní nebo výchozí zjednodušená řešení složitějších úloh pravděpodobnostních. Základním předpokladem pro použití deterministických modelů je posouzení poptávky nebo potřeby příp. pořizovací lhůty jako konstantní, resp. jejich kolísání není velké a lze je aproximovat středními hodnotami jako deterministické proměnné.

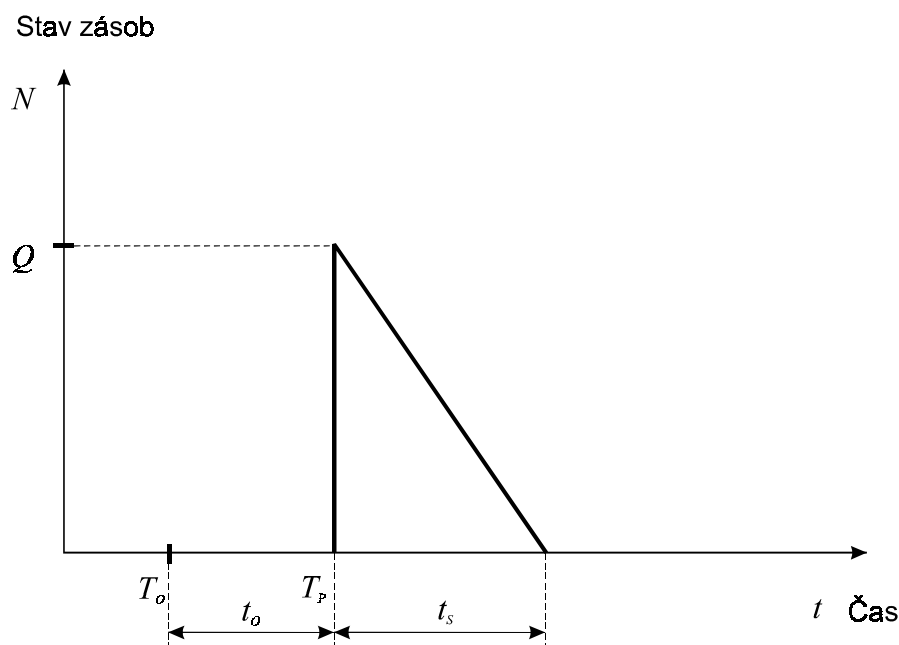
Deterministické modely jsou i z hlediska historického prvními pokusy o optimalizaci řízení zásob. Jejich omezení z hlediska praxe spočívá v tom, že předpokládá úplnou

informovanost řídicího subjektu o stavu zásob, výši poptávky či potřeby, kterou v reálných systémech nelze vždy dobře splnit.

5.5.1. Jednoduchý model s jednorázovým doplněním

Vychází z předpokladu, že poptávka či potřeba je spojitá, v čase konstantní, tzn., že čerpání zásob probíhá rovnoměrně a lze ho znázornit lineární funkcí. Požadovaný zdroj přijde na sklad pravidelně a v libovolné (neomezené) výši. Převzetím dodávky na sklad vzroste zásoba zdroje na maximální výši a postupně klesá na nulu. Časový předstih objednávky je rovněž přesně znám.

Vzhledem k tomu, že jde o jednorázové doplnění zásob, není co optimalizovat, ale pouze jest ke stanovení termínu objednávky a velikosti objednávky. Typický příklad časového průběhu stavu zásob ukazuje obr. 5.1.



Obr. 5.1. Časový průběh stavu zásob modelu s jednorázovým doplněním

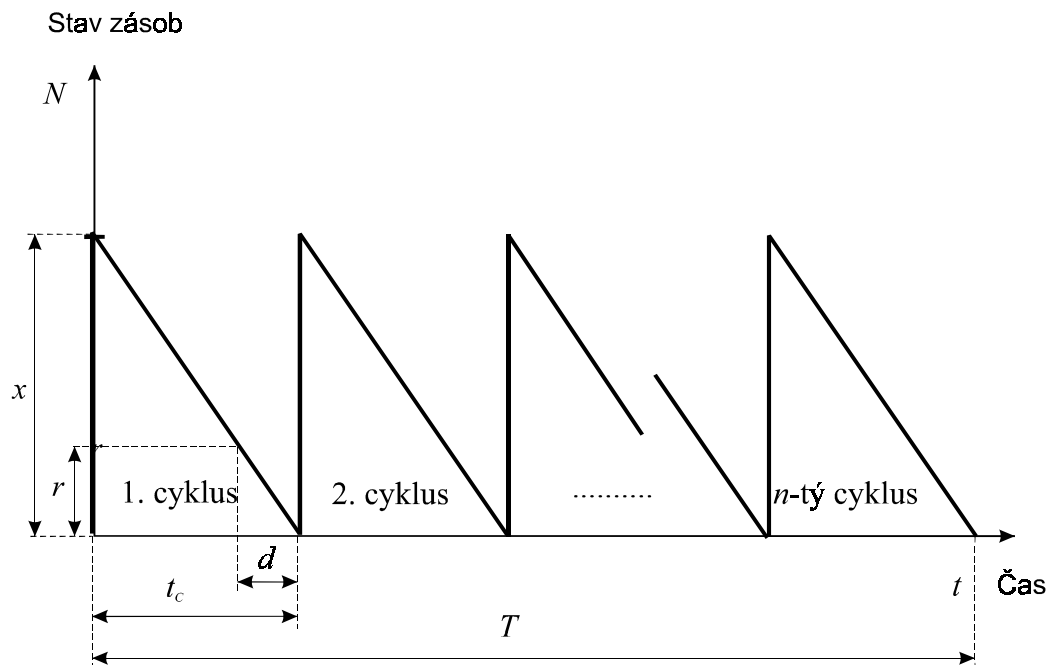
Legenda k obr. 5.1:

- Q velikost objednávky
- T_o termín objednávky
- t_o časový předstih objednávky
- T_p termín pohotovosti zásob
- t_s doba spotřeby

Model slouží spíše k uvedení základních veličin než k řešení, jeví se jako primitivní, ne však již jeho stochastická alternativa.

5.5.2. Jednoduchý dynamický model s pevnou velikostí doplňování

Model vychází ze stejných předpokladů jako případ statický s tím rozdílem, že doplňování zásob je periodické, tj. v dodávkách stejné velikosti a vždy ve stejných časových intervalech, právě když zásoba klesne na nulu. Časový průběh skladových zásob ukazuje obr. 5.2.



Obr. 5.2. Časový průběh stavu zásob modelu s periodickým doplňováním

Pomocí modelu chceme určit ekonomickou resp. optimální velikost dodávky, pro kterou dosáhne funkce celkových nákladů spojených se zásobami minima. Pokud je známá (konstantní) a není zanedbatelná pořizovací lhůta zásob, pak chceme také stanovit optimální bod objednávky. Případ s možností neuspokojení poptávky nebo potřeby neuvažujeme. V kritériální nákladové funkci uvažujeme pouze náklady na skladování a objednávání zásob. Úloha je označována jako Wilsonův-Harrisův model zásob.

Označíme-li:

- Q celkovou poptávku nebo spotřebu zdroje za období T ,
- x pevná velikost dodávky (objednávky),
- c_1 náklady skladování jednotky zásob za jednotku času,
- c_2 fixní náklady objednání jedné dodávky,

pak

$$\bar{x} = \frac{x}{2} \quad \text{je průměrná výše zásob,}$$

$$n = \frac{Q}{x} \quad \text{počet objednávek za období } T.$$

Vzhledem k tomu, že budeme chtít stanovit takovou velikost dodávky x_0 , aby součet celkových nákladů všech objednávek a skladování zásob během období T byl minimální, musíme vyjádřit tyto celkové náklady N jako funkci velikosti dodávky x .

Celkové náklady na skladování $N_1(x)$ během období T jsou

$$N_1(x) = \frac{Tc_1}{2}x \quad (5.5.1)$$

a celkové náklady na všechny objednávky $N_2(x)$ během období T jsou

$$N_2(x) = c_2n = \frac{c_2Q}{x}. \quad (5.5.2)$$

Tedy součet celkových nákladů všech objednávek a skladování zásob $N(x)$ během období T je

$$N(x) = N_1(x) + N_2(x) = \frac{Tc_1}{2}x + \frac{c_2Q}{x}. \quad (5.5.3)$$

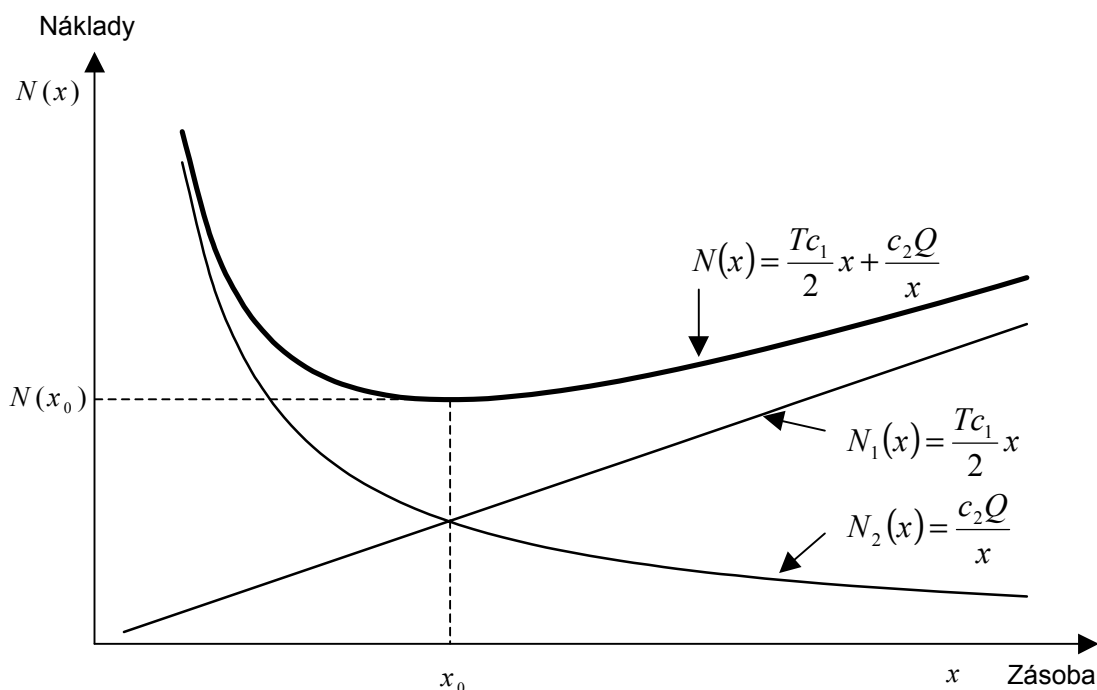
Průběh funkcí $N_1(x)$, $N_2(x)$ a $N(x)$ ukazuje obr. 5.3. Optimální velikostí dodávky je takové x_0 , pro které hodnota nákladové funkce (5.5.3) je minimální. Položíme-li první derivaci funkce (5.5.3) podle x rovnu nule

$$\frac{d}{dx} N(x) = \frac{Tc_1}{2} - \frac{c_2Q}{x^2} = 0$$

dostaneme pro optimální velikost dodávky vztah

$$x_0 = \sqrt{\frac{2Qc_2}{Tc_1}}. \quad (5.5.4)$$

(Snadno se lze přesvědčit, že druhá derivace funkce $N(x)$ v bodě x_0 je kladná a funkce má tedy v tomto bodě své minimum).



Obr. 5.3. Závislost nákladů na velikosti objednávky

Minimální celkové náklady $N(x_0)$ odpovídající optimální hodnotě x_0 pak jsou

$$N(x_0) = \frac{Tc_1}{2}x_0 + \frac{c_2Q}{x_0} = \sqrt{2QTc_1c_2} \quad (5.5.5)$$

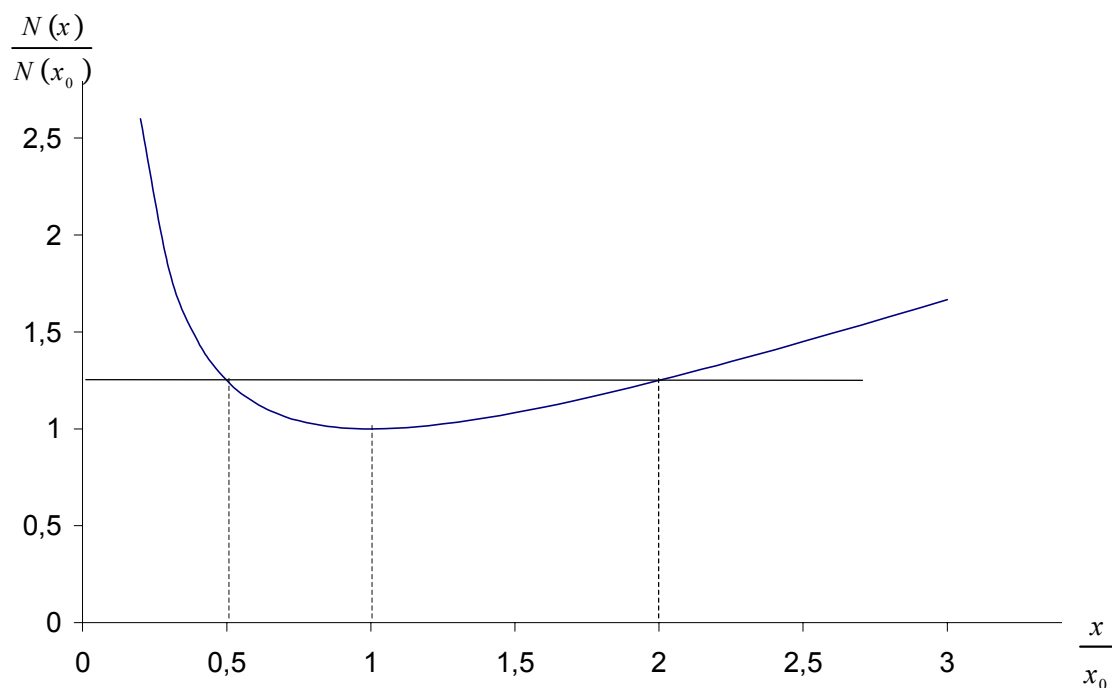
a optimální délka objednávacího resp. dodávkového cyklu t_0 příslušející optimální velikosti dodávky x_0 je

$$t_0 = \frac{T}{n} = \frac{Tx_0}{Q} = \sqrt{\frac{2Tc_2}{Qc_1}}. \quad (5.5.6)$$

Pokud pořizovací lhůta zásob není zanedbatelná a je známá a konstantní, je třeba vystavit objednávku v časovém předstihu, aby dodávka přišla do skladu včas, tj. v okamžiku, kdy zásoba klesne na nulu. Necht' d je předstih objednávky (viz obr. 5.2) a m počet objednávek, které jsou v okamžiku vystavení objednávky na cestě (m se vypočte jako největší celé číslo menší nebo rovno podílu d/t_0), pak pro optimální signální úroveň zásob r_0 (nazývá se bod objednávky) platí

$$r_0 = \frac{Q}{T}d - mx_0 = M - mx_0. \quad (5.5.7)$$

Výraz $M = Qd/T$ se označuje jako tzv. předstih poptávky nebo spotřeby a vyjadřuje úbytek zásob od okamžiku zadání objednávky do převzetí dodávky a mq_0 je celkové množství objednaného zdroje na cestě.



Obr. 5.4 Citlivost funkce $N(x)$ v okolí optimální hodnoty x_0

Povšimněme si citlivosti funkce $N(x)$ v okolí optimální hodnoty x_0 . Obecně je lépe tuto citlivost zkoumat na poměru $N(x)/N(x_0)$ jako funkci x/x_0 . Použitím rovnic (5.5.3), (5.5.4) a (5.5.5) dostaneme

$$\frac{N(x)}{N(x_0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_0}{x} + \frac{x}{x_0} \right).$$

Poměr $N(x)/N(x_0)$ tedy nezávisí na nákladech c_1 , c_2 ani na veličinách Q a T . Je patrné z grafu na obr. 5.4, že překročení optimální velikosti objednávky o určité procento vede k nižším nákladům než nedsažení optimální velikosti objednávky o totéž procento. Např. o 50% nižší objednávka než objednávka optimální vede k vyšším nákladům o 25%. Ke stejnému zvýšení nákladů vede proti tomu teprve překročení optimální velikosti objednávky o 100%.

Příklad

Výrobní podnik spotřebuje ročně 8 000 kusů určitého náhradního dílu, přičemž spotřeba je po celý rok rovnoměrná. Určeme ekonomickou (optimální) výši objednávky x_0 , odpovídající objednávkový cyklus t_0 a bod objednávky r_0 , jestliže fixní náklady na jednu objednávku libovolné velikosti činí 900 Kč, náklady na skladování jednoho náhradního dílu jsou 90 Kč ročně a předstih objednávky 2 týdny.

Řešení

Pro výpočet optimální výše objednávky použijeme vztah (5.5.4), kde $Q = 8\,000$ kusů, $c_2 = 900$ Kč, $T = 1$ rok, $c_1 = 90$ Kč za kus na rok.

Tedy

$$x_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 8000 \cdot 900}{1 \cdot 90}} = 400 \text{ kusů.}$$

Pro výpočet optimálního dodávkového cyklu můžeme použít vztahu (5.5.6)

$$t_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot 900}{8000 \cdot 90}} = \frac{1}{20} \text{ roku} = 18,25 \text{ dní,}$$

tj. celkovou roční poptávku lze pokrýt 20 dodávkami po 400 kusech náhradního dílu v objednávkovém cyklu 18 dní.

Optimální bod objednávky je podle (5.5.7)

$$r_0 = \frac{8000}{1} \cdot \frac{1}{26} - 0 \cdot 400 = 307,7 \text{ kusů,}$$

tj. klesne-li zásoba na 308 kusů, objedná se 400 kusů náhradních dílů.

Minimální celkové náklady zásob dosáhnou při této optimální strategii řízení zásob v souladu se vztahem (5.5.5)

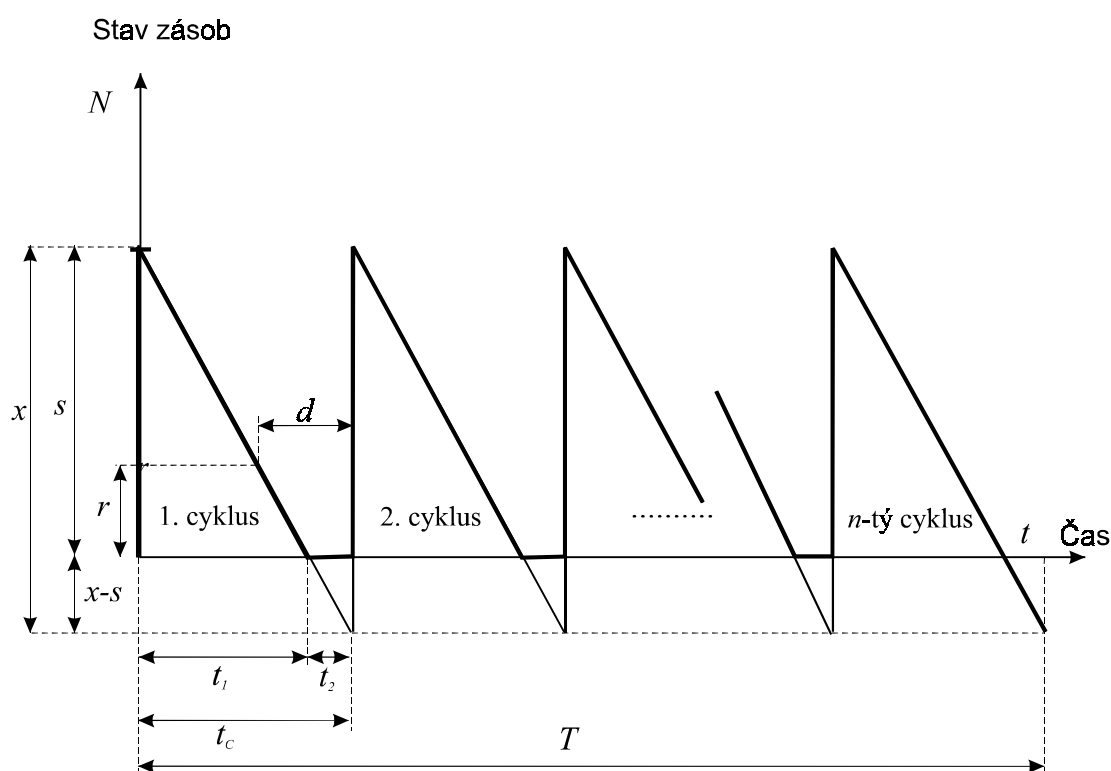
$$N_0 = \sqrt{2 \cdot 8000 \cdot 1 \cdot 90 \cdot 900} = 36\,000 \text{ Kč.}$$

5.5.3. Přechodný nedostatek zásob

Dosud jsme předpokládali, že poptávka nebo spotřeba jsou vždy plně a včas uspokojeny ze zásob. Nyní se zabýváme obecnějším případem, kdy připustíme okamžitý nedostatek pohotových zásob. Celá poptávka musí být i v tomto případě uspokojena, ale dojde-li k poptávce v okamžiku nedostatku zásob, musí být její uspokojení odloženo až do doby doplnění zásob.

Smysl má však uvažovat o případě nedostatku pohotové zásoby jen tehdy, jsou-li s takovou situací spojeny určité náklady (např. evidence neuspokojených požadavků, dodatečná expedice, ale také ztráty zákazníků, trhů apod.), které jsou obvykle přímo úměrné délce zpoždění v pokrytí poptávky. Některé z těchto nákladů bývá v praxi velmi těžké vyčíslit.

Uvažujme tedy situaci, kdy vedle již známých nákladů c_1 na skladování jednotkové zásoby za jednotku času a c_2 fixních nákladů jedné objednávky přistupují náklady c_3 , které vznikají při přechodném neuspokojení jednoho požadavku za jednotku času. Je-li maximální výše čisté zásoby na skladě s , pak během intervalu t_1 každého dodávkového cyklu délky t_c jsou poptávka nebo potřeba plně pokryty ze zásob požadovaného zdroje na skladě. Během intervalu t_2 je sklad bez zásob, nepokryté požadavky se registrují a uspokojují se přednostně z příští dodávky v okamžiku jejího převzetí na sklad. Popsaný proces čerpání a doplňování zásob schematicky znázorňuje obr. 5.5. Celkové výše zásob na období T nechť je opět Q .



Obr. 5.5 Časový průběh čerpání a stavu zásob při přechodném nedostatku zásob

Průměrné náklady skladování během intervalu t_1 lze vyjádřit jako

$$N_{c1} = c_1 \frac{s}{2} t_1,$$

během období T (n cyklů) pak

$$N_1(x, s) = n c_1 \frac{s}{2} t_1 = \frac{1}{2} c_1 \frac{s^2}{x} T, \quad (5.5.8)$$

když bylo použito vztahů $n = \frac{Q}{x} = \frac{T}{t_c}$ a $t_1 = \frac{s}{x} t_c$, který vyplývá z obr. 5.5.

Podobně průměrné náklady na přechodně neuspokojené požadavky během intervalu t_2 jsou

$$N_{c3} = c_3 \frac{x-s}{2} t_2,$$

během období T pak

$$N_3(x, s) = n c_3 \frac{x-s}{2} t_2 = \frac{1}{2} c_3 \frac{(x-s)^2}{x} T, \quad (5.5.9)$$

když bylo použito vztahů $n = \frac{Q}{x} = \frac{T}{t_c}$ a $t_2 = \frac{x-s}{x} t_c$, který opět vyplývá z obr. 5.5.

Celkové náklady na objednání a skladování zásob včetně nákladů z přechodně neuspokojené části poptávky či spotřeby činí za období T (využijeme-li kromě předchozích vztahů (5.5.8) a (5.5.9) rovněž vztahu (5.5.2) předchazejícího modelu)

$$N(x, s) = \frac{1}{2} c_1 \frac{s^2}{x} T + c_2 \frac{Q}{x} + \frac{1}{2} c_3 \frac{(x-s)^2}{x} T. \quad (5.5.10)$$

Optimální x_0 a s_0 , které minimalizují nákladovou funkci $N(x, s)$ určíme tak, že obě první parciální derivace položíme rovny nule. Tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(x, s)}{\partial s} &= \frac{c_1 T s}{x} - \frac{c_3 T (x-s)}{x} = 0, \\ \frac{\partial N(x, s)}{\partial x} &= -\frac{c_1 T}{2} \cdot \frac{s^2}{x^2} - \frac{c_2 Q}{x^2} + \frac{c_3 T}{2} \cdot \frac{2(x-s) \cdot x - (x-s)^2}{x^2} = 0. \end{aligned}$$

Řešením těchto rovnic a po úpravě obdržíme

$$x_0 = \sqrt{\frac{2c_2 Q}{c_1 T}} \sqrt{\frac{c_1 + c_3}{c_3}}, \quad (5.5.11)$$

$$s_0 = \sqrt{\frac{2c_2 Q}{c_1 T}} \sqrt{\frac{c_3}{c_1 + c_3}} = x_0 \frac{c_3}{c_1 + c_3} \quad (5.5.12)$$

Z porovnání výrazů (5.5.11) a (5.5.12) s výrazem (5.5.4) pro model, kdy nepřipouštíme přechodný nedostatek zásob, vyplývá, že zahrneme-li do modelu náklady na jeden včas neuspokojený požadavek, zvýší se velikost optimální objednávky, ale současně se sníží průměrná výše zásob.

Výraz

$$w = \frac{c_3}{c_1 + c_3}$$

vyjadřuje relativně, jakou část dodávkového jsou poptávka či spotřeba uspokojovány bez prodloužení a nazývá se *míra obsluhy* systému zásob. Výraz $u = 1 - w$ je tzv míra rizika přechodného vyčerpání zásob během optimálního dodávkového cyklu.

Optimální délku dodávkového cyklu t_0 odpovídající optimální výši objednávky x_0 dostaneme ve tvaru

$$t_0 = \sqrt{\frac{2c_2T}{c_1Q}} \sqrt{\frac{c_1 + c_3}{c_3}} \quad (5.5.13)$$

Minimální dosažitelné náklady dostaneme dosazením výrazů (5.5.11) a (5.5.12) do nákladové funkce (5.5.10). Po úpravě jsou

$$N(x_0, s_0) = \sqrt{2QTc_1c_2} \sqrt{\frac{c_3}{c_1 + c_3}}. \quad (5.5.14)$$

Hodnota nákladové funkce při optimální strategii je pro konečnou hodnotu nákladů nižší než v případě, kdy přechodný nedostatek zásob nepřipouštíme.

Pro $c_3 \rightarrow \infty$ nabývá $w = 1$ a pravá strana rovnice (5.5.14) pak stejného tvaru jako v rovnici (5.5.5) předchozího modelu. Je to přirozené, neboť při velkých hodnotách c_3 je dočasné vyčerpání zásob neekonomické.

Optimální signální hladina je dána výrazem (5.5.7) zmenšeným o počet přechodně neuspokojených požadavků v okamžiku vystavení objednávky, tedy

$$r_0 = \frac{Q}{T}d - mx_0 - (x_0 - s_0) = M - mx_0 - (x_0 - s_0) = M + s_0 - x_0(m+1). \quad (5.5.15)$$

Příklad

Modifikujme předcházející příklad. Výrobní podnik spotřebuje ročně 8 000 kusů určitého náhradního dílu, přičemž spotřeba je po celý rok rovnoměrná. Určeme ekonomickou (optimální) výši objednávky x_0 , odpovídající objednávkový cyklus t_0 a bod objednávky r_0 , jestliže fixní náklady na jednu objednávku libovolné velikosti činí 900 Kč, náklady na skladování jednoho náhradního dílu jsou 90 Kč ročně a předstih objednávky 2 týdny. Připusťme možnost přechodného neuspokojení části potřeby, přitom náklady na jeden neuspokojený požadavek činí 30 Kč ročně.

Řešení

Optimální hodnoty x_0 a s_0 minimalizující funkci celkových ročních nákladů zásob určíme z rovnic (5.5.11) a (5.5.12), případně využijeme výsledků původního příkladu:

$$x_0 = 400 \cdot \sqrt{\frac{90+30}{30}} = 400 \cdot 2 = 800,$$

$$s_0 = 400 \cdot \sqrt{\frac{30}{90+30}} = 400 \cdot 0,5 = 200.$$

Důsledkem možnosti vzniku přechodného nedostatku zásob v systému je pro dané c_3 dvojnásobná velikost optimální objednávky, přitom maximální výše čisté zásoby klesne na polovinu.

Minimální celkové náklady zásob jsou podle rovnice (5.5.14)

$$N_0 = 36000 \cdot 0,5 = 18000.$$

Z výsledku je zřejmé, že pro $c_3 = 30$ Kč/jedn/rok je ekonomicky výhodné připustit přechodné vyčerpání zásob, neboť celkové náklady jsou proti původní úloze poloviční.

5.5.4. Systém s konečnou intenzitou doplňování – produkční model

Dosud jsme v uvažovaných systémech zásob předpokládali, že pevné množství zdroje přijde na sklad najednou ve stanovené době. Tento předpoklad je splněn, jsou-li zásoby zdroje pořizovány nákupem od externích dodavatelů. Nyní se budeme zabývat případem typickým pro zásoby vlastních výrobků ve výrobních organizacích. Celý dodávkový cyklus se zde rozpadá na dva intervaly – výrobní a spotřební cyklus. V prvním z nich o délce t_1 se doplňuje rovnoměrně sklad (realizuje se *výrobní dávka*) a zároveň dochází k čerpání zásoby. Přitom musí být intenzita výroby vyšší než intenzita spotřeby, aby výroba stačila pokrýt spotřebu. Ve druhé intervalu t_2 se pouze čerpá zásoba ze skladu. Po jejím vyčerpání startuje nová výrobní dávka a celý cyklus se opakuje. Nedostatek zásoby nepředpokládáme.

Tento model se typicky označuje jako *produkčně-spotřební model*. Jeho řešením chceme stanovit objem výrobní dávky x a interval mezi dvěma po sobě následujícími dávkami tak, aby byla uspokojena celková poptávka Q v období T . Veličiny je třeba stanovit tak, aby byly minimalizovány celkové náklady, které se skládají ze dvou položek – skladovací náklady a fixní náklady jedné výrobní dávky. (*Pozn.*: jednotkové výrobní náklady zdroje bychom zahrnuli v případě, že by byly závislé na velikosti výrobní dávky – viz 5.5.5).

Označme

- c_2 fixní náklady jedné výrobní dávky,
- v intenzita produkce (objem produkce za jednotku času),
- p intenzita spotřeby (objem poptávky za jednotku času),

označení ostatních veličin je stejné jako v modelu kap. 5.5.2. Průběh závislosti stavu zásob na čase ukazuje obr. 5.6).

Pro sestavení nákladové funkce tohoto modelu je třeba stanovit průměrnou výši zásob v intervalu t_c resp v období T .

Maximální výše zásoby v intervalu t_c je dosaženo v čase t_1 (kdy začíná spotřební cyklus) a dosáhne velikosti

$$x_{\max} = (v - p) \cdot t_1, \quad (5.5.16)$$

neboť v každé časové jednotce se vyrobí v jednotek a zároveň spotřebuje p jednotek.

Celkový objem produkce v rámci jedné výrobní dávky (v intervalu t_1) lze vyjádřit jako $x = v \cdot t_1$, odkud vyjádříme t_1 a dosadíme do (5.5.16). Tedy skladovací náklady jsou

$$N_1(x) = c_1 T \frac{x_{\max}}{2} = c_1 T \frac{v-p}{v} \frac{x}{2}.$$

Nákladová funkce má pak tvar

$$N(x) = N_1(x) + N_2(x) = c_1 T \frac{v-p}{v} \frac{x}{2} + c_2 \frac{Q}{x}. \quad (5.5.17)$$

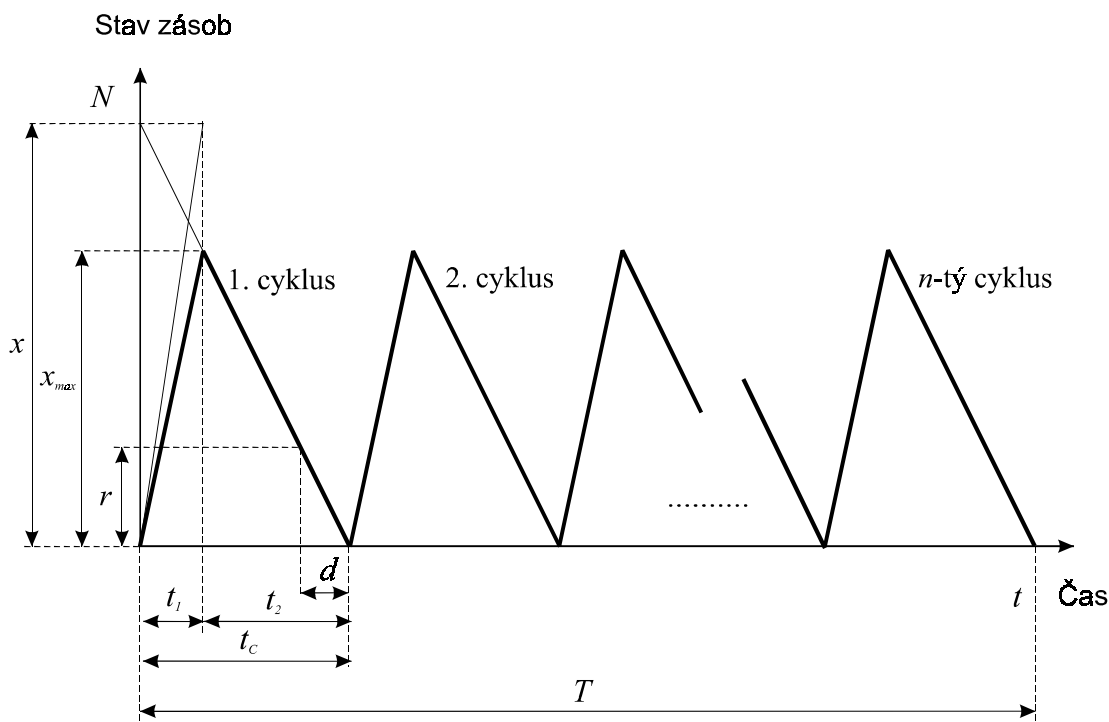
Optimální objem výrobní dávky x_0 stanovíme již známým způsobem, kdy položíme první derivaci $N(x)$ podle x rovnu nule.

Optimální objem výrobní dávky x_0 je potom

$$x_0 = \sqrt{\frac{2Qc_2}{c_1 T}} \sqrt{\frac{v}{v-p}}, \quad (5.5.18)$$

a minimální náklady zásob odpovídající optimální výrobní dávce jsou

$$N(x_0) = \sqrt{2QTc_1c_2} \sqrt{\frac{v-p}{v}}. \quad (5.5.19)$$



Obr. 5.6 Časový průběh stavu zásob

Podobně jako v modelu z kap. 5.5.2, kdy jsme uvažovali pořizovací lhůtu dodávky d , můžeme mluvit v tomto modelu o lhůtě potřebné pro přípravu nové výrobní dávky – označme ji opět d . Podle této hodnoty můžeme stanovit bod r , kdy je třeba začít s přípravou nové dávky. Mohou nastat dva případy:

1. $d \leq t_2$ - bod, ve kterém je třeba začít s přípravou nové výrobní dávky spadá do spotřebního cyklu a je roven přímo poptávce za dobu d , tj. $r_0 = pd$,
2. $d > t_2$ - bod, ve kterém je třeba začít s přípravou nové výrobní dávky spadá do výrobního cyklu a lze ho vyjádřit jako $r_0 = (t_0 - d)(v - p)$.

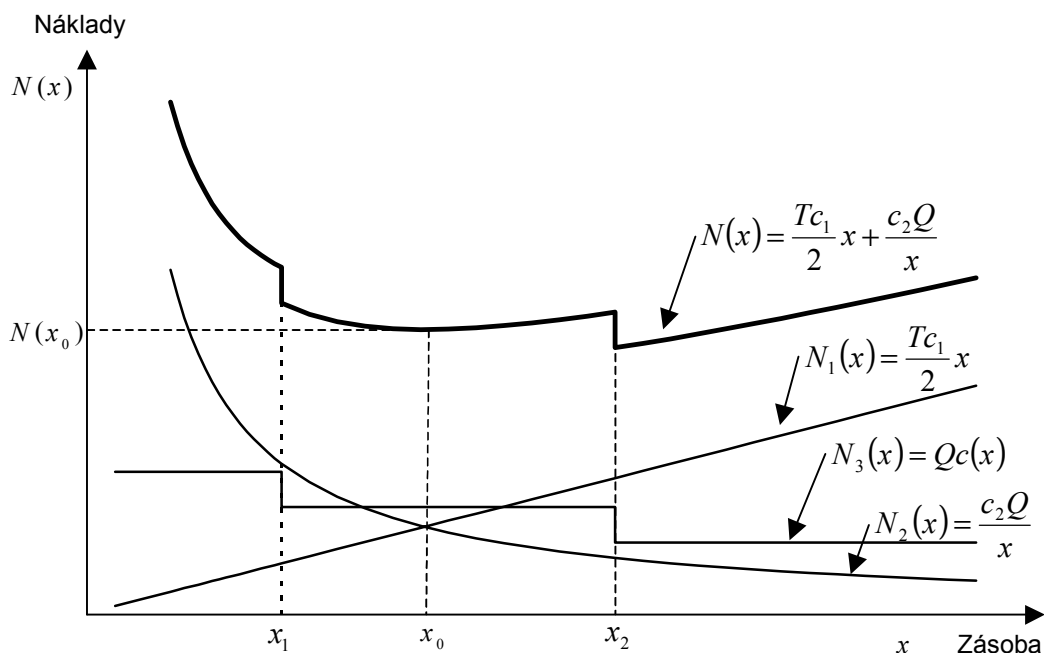
5.5.5. Slevy v pořizovací ceně zásob – model s cenovou degesí

Dosud nebyly do kritériální nákladové funkce zahrnovány pořizovací náklady zásob, protože se předpokládalo, že jsou konstantní a nemají tedy vliv na velikost nákladově optimální objednávky. V praxi je ale běžný případ poskytování množstevních slev, kdy jednotková pořizovací cena je nepřímo úměrná velikosti odebraného zboží – hovoříme o tzv. *cenové degesi*. Jestliže se jednotkové ceny nebo náklady zdroje mohou různým způsobem měnit, je nutno v optimalizačním modelu řízení zásob přihlížet i k nákladům pořízení zásob.

Obvykle se jedná o dva druhy poskytovaných slev:

- při objednání množství zdroje nad určitou stanovenou úroveň se sníží jednotková cena popř. jednotkový náklad celé objednávky,
- sleva v pořizovací ceně popř. nákladu se týká pouze té části objednaného zdroje, která převyšuje předem stanovené množství.

Protože jednotková cena nebo náklad se nemění plynule ale ve skocích, nákladová funkce zahrnující proměnlivé pořizovací náklady zásob již není spojitá a nelze tedy optimální velikost objednávky stanovit pomocí první derivace kritériální funkce celkových nákladů zásob. Průběh kritériální funkce celkových nákladů i jejích jednotlivých složek pro tři cenové hladiny ukazuje obr. 5.7. I když pro každou dílčí křivku celkových nákladů lze stanovit lokální minimum odpovídající optimální velikosti objednávky, je nutné zjistit, zda-li tento bod (velikost objednávky) leží v intervalu odpovídajícímu příslušné jednotkové ceně zdroje. V opačném případě je spočtená ekonomická objednávka *neprípustná*.



Obr. 5.7 Závislost funkce celkových nákladů a jejích složek na velikosti zásoby

Postup určení optimální velikosti objednávky pro model z kap. 5.5.2 modifikovaný cenovou regresí v bodech velikosti objednávky x_i je následující:

- Krok 1 Počínaje nejnižší jednotkovou cenou se postupně pro každou cenu vypočítá odpovídající optimální velikost objednávky podle vztahu (5.5.4), dokud se nedospěje k takové nákladově optimální velikosti, která je přípustná.
- Krok 2 Pro přípustnou velikost optimální objednávky spočtenou v kroku 1 a současně pro všechna množství zdroje x_i (body skoku kriteriální funkce), větší než tato přípustná ekonomická velikost objednávky, se vypočtou hodnoty kriteriální nákladové funkce.
- Krok 3 Optimální velikost pevné objednávky je množství zdroje, pro které dosáhne funkce celkových nákladů zásob v kroku 2 minimální úroveň.

5.5.6. Víceproduktový skladní systém - dynamický model

Téměř každý reálný skladní systém sestává z velkého počtu různých položek zásob. Z hlediska řízení takových systémů pak vzniká řada praktických problémů, které se vztahují k systému zásob jako celku. Např. dodává-li jeden dodavatel mnoho různých položek zásob, vzniká tzv. *otázka agregace objednávek*, tj. slučování objednávek různých položek zásob do jediné objednávky. Tím však může docházet k odklonu od optimálního cyklu objednávek (a s tím i velikosti objednávek) u jednotlivých položek zásob. Naproti tomu dochází ke zmenšení celkového počtu objednávek a následkem toho i ke zmenšení objemu činností s tím souvisejících a tedy i nákladů s nimi spojených. Jednou z otázek, které si pak můžeme položit, zní: "je výhodnější objednat zvlášť podle optimálních cyklů jednotlivých položek nebo společně a za jakých podmínek je ta či ona strategie výhodnější?".

Jiným systémovým efektem řízení skladů zásob o velkém počtu položek je existence různých omezujících podmínek, které se vztahují na systém zásob jako celek, např. omezenost celkových skladních prostorů, omezenost úhrnných oběžných prostředků vázaných v zásobách apod.

Typickým případem agregace objednávek je situace, kdy jeden nebo několik málo dodavatelů zásobuje skladní systém více různými položkami zásob a kdy je zvláště výhodné, objednat jedinou objednávkou od téhož dodavatele několik položek zásob s tím, že budou dodány současně. Tak je tomu např. při odběru zboží od dodavatele vlastními dopravními prostředky, jestliže rozhodující složku nákladů objednávky tvoří právě náklady na jízdu autem.

Předpokládejme, že jednou objednávkou lze objednat současně n položek při konstantních nákladech objednávky c_2 . Tyto náklady tedy nezávisí na počtu objednaných položek ani na množství jednotlivých položek. Nechť potřeba i -té položky (resp. poptávka po této položce) během období délky T je Q_i jednotek množství ($i = 1, 2, \dots, n$) a nechť náklady na skladování položky za jednotku času jsou c_{1i} ($i = 1, 2, \dots, n$). Velikost objednávky i -té položky označme x_i (v jednotkách množství) a cyklus objednávání této položky t_i (v jednotkách času), potom

$$x_i = \frac{Q_i}{T} \cdot t_i, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (5.5.20)$$

Vzhledem k tomu, že náklad objednávky v daném případě nezávisí na počtu současně objednávaných položek, měl by být optimální objednávací cyklus pro všechny položky společně objednávané stejně dlouhý. Optimální velikosti objednávek všech položek lze tedy hledat ve tvaru

$$x_{0i} = \frac{Q_i}{T} \cdot t_0, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (5.5.21)$$

kde t_0 je optimální délka společného objednávacího cyklu pro všechny položky.

Velikost objednávky každé položky je tedy funkcí délky cyklu t . Počet cyklů během celého období T je $p = T/t$. Celkové náklady za období T , spojené s doplňováním všech n položek zásob v cyklech délky t , lze vyjádřit jako

$$N(t) = c_2 \frac{T}{t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_{1i} \cdot \frac{Q_i}{T} t \cdot T. \quad (5.5.22)$$

Optimální objednávací cyklus $t = t_0$ nalezneme minimalizací funkce $N(t)$:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{Tc_2}{t^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_{1i} Q_i = 0, \quad (5.5.23)$$

odkud

$$t_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot T \cdot c_2}{\sum_{i=1}^n c_{1i} Q_i}}. \quad (5.5.24)$$

Vyšetřením druhé derivace lze ukázat, že pro $t = t_0$ nabývá funkce $N(t)$ opravdu minimum, tedy dosazením nalezené hodnoty t_0 do vztahu (5.5.21) obdržíme optimální velikost objednávky i -té položky zásob:

$$x_{0i} = Q_i \cdot \sqrt{\frac{2c_2}{T \sum_{i=1}^n c_{1i} Q_i}}. \quad (5.5.25)$$

Minimální dosažitelné skladní náklady při dodržování optimálního cyklu objednávek jsou

$$N(t_0) = \sqrt{2Tc_2 \sum_{i=1}^n c_{1i} Q_i} = \sqrt{2Tc_2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n c_{1i} Q_i}. \quad (5.5.26)$$

Pro $n = 1$ nabývají vzorce (5.5.24) až (5.5.26) dříve nalezené tvary

$$t_0 = \sqrt{\frac{2Tc_2}{Qc_1}}, \quad x_0 = \sqrt{\frac{2c_2 Q}{Tc_1}} \quad \text{a} \quad N(x_0) = \sqrt{2Tc_2 c_1 Q}.$$

Kdybychom naproti tomu objednávali každou položku samostatně, vznikly by celkové náklady

$$N_c = \sum_{i=1}^n N_{0i} = \sum_{i=1}^n \sqrt{2Tc_2 c_{1i} Q_i} = \sqrt{2Tc_2} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{c_{1i} Q_i}. \quad (5.5.27)$$

Protože obecně platí

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n Z_i} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{Z_i}, \quad (5.5.28)$$

musí být vždy

$$N(t_0) \leq N_c, \quad (5.5.29)$$

tj. agregace položek při objednávce vede za uvedených předpokladů vždy k nižším nákladům. Ale tyto předpoklady byly dosti speciální a to sice v tom, že náklady objednávky nezávisely na počtu objednaných položek.

Uvažujme tedy reálnější situaci, kdy objednácní náklady sestávají jednak z pevné části nezávislé na počtu objednávaných položek c_{2f} a jednak z části závislé (přímo úměrné) na počtu objednávaných položek c_{2v} (např. spojené se zjišťováním skutečného stavu zásob jednotlivých položek, výpočty s tím spojené apod.).

Objednácní náklady jsou tedy rovny $c_2 = c_{2f} + n \cdot c_{2v}$, kde n je celkový počet objednávaných položek. Porovnejme nyní celkové skladní náklady při objednávání podle optimálního objednácního cyklu (a tedy i velikosti) každé jednotlivé položky na jedné straně, tj.

$N_c = \sum_{i=1}^n N(t_{0i})$ a při současném objednání všech položek se společným objednávacím cyklem, tj. $N(t_0)$.

V případě samostatného objednávání můžeme vyjádřit nákladovou funkci pro i -tou položku

$$N(t_i) = \frac{T \cdot (c_{2f} + c_{2v})}{t_i} + \frac{1}{2} c_{1i} \cdot Q_i \cdot t_i, \quad (5.5.30)$$

a standardním postupem obdržíme optimální cyklus objednávek i -té položky

$$t_{0i} = \sqrt{\frac{2T \cdot (c_{2f} + c_{2v})}{c_{1i} \cdot Q_i}}, \quad (5.5.31)$$

optimální velikost objednávky i -té položky

$$x_{0i} = \sqrt{\frac{2T \cdot (c_{2f} + c_{2v}) \cdot Q_i}{T \cdot c_{1i}}}, \quad (5.5.32)$$

a minimální dosažitelné skladní náklady i -té položky

$$N(t_{0i}) = \sqrt{2 \cdot T \cdot (c_{2f} + c_{2v})} \cdot \sqrt{c_{1i} \cdot Q_i}. \quad (5.5.33)$$

Součet takových nákladů pro všechny položky za předpokladu, že každou z nich objednáváme samostatně, potom je

$$N_c = \sum_{i=1}^n N(t_{0i}) = \sqrt{2 \cdot T \cdot (c_{2f} + c_{2v})} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{c_{1i} \cdot Q_i}. \quad (5.5.34)$$

Pokud budeme objednávat vždy všechny položky najednou, nalezneme délku optimálního cyklu společné objednávky standardním způsobem z rovnice

$$N(t) = \frac{T \cdot (c_{2f} + c_{2v})}{t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_{1i} \cdot Q_i \cdot t \quad (5.5.35)$$

ve tvaru

$$t_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot T \cdot (c_{2f} + nc_{2v})}{\sum_{i=1}^n c_{1i} Q_i}}, \quad (5.5.36)$$

optimální množství i -té položky objednávané ve společné objednávce

$$x_{0i} = \sqrt{\frac{2 \cdot (c_{2f} + nc_{2v}) \cdot Q_i}{T \cdot \sum_{i=1}^n c_{1i} Q_i}}, \quad (5.5.37)$$

a minimální náklady jsou

$$N(t_0) = \sqrt{2T \cdot (c_{2f} + nc_{2v})} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n c_{1i} Q_i}. \quad (5.5.38)$$

V tomto případě již může nastat situace, kdy náklady jsou nižší při samostatném objednávání než při společné objednávce, tj. může platit

$$N_c < N(t_0). \quad (5.5.39)$$

5.6. MODEL Y STOCHASTICKÉ

V deterministických modelech se při hledání optimální strategie řízení zásob nepřihlíží k riziku, příp. nejistotě při určení budoucí poptávky nebo potřeby ani při stanovení pořizovací lhůty zásob. Předpokládá se, že všechny tyto veličiny jsou přesně známy. Obecnějším východiskem optimalizace zásob, které je také v praxi reálnější, je však *pravděpodobnostní* či *stochastický charakter* poptávky nebo potřeby popř. i délky pořizovací lhůty zásob. Podobně jako u deterministických úloh mohou být i charakteristiky pravděpodobnostních rozdělení používaných k popisu poptávky nebo spotřeby v čase konstantní nebo se mohou známým nebo i neznámým způsobem měnit. V další kapitole bude uveden model, který předpokládá průměrnou poptávku nebo spotřebu v čase přibližně konstantní a jejich stacionární rozdělení pravděpodobnosti jsou známa.

5.6.1. Jednorázově vytvářená zásoba s empiricky pravděpodobnostně určenou poptávkou

Nalezení empirického pravděpodobnostního rozdělení není obecně jednoduchá úloha, jde vlastně o složitý komplex otázek predikce resp. prognózy poptávky. V dalších úvahách však budeme předpokládat, že toto rozdělení bylo nalezeno a lze z něho tedy vycházet.

V praxi se pak můžeme setkat se třemi situacemi: jednou příznivou, kdy zásoba pořízená dle výpočtu na modelu se právě rovná skutečné budoucí poptávce, a dvěma nepříznivými, kdy je pořízená zásoba nižší nebo vyšší než skutečná poptávka. V obou posledních případech vznikají nežádoucí náklady spojené s nedostatkem pohotovosti zásoby nebo náklady z nadbytečné zásoby. V případě nedostatku zásob ještě rozlišujeme situace, kdy náklady nezávisí na objemu chybějící zásoby resp. jsou přímo úměrné chybějícímu množství zásoby.

Označme y náhodnou proměnnou, která udává velikost poptávky a může nabývat jen diskrétních hodnot. K ní přiřadíme pravděpodobnost $p(y)$, která určuje, že poptávka v daném budoucím období bude mít právě velikost y . Předpokládejme, že náklady z nedostatku jednotky

množství pohotové zásoby jsou C_N , náklady z nadbytečné zásoby za každou nadbytečnou jednotkou činí C_Z . Ztráta z nadbytečné zásoby může např. vzniknout tím, že jednotku jsme zbytečně dopravovali na sklad, pak ji předisponovali jinam, popř. prodali se ztrátou k jinému účelu nebo jsme pro ni později nenalezli použití vůbec. Ztráta z chybějící zásoby vznikne např. tím, že chybějící náhradní díl vyřadí základní zařízení z používání a náklady na provoz náhradního zařízení jsou vyšší, za ztrátu můžeme považovat i ušlý zisk z nerealizované činnosti apod.

Označme x velikost zásoby, kterou pořizujeme ke krytí budoucí poptávky a hledáme takovou její velikost x_0 , aby očekávané celkové náklady (resp. ztráty) spojené s tímto rozhodnutím byly minimální. Náklady na objednání C_p neuvažujeme, protože jsou nezávislé na objednaném množství, náklady na skladování C_s rovněž neuvažujeme, neboť je považujeme za zanedbatelné ve srovnání se ztrátami C_N a C_Z .

Jestliže $y < x$, vzniknou náklady $c_Z(x - y)$, jestliže $y > x$, vzniknou náklady $c_N(y - x)$, při $x = y$ náklady nevzniknou. Očekávané náklady, resp. střední hodnota $N(x)$, spojené s rozhodnutím pořídit zásobu velikosti x , jsou

$$N(x) = \sum_{y=0}^{x-1} c_Z(x - y)p(y) + 0 \cdot p(x) + \sum_{y=x+1}^{\infty} c_N(y - x)p(y) \quad (5.5.40)$$

tj.

$$N(x) = \sum_{y=0}^x c_Z(x - y)p(y) + \sum_{y=x+1}^{\infty} c_N(y - x)p(y).$$

Rozhodovací úloha spočívá ve stanovení takové hodnoty x , aby $N(x)$ bylo minimální. Lze postupovat tak, že bychom postupně zkoušeli různá rozhodnutí, tj. dosazovali $x = 0, 1, 2, \dots$, vypočítali vždy očekávané náklady $N(x)$ a hodnota $x = x_0$, pro niž by náklady byly minimální, by určovala optimální rozhodnutí, tj. *optimální velikost zásoby*, kterou bychom měli pořídit. Pokud lze předpokládat, že funkce $N(x)$ nabývá jediného lokálního minima, pak lze stanovit hodnotu x_0 , která minimalizuje náklady $N(x)$ analyticky.

Pro minimalizující x_0 musí platit:

$$N(x_0) = N(x_0 + 1), \quad (5.5.41)$$

a současně

$$N(x_0) = N(x_0 - 1). \quad (5.5.42)$$

K výpočtu $N(x+1)$ dosadíme do výrazu (1) pro $N(x)$ za x výraz $x+1$:

$$N(x+1) = \sum_{y=0}^{x+1} c_Z(x+1 - y)p(y) + \sum_{y=x+2}^{\infty} c_N(y - x - 1)p(y).$$

Součty na pravé straně rovnice upravíme tak, aby se z nich daly vytknout výrazy shodné s těmi, které se vyskytují na pravé straně rovnice (1):

$$N(x+1) = \sum_{y=0}^x c_Z(x - y)p(y) + \sum_{y=0}^x c_Z p(y) + \sum_{y=x+1}^{\infty} c_N(y - x)p(y) - \sum_{y=x+1}^{\infty} c_N p(y).$$

tj.

$$N(x+1) = \sum_{y=0}^x c_Z (x-y)p(y) + \sum_{y=x+1}^{\infty} c_N (y-x)p(y) + c_Z \sum_{y=0}^x p(y) - c_N \left[1 - \sum_{y=0}^x p(y) \right].$$

Pravděpodobnost jevu $y \leq x$, tj. že budoucí poptávka velikosti y nebude větší než předem pořízená zásoba velikosti x , označme $P(y \leq x)$.

Vzhledem k tomu, že $P(y \leq x) = \sum_{y=0}^x p(y)$, lze poslední rovnici přepsat do tvaru:

$$N(x+1) = N(x) + P(y \leq x) \cdot [c_Z - c_N] - c_N. \quad (5.5.43)$$

Nahradíme-li v rovnici (5.5.43) x výrazem $x-1$, dostaneme:

$$N(x) = N(x-1) + P(y \leq x-1) \cdot [c_Z - c_N] - c_N. \quad (5.5.44)$$

Pro $x = x_0$ pak plyne z rovnice (5.5.43) a z podmínky (5.5.41):

$$P(y \leq x_0) \cdot [c_Z - c_N] - c_N \geq 0 \quad (5.5.45)$$

a z rovnice (5.5.44) a podmínky (5.5.42):

$$P(y \leq x_0 - 1) \cdot [c_Z - c_N] - c_N \geq 0. \quad (5.5.46)$$

Z nerovnice (5.5.45) dostaneme

$$P(y \leq x_0) \geq \frac{c_N}{c_N + c_Z}$$

a z nerovnice (5.5.46)

$$P(y \leq x_0 - 1) \leq \frac{c_N}{c_N + c_Z}.$$

Pro minimalizující $x = x_0$ musí tedy platit

$$P(y \leq x_0 - 1) \leq \frac{c_N}{c_N + c_Z} \leq P(y \leq x_0). \quad (5.5.47)$$

Vztah (5.5.47) tedy vyjadřuje podmínku, kterou musí splňovat x , které maximalizuje očekávané celkové náklady $N(x)$ při daných hodnotách c_N a c_Z .

Prakticky se tohoto vztahu používá k optimalizaci velikosti zásoby tak, že vypočteme pro dané pravděpodobnostní rozdělení příslušnou distribuční funkci

$$P(y < x) = \sum_{y=0}^x p(y), x = 0, 1, 2, \dots,$$

dále vypočteme hodnotu zlomku $\frac{c_N}{c_N - c_Z}$ a zjistíme, pro kterou hodnotu x platí vztah (5.5.47).

Příklad.

Určíme optimální výši jednorázové objednávky x_0 sezónního zboží pro obchodní dům, známe-li na základě údajů z minulého roku jednotlivé pravděpodobnosti $p(Q)$ pro velikost

poptávky po tomto zboží ve výši Q kusů na sezónu. Nebude-li poptávka plně uspokojena, činí ztráta z ušlého zisku 800 Kč na každý neuspokojený požadavek. Zůstane-li naopak po skončení sezóny část zboží ve skladě, vzniká ztráta v důsledku snížení jeho ceny při posezónním výprodeji 200 Kč za kus. Empirické rozdělení pravděpodobnosti poptávky a kumulované pravděpodobnosti $p(Q \leq x)$ uvádí následující tabulka 5.1.

Q, x	$p(Q)$	$p(Q \leq x)$
1 000	0,01	0,01
2 000	0,04	0,05
3 000	0,15	0,20
4 000	0,40	0,60
5 000	0,25	<u>0,85</u>
6 000	0,10	0,95
7 000	0,05	1,00

Tab. 5.1

K výpočtu použijeme vztahu (5.5.47), kde $c_N = 800$ a $c_Z = 200$. Tedy

$$\frac{c_N}{c_N + c_Z} = \frac{800}{800 + 200} = 0,80$$

Z tabulky 5.1 plyne

$$p(Q \leq 4) < 0,80 < p(Q \leq 5),$$

takže optimální výše jednorázové dodávky x_0 , která minimalizuje očekávané celkové ztráty, je 5000 kusů. Očekávané celkové ztráty odpovídající této výši jednorázové zásoby dosáhnou podle vztahu (5.5.40) minimální úrovně 332 000 Kč.

6. Síťová analýza

6.1 ÚVOD

Metody síťové analýzy jsou založeny na *teorii grafů* – samostatné matematické disciplíně, jejíž počátky jsou spojovány s úlohou o Königsberských mostech, kterou řešil již v roce 1736 slavný matematik L. Euler.

Síťové modely používané v operačním výzkumu vycházejí z grafů, které se vyznačují speciální strukturou a nazývají se *sítě*. Metody a modely síťové analýzy mají široké praktické uplatnění např. při projektování dopravních a telekomunikačních sítí, při řešení úloh spojených s kalendářním plánováním, se skladováním a distribucí výrobků a zboží, s fungováním systémů hromadné obsluhy a pro řadu dalších úloh technického a ekonomického charakteru. Z uvedeného stručného výčtu možných aplikací síťových modelů a metod je zřejmá jejich univerzální použitelnost, zvláště při zkoumání velkých systémů.

6.2 ZÁKLADY TEORIE GRAFŮ

Nástrojem zkoumání teorie grafů je *graf*, který lze matematicky vyjádřit jako dvojici množin $G = \{U, H\}$, kde U je množina *uzlů* a H množina *hran*. Hranou se rozumí uspořádaná dvojice uzlů $\{u, v\}$, kde $u \in U$ a $v \in U$. V dalším se zaměříme na *konečné grafy*, kdy U a H jsou konečné množiny.

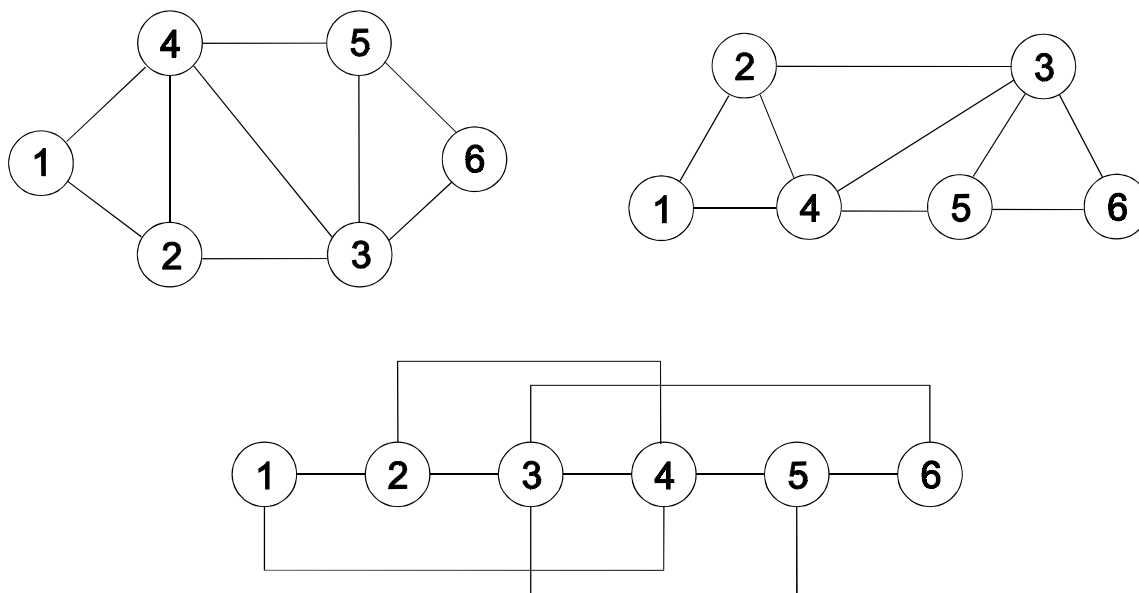
Počet hran vycházejících z daného uzlu se nazývá *stupeň uzlu*. Hrana, která začíná a končí ve stejném uzlu, tvoří *směčku*. Existuje-li v jednom směru více hran mezi dvěma uzly, hovoříme o *paralelních hranách*. Grafy obsahující paralelní hrany nebo i směčky se nazývají *multigrafy* popř. *pseudografy* – tyto druhy grafů nebudou předmětem našeho dalšího výkladu. Graf $G_1 = \{U_1, H_1\}$ je *podgrafem* $G = \{U, H\}$, jestliže $U_1 \subset U$ a $H_1 \subset H$. Podgraf G_1 , pro který platí $U_1 = U$ a $H_1 \subset H$, se nazývá *faktorem* grafu G .

Pro práci s grafem se uzly popisují, např. v konečné množině n uzlů U lze označit uzly $u_1, u_2, \dots, u_n$. Hrany v množině H představují množinu dvojic uzlů např. (u_i, u_j) a označujeme je h_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Uzly u_i a u_j se označují jako uzly incidentní s hranou h_{ij} .

Pokud množiny U a H neobsahují mnoho prvků, lze graf zadat nebo popsat graficky – uzly jsou znázorněny kroužky (body) a hrany přímé nebo různě zakřivené či lomené čáry. Pro správné znázornění grafu je podstatná pouze existence uzlů a hran mezi uzly, nikoliv jeho, resp. tvar uzlů a hran. Jiné možnosti zadání grafu představují např. topologický způsob nebo incidenční matice. Na obr. 6.1 je znázorněn alternativně graf G s množinou uzlů $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ a s množinou hran $H = \{h_{12}, h_{14}, h_{23}, h_{24}, h_{34}, h_{35}, h_{36}, h_{45}, h_{56}\}$.

Posloupnost uzlů a hran $u_1, h_{12}, \dots, h_{n-1,n} u_n$ v grafu G se nazývá *sled*. Platí-li $u_1 = u_n$, jedná se o *uzavřený sled*, v opačném případě, kdy $u_1 \neq u_n$, jedná se o *otevřený sled*. Uzly u_1 a u_n jsou *koncové uzly* sledu, uzly u_k pro $1 < k < n$ nazýváme *vnitřními*. Počet hran, které tvoří daný sled, představuje jeho *délku*. *Vzdálenost* dvou uzlů se měří délkou nejkratšího sledu, který je spojuje. *Souvislý graf* je takový, v kterém existuje sled mezi jeho libovolnými dvěma uzly.

Cestu v grafu tvoří otevřený sled obsahující pouze různé uzly. *Kružnice (cyklus)* je cesta začínající a končící ve stejném uzlu. *Acyklický* graf neobsahuje žádnou kružnici. Souvislý acyklický graf je tzv. *strom*. Cesta, která prochází všemi uzly grafu, se nazývá *hamiltonovská*. Hamiltonovská cesta tedy zahrnuje všechny různé uzly grafu, ale nemusí procházet po všech hranách, zatímco *eulerovský* sled obsahuje všechny různé hrany grafu, přičemž některé uzly mohou být zahrnuty vícekrát.



Obr. 6.1 Alternativní znázornění totožného grafu

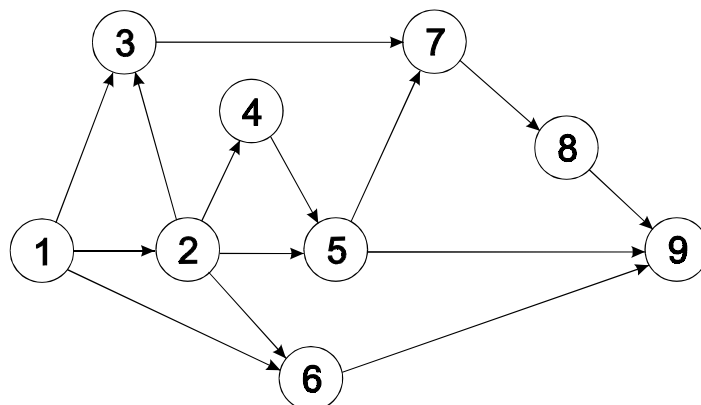
V řadě aplikací teorie grafů se přiřazují hranám nebo uzlům grafu určité hodnoty (čísla). Jestliže na množině hran H grafu $G = \{U, H\}$ je definováno zobrazení do množiny reálných čísel, jde o *hranově ohodnocený graf*. Ohodnocení libovolné hrany h_{ij} označíme např. k_{ij} . Tato hodnota může představovat vzdálenost mezi uzly grafu, propustnost hran, dobu potřebnou k překonání úseku znázorněného hranou apod., zpravidla je nezáporná.

Jestliže na množině uzlů U grafu $G = \{U, H\}$ je definováno zobrazení do množiny reálných čísel, jedná se o *uzlově ohodnocený graf*. Ohodnocení uzlu u_i značíme např. k_i . V praktických úlohách lze graf ohodnotit oběma způsoby současně, tj. hranově i uzlově.

Pokud má smysl rozlišovat u hran grafu i směr, hovoříme o *orientovaném grafu*, který tvoří množina uzlů U a množina orientovaných hran H . U orientovaného grafu nejsou různě orientované hrany h_{ij} a h_{ji} totožné, i když spojují stejnou dvojici uzlů. Při zobrazení orientovaného grafu je směr orientace hran znázorněn šipkami.

Na rozdíl od neorientovaného grafu se u orientovaných hran nehovoří o krajních uzlech, ale o *počátečních* a *koncových* uzlech. Analogicky pojmu sled u neorientovaného grafu je definováno pro orientovaný graf *spojení* nebo také *orientované spojení*. *Silně souvislý graf* je orientovaný graf, mezi jehož libovolnými dvěma uzly existuje orientované spojení.

Zvláštním druhem orientovaného grafu je *síť (síťový graf)*, definovaná jako souvislý, orientovaný, hranově resp. uzlově ohodnocený graf, v kterém existuje vstup a výstup. Vstup do sítě je uzel, z kterého hrany pouze vycházejí, výstup ze sítě je uzel, do kterého hrany pouze vcházejí. Graf vyhovující těmto podmínkám je znázorněn na obr. 6.2.



Obr. 6.2 Zobrazení síťového grafu

6.3 ZÁKLADNÍ ÚLOHY SÍŤOVÉ ANALÝZY

6.3.1 Optimální spojení v síti

Optimalizační úloha spočívá v propojení např. skupiny odběratelů zemního plynu, dodávaného z jednoho zásobníku takovým způsobem, aby celková délka plynovodu, příp. náklady na jeho vybudování, byly minimální. Podobné úlohy vznikají při projektování dopravních, telefonních, kabelových televizních, energetických a jiných sítí, kdy je cílem nalézt řešení, které minimalizuje zvolenou kritériální funkci.

Podstatou úlohy z hlediska teorie grafů je nalézt takové hrany ohodnoceného souvislého grafu, které spojují všechny jeho uzly a mají minimální součet ohodnocení takových hran. Ze zadání je zřejmé, že řešení nesmí obsahovat cyklus, a tento typ úlohy se také označuje jako *úloha nalezení minimálního stromu*.

Označíme-li ohodnocení hrany h_{ij} v neorientovaném grafu $G = \{U, H\}$ jako $k_{ij} > 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), pak pro minimální strom platí

$$z = \sum_{h_{ij} \in H} k_{ij} \rightarrow \min.$$

Algoritmus pro stanovení minimálního stromu je relativně jednoduchý a je určen těmito kroky:

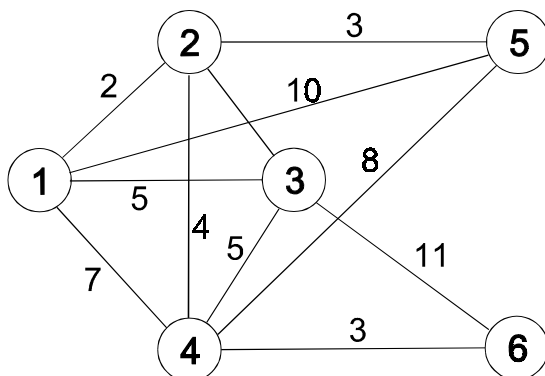
- Krok 1. V množině hran grafu G , uspořádané podle velikosti ohodnocení hran k_{ij} , najdeme dvě hrany s nejmenším ohodnocením a zařadíme do množiny konstruovaného minimálního stromu.
- Krok 2. Již vybrané hrany z grafu G dále nebereme v úvahu a ze zbylých zařadíme do minimálního stromu takovou hranu, která má nejnižší ohodnocení k_{ij} a přitom netvoří s již vybranými hranami cyklus.
- Krok 3. Druhý krok opakujeme až do vybrání $n-1$ hran (n je počet uzlů), které tvoří minimální strom.

Mají-li dvě nebo několik hran stejná ohodnocení k_{ij} a netvoří s dosud vybranými hranami cyklus, zařadíme do sestavovaného minimálního stromu libovolnou z nich. Povede-li

tento postup v dalším kroku k vypuštění některé z těchto shodně ohodnocených hran, pak výsledný minimální strom má více optimálních řešení (nejednoznačné řešení, alternativní řešení).

Příklad.

Máme navrhnout nejkratší kabelové spojení (přímé nebo nepřímé) v televizní síti s šesti skupinovými účastnickými stanicemi, která je znázorněna na obr. 6.3. Uzel u_1 představuje centrální televizní studio. Ohodnocení hran znamenají délku kabelů potřebnou k propojení odpovídajících uzlů. Chybějící hrany mezi uzly v neorientovaném grafu znamenají z různých důvodů technicky nerealizovatelné spojení.



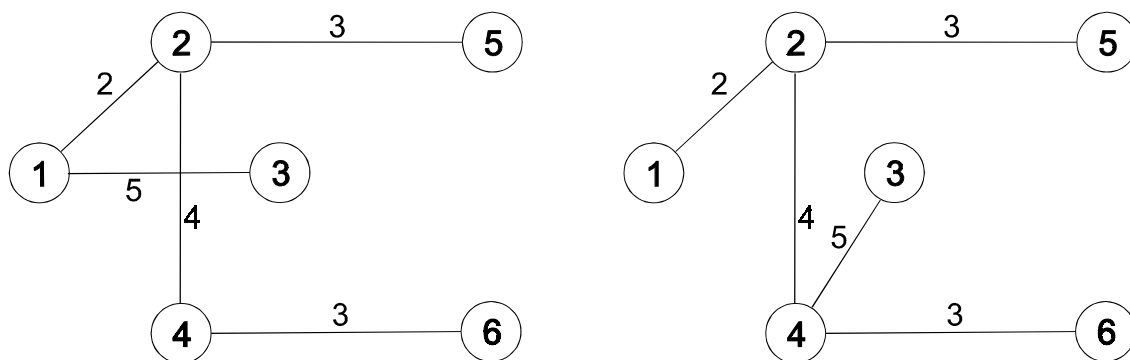
Obr. 6.3 Graf zadání příkladu

Řešení.

Dle popsaného algoritmu vybereme postupně z grafu na obr. 6.3 množinu hran, které tvoří minimální strom, s těmito ohodnoceními:

1. $k_{12} = 2$, 3. $k_{46} = 3$, 5. $k_{13} = 5$ nebo
2. $k_{25} = 3$, 4. $k_{24} = 4$, $k_{34} = 5$.

V posledním kroku jsme dospěli k alternativnímu optimálnímu řešení úlohy – lze propojit buď uzly u_1 a u_3 nebo u_3 a u_4 , přitom minimální délka propojení činí 17 a stejná pro obě řešení. Alternativní minimální stromy ukazuje obr. 6.4.



Obr. 6.4 Alternativní minimální stromy

6.3.2 Nejkratší cesta sítí

Úloha nalezení nejkratší cesty sítí spočívá v nalezení cesty mezi počátečním a koncovým uzlem, pro kterou je součet ohodnocení hran tvořících tuto cestu minimální.

Příkladem může posloužit silniční síť, v které křižovatky silnic představují $u_i \in U$ a silniční úseky mezi křižovatkami tvoří hrany $h_{ij} \in H$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Ohodnocení hran $k_{ij} > 0$ jsou např. vzdálenosti mezi dvěma uzly u_i a u_j , přitom pro zjednodušení předpokládáme, že $k_{ij} = k_{ji}$.

Nalézt nejkratší cestu v takto zadané síti znamená vybrat posloupnost hran C , spojujících vstup u_1 s výstupem u_n , pro kterou platí

$$z = \sum_{h_{ij} \in C} k_{ij} \rightarrow \min.$$

Fordův-Fulkersův a Dantzigův algoritmus

Fordův-Fulkersův algoritmus představuje jeden z nejstarších a nejznámějších postupů vhodných pro řešení optimalizačních úloh na grafech. Je založen na přiřazování hodnot v_i jednotlivým uzlům sítě u_i , takže výsledkem je uzlově ohodnocený graf. Nevýhodou tohoto algoritmu je, že postup není jednoznačný v pořadí ohodnocování uzlů sítě. Tento nedostatek odstraňuje Dantzigův algoritmus, jehož jednotlivé kroky lze popsat následovně:

Krok 1. Počátečnímu uzlu u_1 přiřadíme hodnotu $v_1 = 0$.

Krok 2. Ostatním uzlům přiřazujeme hodnoty v_i vypočtené pomocí vztahu

$$v_i = \min_{i,j} (v_i + k_{ij}). \quad (6.3.1)$$

Minimum v (6.3.1) se hledá pro všechny hrany $h_{ij} \in H$, pro které platí, že jejich počátečnímu uzlu u_i byla již hodnota v_i určena, zatímco jejich koncovému uzlu u_j ohodnocení v_j dosud určeno není.

Krok 3. Ohodnocení v_n koncového uzlu u_n je délka nejkratší cesty sítí, přitom pro uzly na této cestě platí vztah

$$v_j - v_i = k_{ij}.$$

Je zřejmé, že hodnoty v_i přiřazené jednotlivým uzlům u_i jsou délky nejkratších cest z počátečního uzlu u_1 do příslušného uzlu u_i . Je-li pro několik hran hodnota výrazu (6.3.1) stejná, existuje více optimálních řešení úlohy.

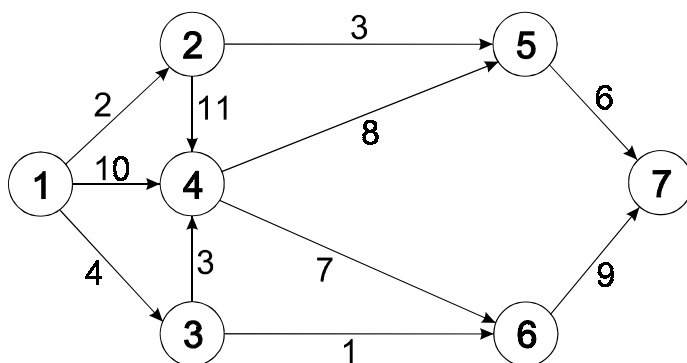
Příklad.

Pomocí Dantzigova algoritmu nalezněte nejkratší cestu mezi uzly u_1 a u_7 v acyklické síti znázorněné na obr. 6.5.

Řešení.

Výpočet uspořádáme do tabulky 6.1, její počet sloupců je roven počtu uzlů sítě. V prvním řádku jsou vyznačena pořadová čísla uzlů i a do druhého řádku jsou postupně

zapisovány vypočtené hodnoty v_i , přitom $v_1 = 0$. Další řádky tabulky obsahují dvojice čísel, z nichž první je pořadové číslo koncového uzlu u_j odpovídající hraně h_{ij} a druhé číslo (v závorce) je ohodnocení dané hrany k_{ij} . Těchto dvojic čísel $j(k_{ij})$ je v každém sloupci tolik, kolik hran z daného uzlu vystupuje.



Obr. 6.5

i	1	2	3	4	5	6	7
v_i	0	2	4	7	7	5	13
$j(k_{ij})$	$\boxed{2(2)}$ $\boxed{3(4)}$ $4(10)$	$4(11)$ $5(5)$	$\boxed{4(3)}$ $\boxed{6(1)}$	$5(8)$ $6(7)$	$\boxed{7(6)}$	$7(9)$	

Tab 6.1

Algoritmus výpočtu je následující:

- Krok 1. Počátečnímu uzlu přiřadíme ohodnocení $v_1 = 0$.
- Krok 2. Použitím vztahu (6.3.1) vypočteme v_i , přitom uvažujeme jen ty uzly, pro které jsou již ohodnocení v_i stanovena.
- Krok 3. Hodnotu v_i stanovenou v kroku 2 pro uzel u_i zapíšeme do druhého řádku tabulky. Dvojici čísel odpovídající hraně, pro kterou je součet $v_i + k_{ij}$ v (6.3.1) minimální, např. zarámujeme a všechny dvojice čísel, v nichž první číslo odpovídá právě ohodnocenému uzlu, v tabulce např. přeškrtneme.
- Krok 4. Nalezneme-li ohodnocení všech uzlů sítě, výpočet je ukončen. Ohodnocení koncového uzlu představuje délku nejkratší cesty z počátečního do koncového uzlu.

Z tabulky (6.1) lze odečíst, že délka nejkratší cesty mezi uzly u_1 a u_7 je $v_7 = 13$, přitom nejkratší cestu tvoří posloupnost hran h_{12} , h_{25} , h_{57} . Hrany a uzly ležící na nejkratší cestě vyčteme z tabulky tak, že podle zarámované dvojice čísel, odpovídající hraně vstupující do

koncového uzlu sítě, zjistíme počáteční uzel této hrany, tj. v tomto příkladu u_5 , atd. až dospějeme k počátečnímu uzlu sítě u_1 .

6.3.3 Toky v síti

Analýzu toků v síti řeší zvláštní skupina optimalizačních úloh na síťových grafech, která umožňuje optimalizovat např. fungování systémů přepravujících homogenní produkty, jako jsou voda, plyn, nafta apod.

Tokem v síti mezi dvěma zvolenými uzly množiny U se nazývá celočíselná funkce t , definovaná na množině H orientovaného síťového grafu G , pro kterou platí:

1. $0 \leq t_{ij} \leq k_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) pro všechny hrany $h_{ij} \in H$, přičemž t_{ij} je *hodnota toku* hranou h_{ij} a k_{ij} je *maximální propustnost* resp. *kapacita* hrany h_{ij} .

2. Pro každý tranzitní uzel $u_i \in U$, tj. různý od vstupní uzlu u_1 a výstupního uzlu u_n , platí

$$\sum_{j \in U_i^+} t_{ij} = \sum_{j \in U_i^-} t_{ij}, \quad (6.3.2)$$

kde U_i^+ je množina pořadových čísel uzlů, z nichž vychází nějaká hrana končící v u_i a U_i^- je množina pořadových čísel všech uzlů, do nichž vchází nějaká hrana začínající v u_i .

Podmínka (6.3.2) znamená, že v tranzitních uzlech sítě nevznikají žádné ztráty (přirůstky) na přepravovaném produktu.

Velikost toku V představuje číslo

$$V = \sum_{j \in U_1^-} t_{1j},$$

pro které na základě podmínek rovnováhy (6.3.2) týkajících se tranzitních uzlů musí platit

$$V = \sum_{j \in U_1^-} t_{1j} = \sum_{j \in U_n^+} t_{jn}.$$

Maximální tok sítě

Jednou ze základních úloh o tocích v síti je hledání maximálního toku na síti, resp. toku s maximální velikostí. Ukážeme postup výpočtu pro síťový graf, který je plochý (rovinový). *Plochý graf* lze v rovině znázornit tak, že žádná dvojice jeho hran se neprotíná a zároveň lze spojit jeho vstupní a výstupní uzly hranou, která se neprotíná s ostatními hranami.

Algoritmus stanovení maximální velikosti toku pro plochý síťový graf je následující:

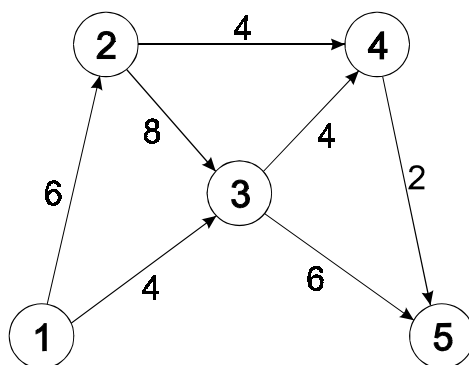
- Krok 1. Nalezneme z pohledu na zobrazenou síť nejhořejší (nejsevernější) cestu mezi vstupem a výstupem a označíme ji např. C_1 .
- Krok 2. Na cestě C_1 vybereme hranu s nejmenší kapacitou. Nechť je to hrana h_{rs} s kapacitou k_{rs} . Potom propustnost cesty C_1 , kterou označíme $k(C_1)$, je rovna k_{rs} .
- Krok 3. Síť upravíme tak, že na cestě C_1 vypustíme hranu s nejmenší kapacitou a hodnotu k_{rs} snížíme kapacity všech zbývajících hran na této cestě.
- Krok 4. Kroky 1a a 3. opakujeme na faktoru grafu, který vznikne z původní sítě, tak dlouho, dokud existuje mezi vstupem a výstupem nějaká cesta.

Krok 5. Maximální velikost toku v síti $V_{\max}$ udává součet propustností jednotlivých cest, tedy

$$V_{\max} = k(C_1) + k(C_2) + \dots$$

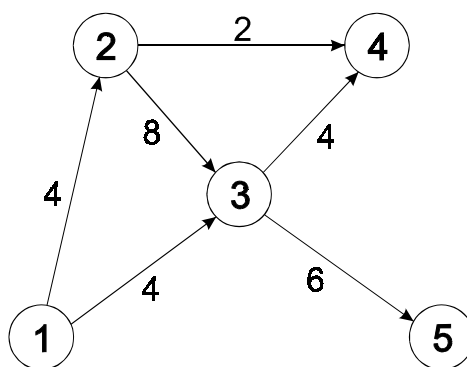
Příklad.

Najdeme maximální tok v síti znázorněné plochým grafem na obr. 6.6, jejímž vstupem je uzel u_1 a výstupem uzel u_5 .



Obr. 6.6

Nejhořejší cestu C_1 mezi vstupem a výstupem v síti na obrázku tvoří posloupnost hran h_{12} , h_{24} , h_{45} a její propustnost $k(C_1) = k_{45} = 2$. Faktor, který vznikne ze sítě vypuštěním hrany h_{45} a snížením kapacity zbývajících hran na cestě C_1 o hodnotu k_{45} , představuje obr. 6.7.

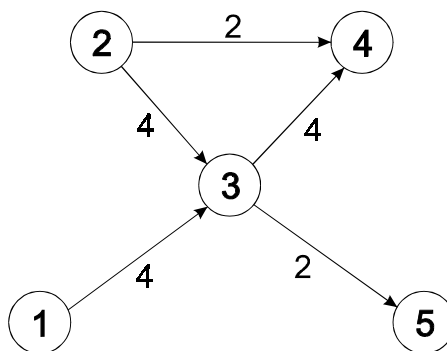


Obr. 6.7

V síti na obr. 6.7 je nejhořejší cesta C_2 určena posloupností hran h_{12} , h_{23} , h_{35} , takže propustnost $k(C_2) = k_{12} = 4$. Po úpravě podle třetího kroku dostaneme síť v podobě uvedené na obr. 6.8.

V této síti obsahuje nejhořejší cesta C_3 hrany h_{13} , h_{35} a propustnost $k(C_3) = k_{35} = 2$. Protože po vynechání hrany h_{35} neexistuje mezi vstupním a výstupním uzlem žádná cesta, výpočet je ukončen. Maximální velikost toku v síti zadané na obr. 6.5 je rovna součtu spočtených propustností jednotlivých cest, tedy

$$V_{\max} = k(C_1) + k(C_2) + k(C_3) = 8.$$



Obr. 6.8

6.4 ANALÝZA KRITICKÉ CESTY

Jednou z nejrozšířenějších oblastí aplikace teorie sítí v praxi jsou modely a metody *analýzy kritické cesty*. Jedná se o souhrnné označení nástrojů modelování a zkoumání relativně složitých systémů resp. procesů, s kterými se můžeme setkat při plánování, řízení, koordinaci a kontrole rozsáhlých projektů v oblasti investiční výstavby, stavebnictví, ve výzkumu a vývoji, v údržbě apod. a které jsou komplexem velkého množství technologicky a organizačně souvisejících činností.

Projekt lze charakterizovat jako prostorově a časově vymezený soubor vzájemně podmíněných činností, jejichž realizace v určeném pořadí je podmínkou dosažení stanoveného cíle. Celou množinu činností a jejich technologických a organizačních vztahů v určitém systému lze znázornit hranově nebo uzlově ohodnocenou sítí. V dalším se omezíme na častěji pro tento účel používané hranově ohodnocené síťové grafy.

Jednotlivé činnosti projektu jsou charakterizovány deterministickým nebo stochastickým způsobem především dobou trvání příp. jinými charakteristikami o výši nároků na různé druhy disponibilních zdrojů (pracovních sil, materiálu, energie, finančních prostředků), které představují *ohodnocení činností*.

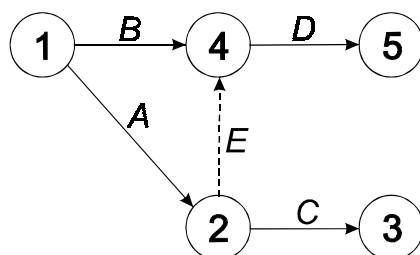
Při sestavení hranově ohodnocené sítě libovolného projektu se postupuje tak, že každé činnosti je přiřazena jedna orientovaná ohodnocená hrana. Začátek a konec činnosti mají charakter událostí a zobrazují se jako uzly. Jednotlivé činnosti se označují dvojicemi indexů, např. (i, j) - první je index počátečního uzlu příslušné hrany, druhý je index koncového uzlu. Při konstrukci síťového modelu je nutno dodržet zásadu, že pořadová čísla uzlů se neopakují a číslo počátečního uzlu hrany je vždy menší než číslo koncového uzlu stejné hrany.

Síťový graf používaný při analýze kritické cesty znázorňuje logické vazby jednotlivých činností, především vztahy jejich následnosti, přitom nesmí mít charakter multigrafu ani cyklického grafu. Jedná se o tyto možné případy:

- Určitá činnost B následuje bezprostředně po činnosti A , tedy činnost B nelze zahájit dříve než v okamžiku skončení činnosti A .
- Jedna činnost D navazuje na několik paralelních činností A, B, C , tedy zahájení činnosti D závisí na skončení všech bezprostředně předcházejících činností.
- Po určité činnosti A následuje bezprostředně několik jiných paralelních činností B a C , jejichž současné zahájení je možné teprve po skončení činnosti A .
- Zahájení několika paralelních činností C, D, E je bezprostředně závislé na skončení více předcházejících paralelně probíhajících činností A a B .

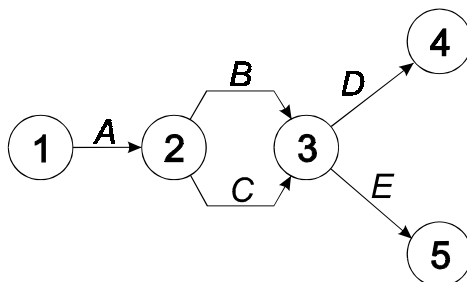
Kromě hran s kladným ohodnocením, které odpovídají skutečným činnostem, se mohou v síti vyskytnout i nulově ohodnocené hrany představující *fiktivní činnosti*. Tyto se používají k zobrazení vztahů následnosti či synchronizace reálných činností nebo k zamezení vzniku multigrafů. Názorně je představeno použití fiktivních hran na dvou příkladech.

1. Zobrazení v síti situace, kdy činnost D lze zahájit nejdříve po skončení dvou bezprostředně předcházejících paralelních činností A a B, zatímco činnost C probíhající paralelně s činností D, závisí pouze na skončení činnosti A. Jednu z možných variant řešení ukazuje obr. 6.9.

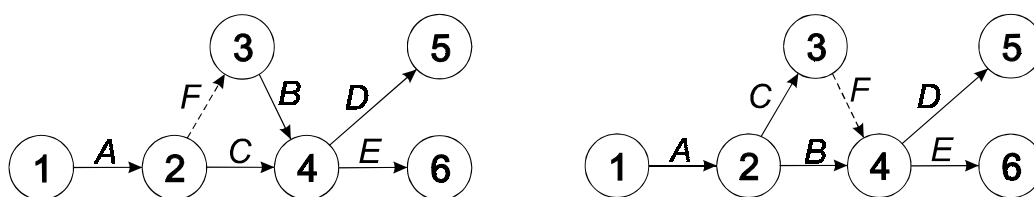


Obr. 6.9

2. Graf na obr. 6.10 zobrazuje situaci dvou paralelně probíhajících činností. Mezi dvojicí uzlů existují dvě paralelní hrany a graf je tedy multigrafem, což je pro analýzu kritické cesty nepřijatelné. Dva možné způsoby řešení ukazuje obr. 2.11.



Obr. 6.10



Obr. 6.11

Nejznámější a nejrozšířenější modely a metody síťové analýzy používané při plánování a řízení projektů, jsou známy pod označením CPM (Critical Path Method) a PERT (Program Evaluation and Review Technique). Společným rysem obou metod je, že jsou založeny na hranově ohodnocené síti a berou v úvahu pouze faktor času, slouží tedy k *časové analýze kritické cesty*.

6.4.1 Časová analýza sítě pomocí CPM

Metoda CPM pracuje v základním tvaru s hranově ohodnoceným síťovým grafem, ohodnoceným deterministicky. *Interpretace uzlů* je *konjunktivně deterministická*, tzn. že uzel je realizován, jsou-li realizovány všechny činnosti, které v něm končí. Realizace uzlu je podmínkou pro zahájení realizace všech činností, které z něho vystupují.

Zavedme následující symboly pro základní časové charakteristiky síťového grafu:

Charakteristiky síťového grafu:

vypočtené trvání projektu	T_n
plánované trvání projektu	T_p
termín zahájení projektu	T_0

Charakteristiky činností:

trvání činnosti (i, j)	t_{ij}
nejdříve možný začátek činnosti	ZM
nejpozději přípustný začátek činnosti	ZP
nejdříve možný konec činnosti	KM
nejpozději přípustný konec činnosti	KP
celková časová rezerva činnosti	RC
volná časová rezerva činnosti	RV
nezávislá časová rezerva činnosti	RN

Charakteristiky uzlů:

termín uzlu	T
nejdříve možný termín uzlu	TM
nejpozději přípustný termín uzlu	TP
rezerva uzlu	R

Časová analýza sítě metodou CPM předpokládá zadání:

- termínu zahájení projektu T_0 ,
- plánované trvání projektu, resp. termín koncového uzlu T_p ,
- doby trvání každé činnosti projektu t_{ij} .

Termín zahájení projektu T_0 může být zadán absolutně (např. 20.9.1999) nebo relativně (termín 0). Ostatní časové charakteristiky se pak podle T_0 vyjadřují rovněž absolutně nebo relativně.

Vlastní algoritmus metody CPM probíhá ve čtyřech fázích:

I. fáze – výpočet nejdříve možných začátků a konců činností.

Nejdříve možný začátek činnosti (i, j) - ZM_{ij} je dán nejdříve možným termínem uzlu i , tedy

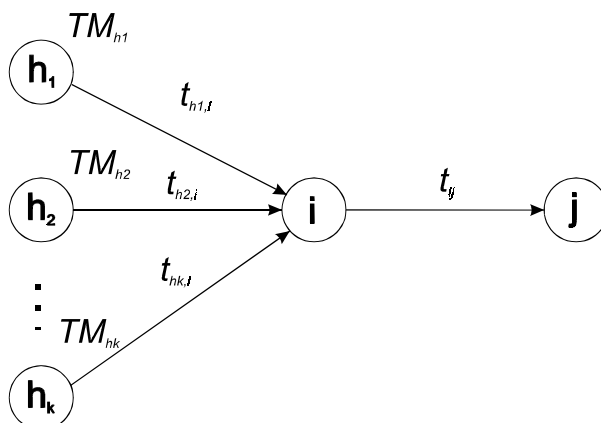
$$ZM_{ij} = TM_i. \quad (6.4.1)$$

Nejdříve možný termín libovolného uzlu se stanovuje postupně od počátečního uzlu dle vztahů:

$$TM_1 = T_0,$$

$$TM_i = \max_{(h,i) \in P} (TM_h + t_{hi}), \quad (6.4.2)$$

kde P je množina všech hran končících v uzlu i , jak ukazuje obr. 6.12.



Obr. 6.12

Nejdříve možný konec činnosti (i, j) - KM_{ij} je dán součtem nejdříve možného termínu zahájení činnosti (i, j) , tj. ZM_{ij} a doby trvání činnosti t_{ij} , tedy

$$KM_{ij} = ZM_{ij} + t_{ij}, \quad (6.4.3)$$

což lze vyjádřit rovněž

$$KM_{ij} = TM_i + t_{ij}. \quad (6.4.4)$$

Jestliže n je index výstupního uzlu, pak nejdříve možný termín výstupního uzlu TM_n znamená nejkratší dobu realizace projektu, která je rovna ohodnocení nejdelší cesty v síti mezi vstupním a výstupním uzlem.

II. fáze – výpočet nejpozději přípustných začátků a konců činností.

Nejpozději přípustný konec činnosti (i, j) - KP_{ij} je dán nejpozději přípustným termínem uzlu j . Pro libovolný uzel se stanoví nejpozději přípustný termín postupně od koncového (výstupního) uzlu síťového grafu dle vztahů:

$$TP_n = T_p, \quad (6.4.5)$$

$$TP_j = \min_{(j,h) \in P} (TP_h - t_{jh}), \quad (6.4.6)$$

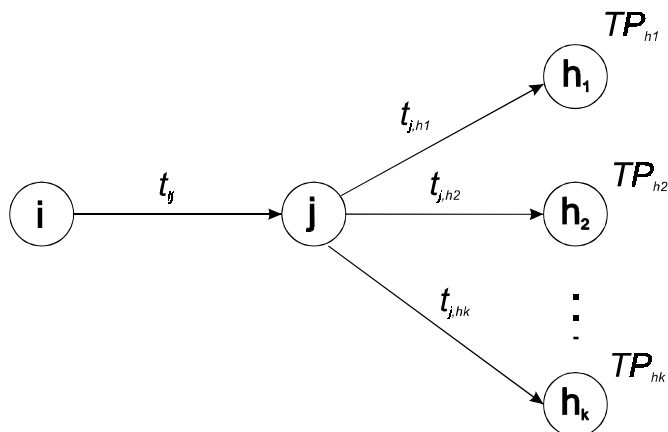
kde P je množina všech hran vystupujících z uzlu j , jak ukazuje obr. 6.13.

Nejpozději přípustný začátek činnosti (i, j) - ZP_{ij} je dán rozdílem nejpozději přípustného konce činnosti (i, j) , tj. KP_{ij} a doby trvání činnosti t_{ij} , tedy

$$ZP_{ij} = KP_{ij} - t_{ij}, \quad (6.4.7)$$

což lze rovněž vyjádřit

$$ZP_{ij} = TP_j - t_{ij}. \quad (6.4.8)$$



Obr. 6.13

Kritická cesta

Libovolná činnost (i, j) má pro realizaci vymezený časový interval $TP_j - TM_i$, neboť může začít nejdříve v termínu daném nejdříve možným termínem výchozího uzlu a musí skončit nejpozději v termínu daném nejpozději přípustným termínem uzlu koncového. Pro libovolnou činnost (i, j) musí tedy platit

$$t_{ij} \leq TP_j - TM_i.$$

V případě, že platí rovnost $t_{ij} = TP_j - TM_i$, nemáme zřejmě pro realizaci činnosti (i, j) žádnou časovou rezervu. Činnost s touto vlastností nazýváme *kritickou činností*. Kritickou cestou pak označíme cestu síťovým grafem od počátečního (vstupního) ke koncovému (výstupnímu) uzlu složenou z kritických činností.

III. fáze – výpočet časových rezerv činností.

Celkovou časovou rezervu činnosti RC zavádíme vztahem

$$RC_{ij} = TP_j - TM_i - t_{ij}. \quad (6.4.9)$$

Kritická cesta, resp. činnosti na kritické cestě mají celkovou časovou rezervu nulovou. Činnosti, které mají „malé“ celkové časové rezervy označujeme jako subkritické a mohou vytvářet tzv. *subkritické cesty*.

Vzhledem k rovnicím (6.4.1) až (6.4.8) lze celkovou časovou rezervu vyjádřit rovněž ve tvaru

$$RC_{ij} = ZP_{ij} - ZM_{ij}$$

nebo

$$RC_{ij} = KP_{ij} - KM_{ij}.$$

Celkovou časovou rezervu činnosti lze slovně interpretovat tak, že vyjadřuje velikost časového intervalu, o který lze zpozdit ukončení realizace činnosti (tj. posunout začátek činnosti, nebo prodloužit dobu trvání činnosti nebo kombinace obou), aniž by se změnilo trvání celého projektu.

Volnou časovou rezervu činnosti RV zavádíme vztahem

$$RV_{ij} = TM_j - TM_i - t_{ij}. \quad (6.4.10)$$

Vzhledem k tomu, že platí $TM_j \leq TP_j$, pak ze vztahů (6.4.9) a (6.4.10) plyne, že $RV_{ij} \leq RC_{ij}$.

Volnou časovou rezervu činnosti lze slovně interpretovat tak, že vyjadřuje velikost časového intervalu, o který lze zpozdit ukončení realizace činnosti, aniž by se tím zabránilo bezprostředně následujícím činnostem začít realizaci v nejdříve možném termínu.

Důvodem zavedení další časové rezervy je skutečnost, že ne všechny činnosti mající nenulové celkové časové rezervy mohou tuto vyčerpat. Vyčerpání celkové časové rezervy jednou činností znemožňuje vyčerpání celkové časové rezervy všem bezprostředně následujícím činnostem. Vyčerpání volné časové rezervy jednou činností nebrání následujícím činnostem vyčerpat rovněž volnou časovou rezervu.

Nezávislou časovou rezervu činnosti RN zavádíme vztahem

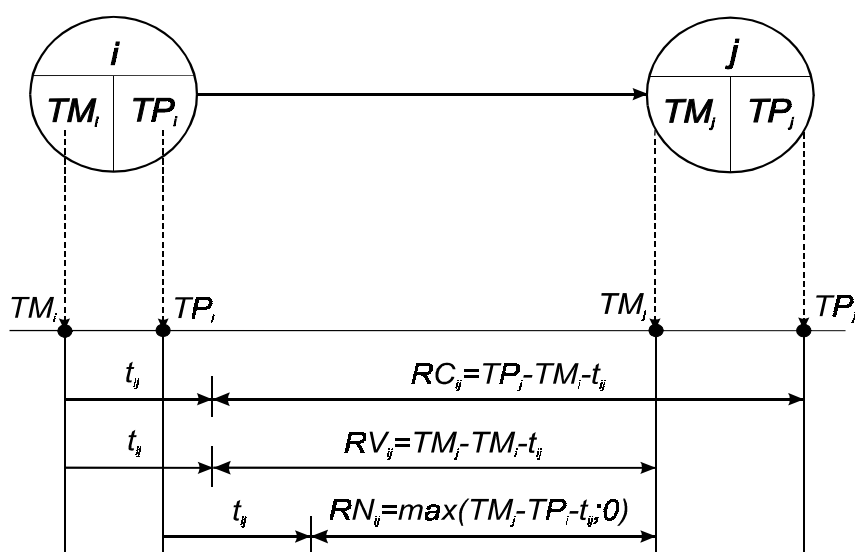
$$RN_{ij} = \max(TM_j - TP_i - t_{ij}; 0). \quad (6.4.11)$$

Vzhledem k tomu, že platí $TM_i \leq TP_i$, pak ze vztahů (6.4.10) a (6.4.11) lze odvodit, že $RN_{ij} \leq RV_{ij}$.

Nezávislou časovou rezervu činnosti lze slovně interpretovat tak, že vyjadřuje velikost časového intervalu, o který lze zpozdit ukončení realizace činnosti, která začala v nejpozději přípustném termínu, aniž by se tím zabránilo bezprostředně následujícím činnostem začít realizaci v nejdříve možném termínu.

Význam zavedení nezávislé časové rezervy spočívá v kombinaci využití všech uvedených časových rezerv u několika bezprostředně po sobě následujících činnostech.

Vztah mezi jednotlivými časovými rezervami schematicky ukazuje obr. 6.14.



Obr. 6.14

Je-li uzel i na kritické cestě, pak $TM_i = TP_i$ a $RV_{ij} = RN_{ij}$.

Je-li uzel j na kritické cestě, pak $TM_j = TP_j$ a $RC_{ij} = RV_{ij}$.

Jsou-li oba uzly i i j na kritické cestě, pak platí $TM_i = TP_i$, $TM_j = TP_j$ a současně pro časové rezervy $TP_j - TM_i - t_{ij} = RC_{ij} = RV_{ij} = RN_{ij} = 0$.

Příklad.

Proveďme časovou analýzu síťového grafu (nejkratší dobu trvání, kritickou cestu a časové rezervy), který reprezentuje model projektu zadaného v tabulce 6.1 činnostmi, jejich návaznostmi a dobou trvání.

označení činnosti	doba trvání t_{ij}	bezprostředně předcházející činnost
A	3	-
B	8	-
C	9	-
D	9	A
E	7	A
F	7	B
G	8	C
H	8	B, E
I	4	F
J	5	F
K	7	D
L	5	H, I
M	6	G, J

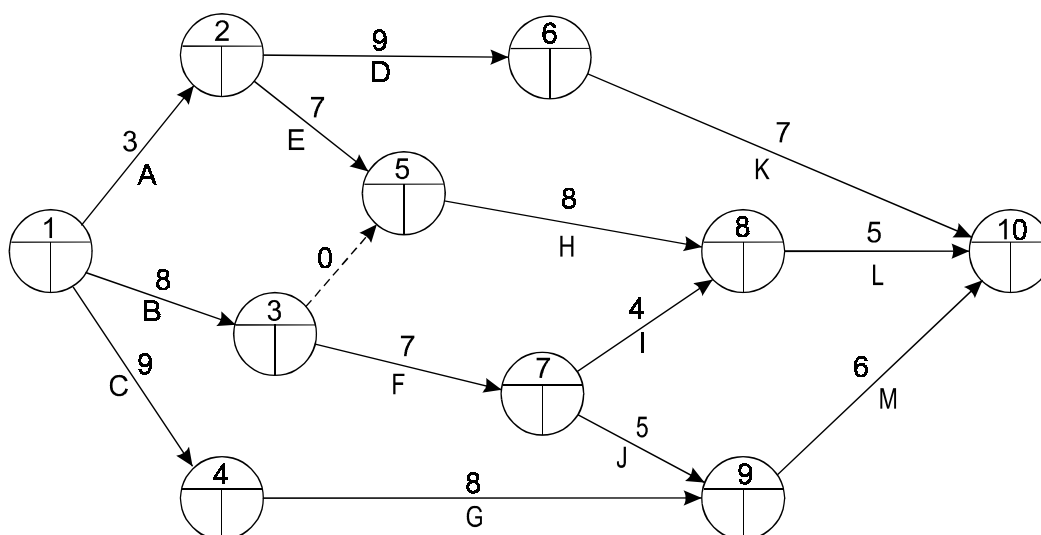
Tab. 6.2

Řešení.

1. Dle návaznosti činností uvedených v tabulce 6.2 sestrojíme hranově orientovaný síťový graf, očíslováme uzly tak, aby každá hrana vždy vycházela z uzlu nižšího pořadového čísla do uzlu s vyšším číslem. Síťový graf ukazuje obr. 6.15.
2. Obr. 6.16 ukazuje umístění jednotlivých zadaných a vypočítávaných časových charakteristik v síťovém grafu na příkladu jedné hrany a dvou uzlů i a j .
3. Fáze I – výpočet nejdříve možných začátků a konců činností.

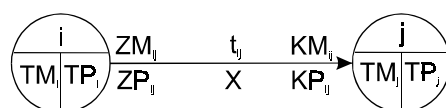
Položíme

$$TM_1 = 0.$$



Obr. 6.15

Obr. 6.16



Postupně vypočteme a do síťového grafu znázorníme následující veličiny

$$ZM_{12} = TM_1 = 0$$

$$KM_{12} = ZM_{12} + t_{12} = 0 + 3 = 3$$

$$TM_2 = KM_{12} = 3$$

$$ZM_{13} = TM_1 = 0$$

$$KM_{13} = ZM_{13} + t_{13} = 0 + 8 = 8$$

$$TM_3 = KM_{13} = 8$$

$$ZM_{14} = TM_1 = 0$$

$$KM_{14} = ZM_{14} + t_{14} = 0 + 9 = 9$$

$$TM_4 = KM_{14} = 9$$

$$ZM_{25} = TM_2 = 3$$

$$KM_{25} = ZM_{25} + t_{25} = 3 + 7 = 10$$

$$ZM_{35} = TM_3 = 8$$

$$KM_{35} = ZM_{35} + t_{35} = 8 + 0 = 8$$

$$TM_5 = \max(KM_{25}, KM_{35}) = \max(10, 8) = 10$$

$$ZM_{26} = TM_2 = 3$$

$$KM_{26} = ZM_{26} + t_{26} = 3 + 9 = 12$$

$$TM_6 = KM_{26} = 12$$

$$ZM_{37} = TM_3 = 8$$

$$KM_{37} = ZM_{37} + t_{37} = 8 + 7 = 15$$

$$TM_7 = KM_{37} = 15$$

$$ZM_{58} = TM_5 = 10$$

$$KM_{58} = ZM_{58} + t_{58} = 10 + 8 = 18$$

$$ZM_{78} = TM_7 = 15$$

$$KM_{78} = ZM_{78} + t_{78} = 15 + 4 = 19$$

$$TM_8 = \max(KM_{58}, KM_{78}) = \max(18, 19) = 19$$

$$ZM_{49} = TM_4 = 9$$

$$KM_{49} = ZM_{49} + t_{49} = 9 + 8 = 17$$

$$ZM_{79} = TM_7 = 15$$

$$KM_{79} = ZM_{79} + t_{79} = 15 + 5 = 20$$

$$TM_9 = \max(KM_{49}, KM_{79}) = \max(17, 20) = 20$$

$$ZM_{6,10} = TM_6 = 12$$

$$KM_{6,10} = ZM_{6,10} + t_{6,10} = 12 + 7 = 19$$

$$ZM_{8,10} = TM_8 = 19$$

$$KM_{8,10} = ZM_{8,10} + t_{8,10} = 19 + 5 = 24$$

$$ZM_{9,10} = TM_9 = 20$$

$$KM_{9,10} = ZM_{9,10} + t_{9,10} = 20 + 6 = 26$$

$$TM_{10} = \max(KM_{6,10}, KM_{8,10}, KM_{9,10}) = \max(19, 24, 26) = 26$$

Nejkratší doba průchodu sítě (nejkratší doba, za kterou lze projekt uskutečnit) je 26 čas. jednotek. Situaci po I. fázi výpočtu ukazuje obr. 6.17. Maximální hodnoty nejdříve možných konců činností, které stanovují nejdříve možný termín uzlu, do kterého míří, jsou podtrženy.

4. Fáze II – výpočet nejpozději přípustných konců a začátků činností

Vzhledem k tomu, že není zadán plánovaný termín ukončení projektu, položíme

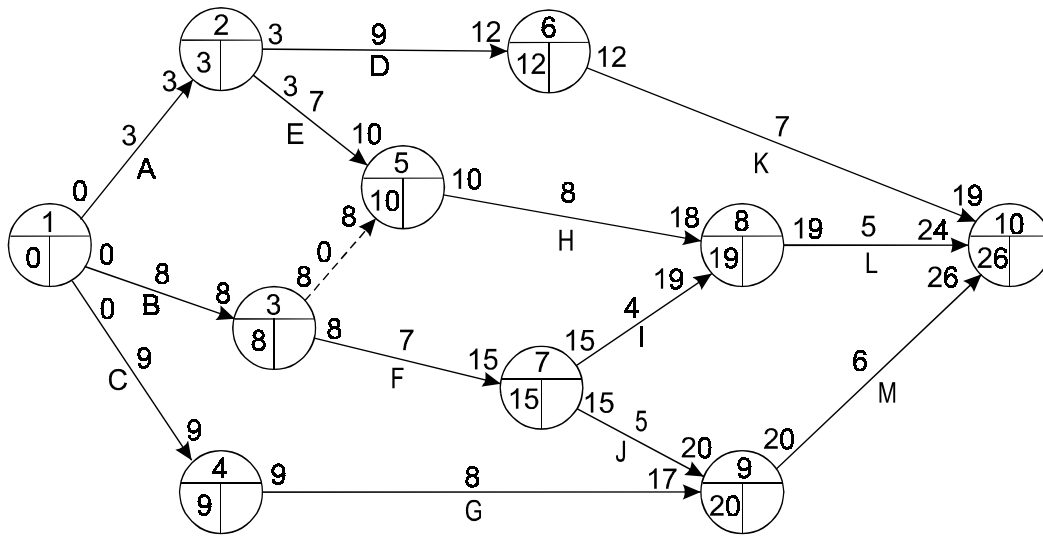
$$TP_{10} = TM_{10} = 26$$

Postupně vypočteme a do síťového grafu znázorníme následující veličiny

$$KP_{6,10} = TP_{10} = 26$$

$$ZP_{6,10} = KP_{6,10} - t_{6,10} = 26 - 7 = 19$$

$$TP_6 = ZP_{6,10} = 19$$



Obr. 6.17

$$KP_{8,10} = TP_{10} = 26$$

$$ZP_{8,10} = KP_{8,10} - t_{8,10} = 26 - 5 = 21$$

$$TP_8 = ZP_{8,10} = 21$$

$$KP_{9,10} = TP_{10} = 26$$

$$ZP_{9,10} = KP_{9,10} - t_{9,10} = 26 - 6 = 20$$

$$TP_9 = ZP_{9,10} = 20$$

$$KP_{78} = TP_8 = 21$$

$$ZP_{78} = KP_{78} - t_{78} = 21 - 4 = 17$$

$$KP_{79} = TP_9 = 20$$

$$ZP_{79} = KP_{79} - t_{79} = 20 - 5 = 15$$

$$TP_7 = \min(ZP_{78}, ZP_{79}) = \min(17, 15) = 15$$

$$KP_{58} = TP_8 = 21$$

$$ZP_{58} = KP_{58} - t_{58} = 21 - 8 = 13$$

$$TP_5 = ZP_{58} = 13$$

$$KP_{49} = TP_9 = 20$$

$$ZP_{49} = KP_{49} - t_{49} = 20 - 8 = 12$$

$$TP_4 = ZP_{49} = 12$$

$$KP_{35} = TP_5 = 13$$

$$ZP_{35} = KP_{35} - t_{35} = 13 - 0 = 13$$

$$KP_{37} = TP_7 = 15$$

$$ZP_{37} = KP_{37} - t_{37} = 15 - 7 = 8$$

$$TP_3 = \min(ZP_{35}, ZP_{37}) = \min(13, 8) = 8$$

$$KP_{25} = TP_5 = 13$$

$$ZP_{25} = KP_{25} - t_{25} = 13 - 7 = 6$$

$$KP_{26} = TP_6 = 19$$

$$ZP_{26} = KP_{26} - t_{26} = 19 - 9 = 10$$

$$TP_2 = \min(ZP_{25}, ZP_{35}) = \min(6, 10) = 6$$

$$KP_{12} = TP_2 = 6$$

$$ZP_{12} = KP_{12} - t_{12} = 6 - 3 = 3$$

$$KP_{13} = TP_3 = 8$$

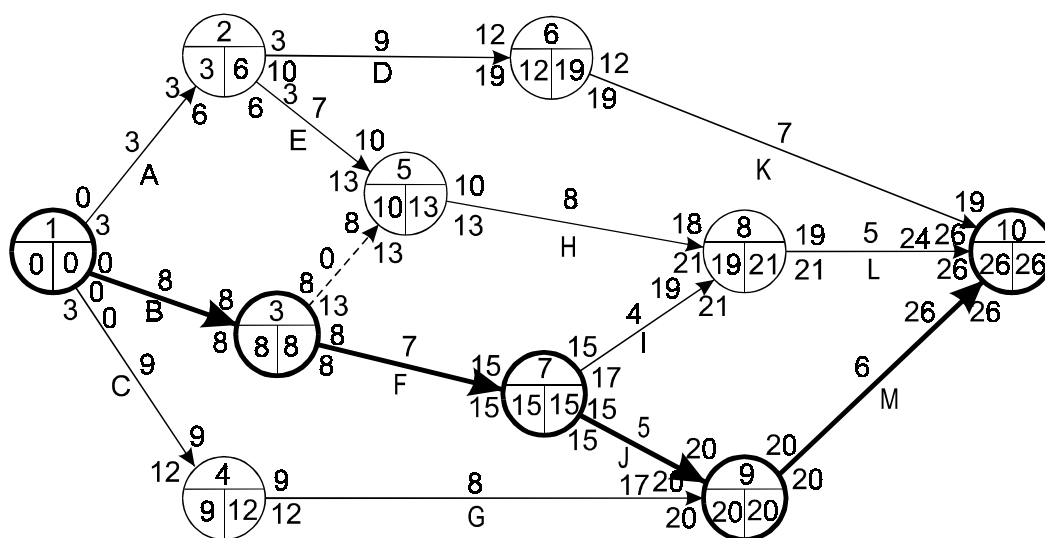
$$ZP_{13} = KP_{13} - t_{13} = 8 - 8 = 0$$

$$KP_{14} = TP_4 = 12$$

$$ZP_{14} = KP_{14} - t_{14} = 12 - 9 = 3$$

$$TP_1 = \min(ZP_{12}, ZP_{13}, ZP_{14}) = \min(3, 0, 3) = 0$$

Kritickou cestu lze pro případ, kdy $TP_{10} = TM_{10}$, s výhodou stanovit tak, že kritické činnosti tvořící kritickou cestu prochází přes uzly k_i , pro které platí $TM_k = TP_k$. Kritická cesta je tvořena činnostmi B, F, J a M resp. (1,3), (3,7), (7,9) a (9,10). Situaci po II. fázi výpočtu ukazuje obr. 6.18. Minimální hodnoty nejpozději přípustných začátků činností, které stanovují nejpozději přípustný termín uzlu, jsou podtrženy. Kritická cesta je v grafu vyznačena tučně.



Obr. 6.18

5. Fáze III – výpočet časových rezerv

Výpočet časových rezerv celkové, volné a nezávislé je uspořádan v tab. 6.3. Při výpočtu jsou použity vypočtené hodnoty nejdříve možných a nejpozději přípustných termínů uzlů a vztahy (6.4.9), (6.4.10) a (6.4.11).

činnost			počáteční uzel		koncový uzel		č. rezerva celková	č. rezerva volná	č. rezerva nezávislá
	(i,j)	t_{ij}	TM_i	TP_i	TM_j	TP_j	RC_{ij}	RV_{ij}	RN_{ij}
A	(1,2)	3	0	0	3	6	3	0	0
B	(1,3)	8	0	0	8	8	0	0	0
C	(1,4)	9	0	0	9	12	3	0	0
D	(2,6)	9	3	6	12	19	7	0	0
E	(2,5)	7	3	6	10	13	3	0	0
F	(3,7)	7	8	8	15	15	0	0	0
G	(4,9)	8	9	12	20	20	3	3	0
H	(5,8)	8	10	13	19	21	3	1	0
I	(7,8)	4	15	15	19	21	2	0	0
J	(7,9)	5	15	15	20	20	0	0	0
K	(6,10)	7	12	19	26	26	7	7	0
L	(8,10)	5	19	21	26	26	2	2	0
M	(9,10)	6	20	20	26	26	0	0	0

Tab. 6.3

6.4.2 Časová analýza sítě pomocí PERT

Při použití CPM k plánování a řízení průběhu projektu se neberou v úvahu žádné stochastické aspekty. V praxi se však v některých případech nedá přesně určit doba trvání činností. Především u projektů z oblasti vývoje a výzkumu se jedná zpravidla o unikátní činnosti, s jejichž realizací jsou jen malé nebo žádné zkušenosti. Vzniká tedy potřeba vyjádřit závislost výsledků časové analýzy na přesnosti vstupních údajů síťového modelu.

Pokud deterministicky ohodnocená síť přestane být adekvátním modelem skutečnosti, je nutné pro časovou analýzu projektu vyjít ze *stochasticky ohodnoceného síťového grafu*, z kterého vychází metoda PERT. Na rozdíl od CPM nejsou tedy k dispozici přesné doby trvání činností, a proto se vychází z předpokladu, že trvání jednotlivých činností má náhodný charakter a jeho rozdělení lze adekvátně popsat některým *statistickým rozdělením*.

Pro časové ohodnocení hrany síťového modelu PERT se stanovují na základě expertního odhadu pro každou činnost (i,j) tři doby trvání:

- nejpravděpodobnější odhad - m_{ij} ,
- optimistický odhad - a_{ij} ,
- pesimistický odhad - b_{ij} .

Nejpravděpodobnější odhad doby trvání činnosti vychází z normálních podmínek při její realizaci. *Optimistický odhad* odpovídá nejkratšímu předpokládanému trvání činnosti za extrémně příznivých podmínek, *pesimistický odhad* představuje nejdelší předpokládané trvání činnosti, který přihlíží k možnému výskytu nepříznivých podmínek.

Nejvhodnější aproximací rozdělení dob trvání jednotlivých činností jako stochastických veličin je *beta rozdělení*. Jeho užitečnou vlastností kromě unimodálnosti a konečného variačního rozpětí je, že v závislosti na hodnotách parametrů může být jak symetrické tak různým způsobem pozitivně nebo negativně sešikmené. Umožňuje tedy dostatečně pružně modelovat rozdělení hustoty pravděpodobností trvání jednotlivých činností.

Za předpokladu beta rozdělení dob trvání činností lze ze tří odhadů pro každou činnost stanovit základní charakteristiky rozdělení, t.j. střední hodnotu $\bar{y}_{ij}$, směrodatnou odchylku σ_{ij} a rozptyl σ_{ij}^2 .

Střední hodnotu trvání libovolné činnosti (i,j) lze přibližně vyjádřit jako

$$\bar{y}_{ij} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6}. \quad (6.4.12)$$

Interpretuje se tak, že s pravděpodobností 0.5 je skutečná doba trvání činnosti $y_{ij} \leq \bar{y}_{ij}$. V případě symetrického rozdělení platí, že $\bar{y}_{ij} = m_{ij}$. Vzhledem k tomu, že beta rozdělení je unimodální, lze pro jeho rozpětí použít vztah $b_{ij} - a_{ij} = 6\sigma_{ij}$. Pro směrodatnou odchylku, resp. rozptyl pak dostaneme

$$\sigma_{ij} = \frac{b_{ij} - a_{ij}}{6}, \quad (6.4.13)$$

$$\sigma_{ij}^2 = \left(\frac{b_{ij} - a_{ij}}{6} \right)^2. \quad (6.4.14)$$

Pro všechny činnosti projektu se tedy nejprve stanoví odhady středních hodnot dob jejich trvání a ty se použijí k ohodnocení hran v síťovém grafu. Potom lze přistoupit k výpočtu kritické cesty a časových rezerv činností stejným způsobem jako v případě CPM.

Jestliže doby trvání činností jsou vzájemně nezávislé a mají shodná beta rozdělení, pak střední hodnota trvání celého projektu $\bar{T}$ je dána součtem středních hodnot trvání kritických činností, které jsou v případě metody PERT stochastickými veličinami. Stejně tak směrodatná odchylka i rozptyl doby trvání projektu σ_T , resp. σ_T^2 jsou rovny součtu směrodatných odchylek resp. rozptylů trvání jednotlivých činností na kritické cestě.

Při časové analýze sítě metodou PERT, vzhledem k náhodnému charakteru dob trvání činností, je vhodné stanovit také *pravděpodobnost ukončení projektu* za dobu $\bar{T}$ a pravděpodobnost, že např. celý projekt skončí za předem určenou dobu, která se liší od spočtené střední hodnoty $\bar{T}$, příp. stanovit střední hodnotu doby realizace projektu, jestliže připustíme, že s určitou pravděpodobností projekt neskončí v době $\bar{T}$, ale později.

Tyto charakteristiky lze vypočítat za předpokladu, že rozdělení doby trvání projektu jako náhodné veličiny lze aproximativně popsat např. *normálním rozdělením*, což je zpravidla splněno pro dostatečně velký počet činností (alespoň 30) na kritické cestě (na základě centrální limitní věty). Hledané pravděpodobnosti se pak určí jako hodnoty distribuční funkce normálního rozdělení.

Pro náhodnou veličinu t normovanou ve tvaru

$$t = \frac{T - \bar{T}}{\sigma_T},$$

kteřá má normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a s jednotkovým rozptylem, lze nalézt odpovídající pravděpodobnosti v tabulce hodnot distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.

Pravděpodobnost $p(T \leq \bar{T})$, že skutečná doba realizace projektu nepřekročí vypočtenou střední hodnotu trvání projektu $\bar{T}$, je rovna 0.5. Podobně lze vyčíslit pravděpodobnosti dodržení termínů ukončení i některých rozhodujících etap projektu - tzv. *milníků* nebo dokonce jednotlivých činností.

Příklad.

Tab. 6.4 reprezentuje zadání sítě jako modelu projektu skládajícího se ze 14 činností a 8 uzlů. Pro jednotlivé činnosti jsou známy tři odhady doby trvání (ve dnech) - a_{ij} , m_{ij} , b_{ij} a z nich podle rovnic (6.4.12) a (6.4.13) spočtené hodnoty $\bar{y}_{ij}$ a σ_{ij} . Úlohou je nalézt kritickou cestu metodou PERT, stanovit střední hodnotu trvání projektu a určit pravděpodobnost, že doba realizace celého projektu nepřekročí určitý limit, např. 158 dní.

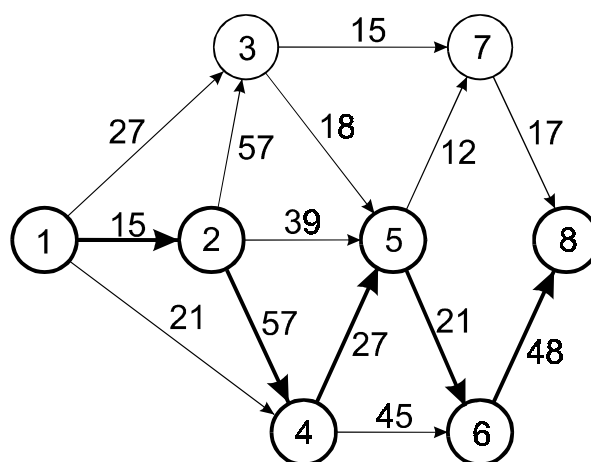
(i,j)	a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}	$\bar{y}_{ij}$	σ_{ij}
(1,2)	9	13.5	27	15	3
(1,3)	24	27	30	27	1
(1,4)	15	21	27	21	2
(2,3)	45	54	81	57	6
(2,4)	54	57	60	57	1
(2,5)	30	36	60	39	5
(3,5)	15	16.5	27	18	2
(3,7)	9	12	33	15	4
(4,5)	24	27	30	27	1
(4,6)	36	42	66	45	5
(5,6)	18	21	24	21	1
(5,7)	9	12	15	12	1
(6,8)	42	45	66	48	4
(7,8)	14	17	20	17	1

Tab. 6.4

Na obrázku 6.19 je znázorněna hranově ohodnocená síť projektu - hrany jsou ohodnoceny hodnotami $\bar{y}_{ij}$ dle tabulky 6.4. Kritickou cestu stanovíme stejně jako v metodě CPM výpočtem nejdříve možných a nejpozději přípustných termínů uzlů - tvoří ji posloupnost uzlů 1,2,4,5,6,8. Na obr. 6.19 i v tab. 6.4 je kritická cesta vyznačena tučně.

Střední hodnota doby realizace projektu $\bar{T}$ a směrodatná odchylka doby trvání projektu σ_T jsou dány součtem odpovídajících hodnot kritických činností. Tedy

$$\bar{T} = 168 \text{ dní}, \sigma_T = 10 \text{ dní}.$$



Obr. 6.19

Předpokládáme-li přibližně normální rozdělení doby trvání projektu, můžeme např. stanovit (použitím tabulky distribuční funkce normovaného normálního rozdělení), že s pravděpodobností 0.683 skončí celý projekt v rozmezí $\bar{T} \pm \sigma_T$, t.j. v intervalu od 158 do 178 dní. Ukončení projektu v intervalu $\bar{T} \pm 2\sigma_T$, t.j. za 148 až 188 dní, lze očekávat s pravděpodobností 0.955.

Stanovme pravděpodobnost, že projekt skončí o 10 dní dříve, než je spočtená střední hodnota $\bar{T}$:

$$p(T \leq 158) = p\left(t \leq \frac{158 - 168}{10}\right) = p(t \leq -1) = 0.159,$$

t.j. pravděpodobnost realizace projektu nejpozději za 158 dní je pouze 15.9%.

Pokud připustíme např. 10%-ní riziko, že projekt nebude ukončen v požadované lhůtě (odpovídající pravděpodobnost je 0.90), nalezneme v tabulce normovaného normálního rozdělení odpovídající hodnotu $t = 1.28$. Z rovnice

$$1.28 = \frac{T - 168}{10}$$

vypočteme dobu trvání projektu $T = 180.8$. Je-li tedy stanovena plánovaná doba realizace projektu na 181 dní, bude s 10%-ní pravděpodobností skutečná doba trvání projektu delší.

Podobné výsledky lze získat i pro jednotlivé milníky, příp. pro všechny uzly síťového grafu.

6.4.3 Časově nákladová analýza sítě

Metody CPM i PERT představují velmi zjednodušené modely reálných úloh v tom smyslu, že jediným kritériem při hledání kritické cesty je čas. V praxi je však nutné posuzovat nejen průběh a celkovou realizaci projektu, ale i efektivnost projektu jako celku, t.j. z hlediska závislosti délky jeho trvání na spotřebovaných prostředcích nebo zdrojích nebo na souhrnném ukazateli - výši nákladů.

Hledisko nákladů je zpravidla základním kritériem efektivnosti projektu. Délku trvání některých nebo všech činností lze obvykle zkrátit vynaložením většího objemu prostředků či

zdrojů při realizaci projektu, t.j. zvýšením přímých nákladů na projekt, které jsou dány součtem přímých nákladů na jednotlivé činnosti. Tím vzniká určitý počet kombinací dob trvání jednotlivých činností, které vedou k ukončení projektu v plánovaném termínu. Každé z možných kombinací odpovídá určitá výše nákladů a nabízí se tím úloha nalezení takové optimální časově-nákladové kombinace činností, která např. minimalizuje výši celkových přímých nákladů projektu při dodržení daného termínu ukončení nebo doby trvání projektu. Řešení takové úlohy je možné např. pomocí CPM/COST, což je v podstatě metoda kritické cesty rozšířená o nákladové hledisko (analogicky PERT/COST).

Závislost doby trvání a přímých nákladů činností.

Při hledání nákladově optimální kritické cesty se vychází z předpokladu, že normální (t.j. nejdelší přípustné) době trvání činnosti (i,j), označme ji D_{ij} , odpovídají normální (t.j. minimální) přímé náklady, označme je $c_{ij}(D)$. Zkrácení doby trvání libovolné činnosti vyžaduje vynaložení dodatečných nákladů, nejkratší možnou dobu trvání činnosti (i,j) označme d_{ij} a jí odpovídající maximální přímé náklady $c_{ij}(d)$.

Doba trvání činnosti y_{ij} se tedy může pohybovat v intervalu

$$d_{ij} \leq y_{ij} \leq D_{ij}, \quad (6.4.15)$$

podobně pro výši přímých nákladů $c_{ij} = f(y_{ij})$ platí

$$c_{ij}(D) \leq c_{ij} \leq c_{ij}(d). \quad (6.4.16)$$

Závislost přímých nákladů na době trvání jednotlivých činností lze zpravidla vyjádřit spojitými nákladovými křivkami, většinou se však vystačí s jejich diskrétními hodnotami v konečném intervalu, vymezeném krajními body o souřadnicích $[d_{ij}, c_{ij}(d)]$ a $[D_{ij}, c_{ij}(D)]$ nebo lineární funkcí v tomto intervalu. Hodnota nákladové křivky v bodu $[D_{ij}, c_{ij}(D)]$ odpovídá normálnímu režimu činnosti, výše nákladů v bodu $[d_{ij}, c_{ij}(d)]$ charakterizuje maximálně intenzivní režim činnosti.

Rovnici přímky, znázorňující pro každou činnost síťového modelu aproximativně průběh závislosti c_{ij} na y_{ij} , lze psát ve tvaru

$$c_{ij} = b_{ij} - a_{ij}y_{ij}, \quad \text{kde } a_{ij} \geq 0, b_{ij} > 0. \quad (6.4.17)$$

Regresní koeficient a_{ij} , který je směrnici přímky (6.17), se vypočte pro všechny činnosti ze vzorce

$$a_{ij} = \frac{c_{ij}(d) - c_{ij}(D)}{D_{ij} - d_{ij}} \quad (6.4.18)$$

a nazývá se *koeficientem nákladového spádu*, neboť udává průměrné zvýšení přímých nákladů vyvolané zkrácením doby trvání příslušné činnosti o jednotku.

Závislost doby trvání a přímých nákladů projektu.

Dobu realizace projektu T lze zkrátit pouze vynaložením dodatečných nákladů u kritických činností, zatímco u nekritických činností by se tím jen zvýšily časové rezervy těchto činností.

Pro normální (nejdelší přípustné) doby trvání všech činností, t.j. pro $y_{ij} = D_{ij}$, označme celkovou dobu realizace projektu T_D (maximální) a jí odpovídající přímé náklady projektu c_D .

Mají-li všechny činnosti nejkratší možnou dobu trvání, t.j. $y_{ij} = d_{ij}$, označme celkovou dobu realizace projektu T_d (minimální) a jí odpovídající přímé náklady c_d .

Přípustná doba realizace projektu se tedy může pohybovat v intervalu

$$T_d \leq T \leq T_D,$$

přitom pro odpovídající výši přímých nákladů projektu $c(T)$ platí

$$c_D \leq c(T) \leq c_d.$$

Celkové přímé náklady na projekt lze s využitím rovnice (6.4.17) vyjádřit jako součet lineárních nákladových funkcí množiny všech hran (činností). Tedy

$$c(T) = \sum_{i,j} (b_{ij} - a_{ij} y_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.4.19)$$

Optimalizační úloha pak spočívá buď v minimalizaci celkových přímých nákladů $c(T)$ při dané maximálně přípustné době trvání projektu T , nebo v minimalizaci doby realizace projektu při stanovené výši jeho celkových přímých nákladů. Za předpokladu lineární závislosti času a přímých nákladů a při znalosti nejkratší možné a nejdelší přípustné doby trvání každé činnosti d_{ij} , resp. D_{ij} lze úlohu formulovat jako problém parametrického lineárního programování s parametrem T .

Matematický model minimalizační úlohy celkových přímých nákladů lze zformulovat:

hledáme takové nezáporné hodnoty dob trvání činností y_{ij} , které splňují omezení

$$\begin{aligned} t_j(0) - t_i(0) &\geq y_{ij} \\ t_n(1) - t_1(0) &= T \\ y_{ij} &\leq D_{ij} \\ y_{ij} &\geq d_{ij} \end{aligned} \quad (6.4.20)$$

a minimalizují účelovou funkci

$$c(T) = \sum_{i,j} (b_{ij} - a_{ij} y_{ij}) \rightarrow \min. \quad (6.4.21)$$

Řešení úloh tohoto typu standardními postupy matematického programování není většinou efektivní, proto byly vyvinuty speciální algoritmy založené na vlastnostech duálních úloh a jsou realizovány výhradně na počítači.

Závislost doby trvání a celkových nákladů projektu.

Vzhledem k tomu, že s realizací projektu jsou kromě přímých nákladů na jednotlivé činnosti spojeny i nepřímé náklady související s realizací projektu jako celku, přihlíží se v časově-nákladové analýze sítě k celkovým nákladům projektu.

Nepřímé náklady projektu $c(T)$ představují většinou režijní náklady příp. ztráty, které vznikají např. prodloužením doby projektu. Zjednodušeně předpokládejme, že jsou opět lineární funkcí doby realizace projektu T .

Celkové náklady projektu $N_{celk}(T)$ lze pak vyjádřit jako součet obou druhů nákladů, tedy

$$N_{celk}(T) = C(T) + c(T). \quad (6.4.22)$$

Optimální kritickou cestu z hlediska celkových nákladů na projekt lze určit jako minimum nákladové funkce (6.4.22) vzhledem k T z intervalu $T_d \leq T \leq T_D$. Tímto postupem se stanoví doba realizace T_0 , která odpovídá minimální výši celkových nákladů na projekt.

Jelikož o době realizace projektu rozhodují doby trvání kritických činností, lze dospět ke snížení celkových nákladů projektu pouze zkrácením doby trvání činností na kritické cestě, pro které navíc musí platit, že $a_{ij} < a$, kde a je regresní koeficient lineární funkce nepřímých nákladů vyjádřitelné ve tvaru

$$c(T) = b + aT, \quad \text{pro } T_d \leq T \leq T_D. \quad (6.4.23)$$

Optimální dobu trvání projektu T_0 , pro kterou je vynaložení minimálních celkových nákladů minimální, lze aproximativně stanovit následujícím způsobem:

- Krok 1. Nalezneme kritickou cestu v síti pro normální doby trvání všech činností D_{ij} a stanovíme výchozí maximální dobu realizace projektu T_D a jí odpovídající výši celkových nákladů $N_{celk}(T_D)$.
- Krok 2. Vyhledáme na výchozí kritické cestě činnost a minimálním koeficientem a_{ij} a platí-li $a_{ij} < a$, zkrátíme dobu jejího trvání na d_{ij} a určíme novou kritickou cestu a s ní spojené náklady.
- Krok 3. Postup kroku 2 opakujeme tak dlouho, pokud existuje nějaká dosud nezkrácená činnost, pro kterou platí $a_{ij} < a$.

6.4.4 Časově zdrojová analýza sítě

Metody síťové analýzy určené pro řízení projektů umožňují kromě již uvedených časové a časově-nákladové analýzy také *analýzu zdrojů* resp. *kapacit*. Jednotlivé činnosti vyžadují vždy určité zdroje, jako např. pracovní síly, výrobní zařízení a stroje, dopravní prostředky, energie, různé druhy materiálů, finanční prostředky. Vzhledem k tomu, že jejich disponibilní kapacity jsou zpravidla omezené, je třeba znát v libovolném časovém období realizace projektu potřebu těchto zdrojů a bilancovat ji s disponibilními kapacitami. Jinak se může stát, že kritická cesta stanovená jen na základě časové analýzy sítě není z důvodu nedostatku potřebných zdrojů realizovatelná.

V následujícím bude popsán dva typy úloh, jejichž řešení je možné pomocí časově-zdrojové analýzy síťového grafu.

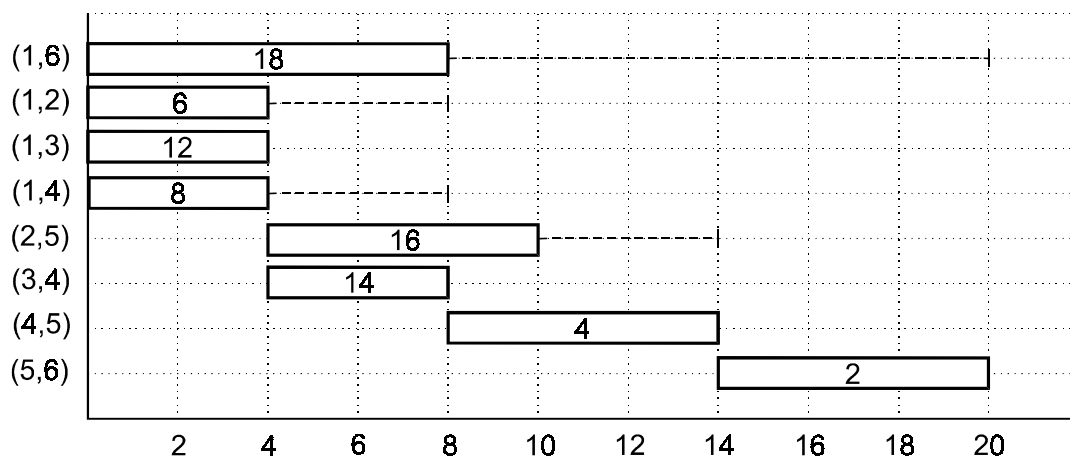
Vyrovňávání potřeby zdrojů.

Předmětem řešení úkolu je dosáhnout co nejrovnoměrnějšího využívání jednotlivých zdrojů v průběhu realizace projektu pomocí regulace jejich spotřeby. Tím lze snížit maximální potřebu zdrojů, aniž by se prodloužila doba trvání celého projektu. Princip regulace potřeby v případě jednoho spotřebovávaného zdroje bude ukázán na příkladu.

Příklad.

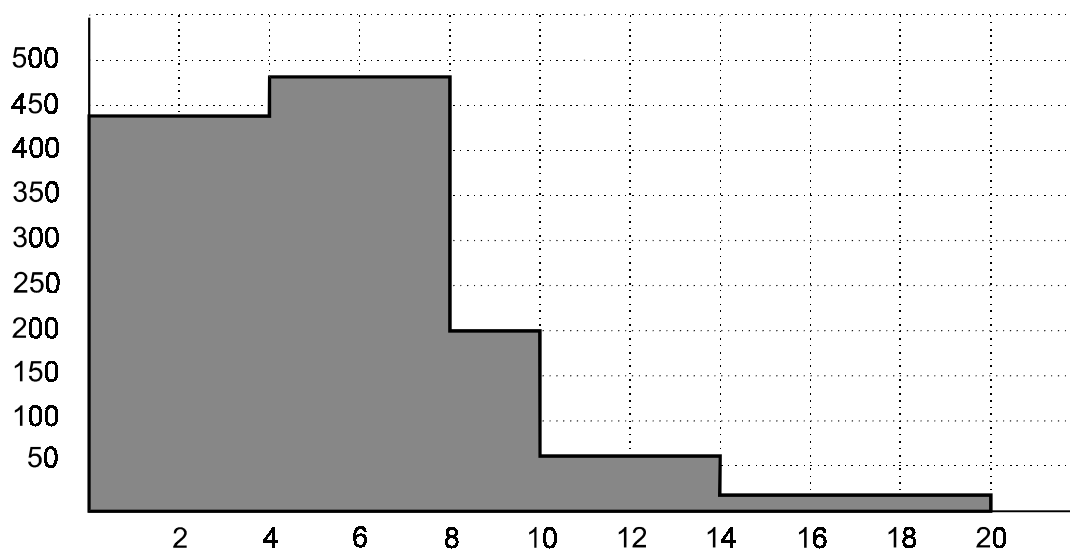
Na obr. 6.20 je ve formě sloupcového časového diagramu zakresleno výsledné časové řešení, získané při určení kritické cesty v síti o 6 uzlech a 8 činnostech pomocí CPM. Na vodorovné ose je vyznačen čas v týdnech, na svislé ose jednotlivé činnosti (i, j) . Číslo v každém z obdélníků vyjadřují nároky příslušné činnosti na finanční prostředky v tisících Kč. Přerušované čáry vyznačují nejpozději přípustné konce těch činností, které mají kladné celkové časové

rezervy, přitom všechny činnosti začínají v nejdříve možných termínech. Kritickou cestu v délce 20 týdnů tvoří posloupnost činností (1, 3), (3, 4), (4, 5) a (5, 6).



Obr. 6.20

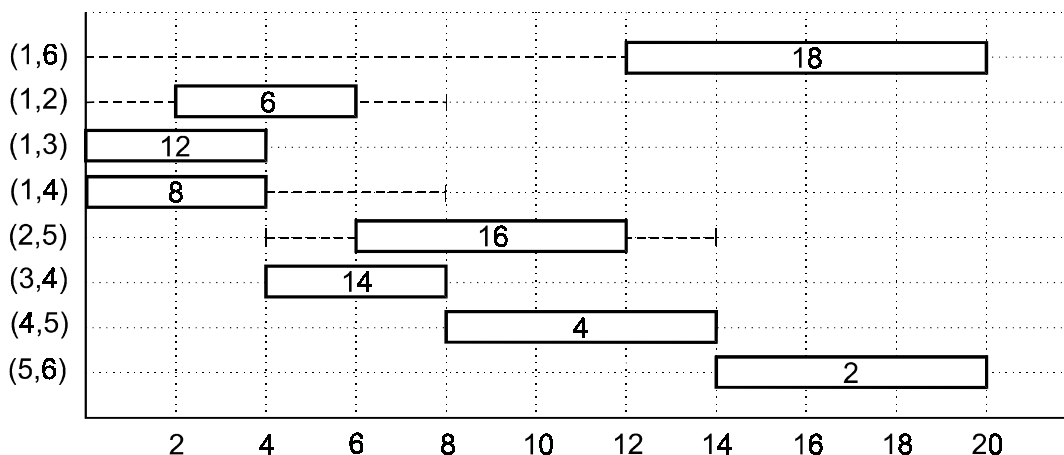
Pomocí časového diagramu na obr. 6.20 můžeme sestavit graf znázorňující rozdělení vynakládaných finančních prostředků v čase, který se nazývá *diagram potřeby zdrojů*. Získáme ho jednoduše sumariací nároků na finanční prostředky za všechny paralelně probíhající činnosti v každém období – viz obr. 6.21.



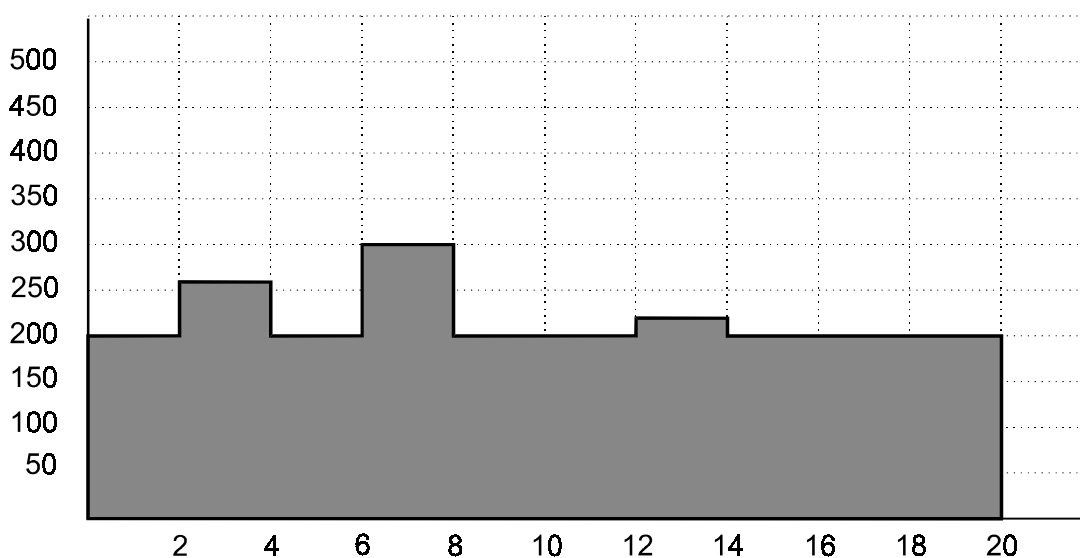
Obr. 6.21

Z diagramu na obr. 6.21 je zřejmé, že nároky na finanční prostředky jsou v průběhu realizace projektu značně variabilní a pohybují se od 480 000 Kč v pátém až osmém týdnu do 20 000 Kč v patnáctém až dvacátém týdnu. Zároveň je z obr. 6.20 vidět, že činnosti (1, 6), (1, 2), (1, 4) a (2, 5) mají kladné celkové časové rezervy. Lze tedy posunout termíny jejich začátků v rozmezí těchto rezerv, aniž by došlo k ke zpoždění zahájení následných činností. Provedeme-li posunutí začátků činností tak, jak je znázorněno na obr. 6.22 (začátek činnosti (1, 6) je posunut do třináctého týdne, činnost (1, 2) do třetího týdne a činnost (2, 5) do sedmého týdne), dostaneme

mnohem rovnoměrnější čerpání finančních zdrojů – viz. obr. 6.23, přitom maximální týdenní potřeba finančních prostředků se snížila z 480 000 Kč na 300 000 Kč.



Obr. 6.22



Obr. 6.23

Rozvrhování omezených zdrojů.

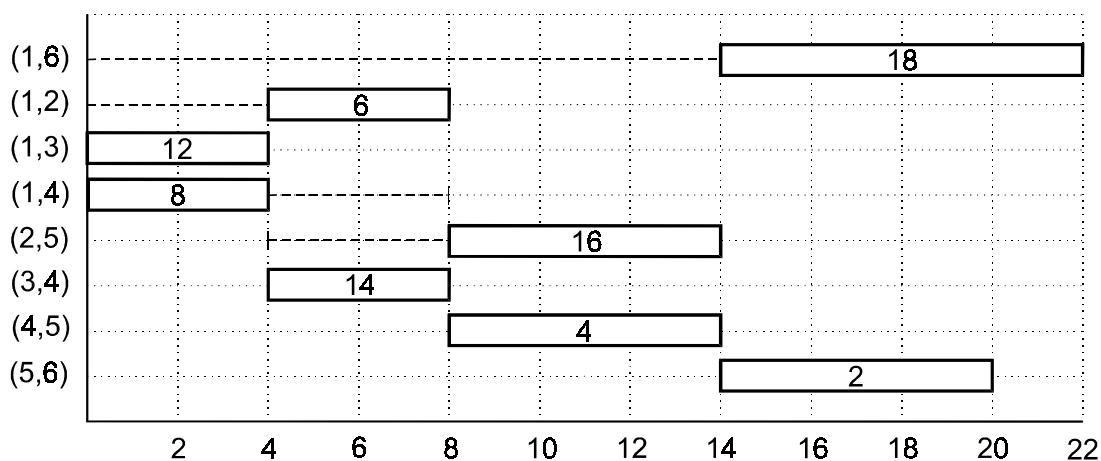
Základní optimalizační úlohou kalendářního plánování projektů při omezených zdrojích je určení minimální doby realizace celého projektu $T(Z)$, která respektuje v každém časovém období disponibilní kapacity využívaných zdrojů. Východiskem pro kapacitně přípustné doby trvání projektu je opět kritická cesta stanovená na základě časové analýzy sítě pomocí CPM nebo PERT, tj. bez ohledu na daná omezení disponibilních zdrojů, a vypočtené časové rezervy jednotlivých činností.

Uvažujme opět pro zjednodušení pouze jeden zdroj s konstantní disponibilní kapacitou Z po celou dobu realizace projektu. Jestliže T je délka kritické cesty stanovená pomocí časové analýzy sítě a v žádném intervalu nepřekročí potřeba zdroje disponibilní kapacitu Z , pak pro minimální dobu trvání projektu $T(Z)$ platí $T(Z) = T$.

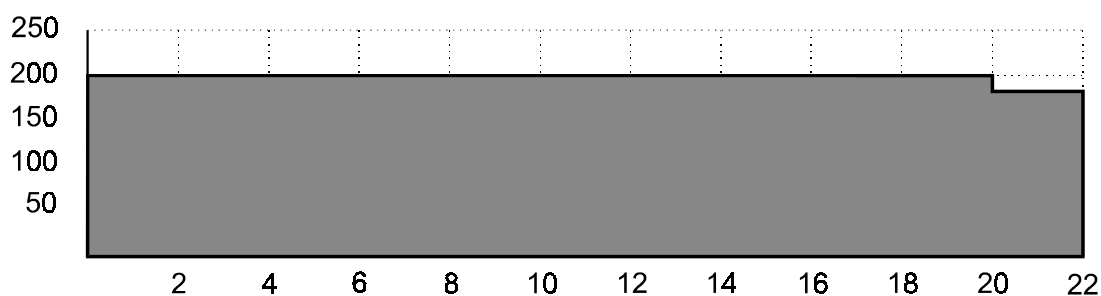
Vyžaduje-li pouze z časového hlediska stanovená kritická cesta, byť i jen v některém období, kapacitu zdroje větší než Z , je nutné posunout začátky jedné nebo více činností. Pokud se tak bude dít jen v rámci existujících časových rezerv, nedojde ke zpoždění začátků následujících činností a tedy ani k prodloužení kritické cesty. V opačném případě je dodržení podmínky omezeného čerpání kapacity zdroje možné pouze za cenu prodloužení celkové doby trvání projektu.

Příklad.

Uvažujme předcházející příklad s tím rozdílem, že maximálně přípustné čerpání finančních prostředků v každém týdnu je 200 000 Kč. Z obr. 6.24 a 6.25 je patrné, že dodatečnou podmínku lze splnit pouze za cenu prodloužení kritické cesty o dva týdny. Proti situaci na obr. 6.22 je činnost (1, 6) je posunuta o dva týdny nad rámec své časové rezervy a v celkovém důsledku je to ona, která způsobí prodloužení kritické cesty. Posun činností (1, 2) a (2, 5) o dva týdny se již uskutečňuje v rámci jejich časových rezerv.



Obr. 6.24



Obr. 6.25

Praktické úkoly síťového plánování při omezených zdrojích lze efektivně řešit s pomocí počítače. Existují v podstatě dva přístupy – heuristické nebo aproximativní, které umožňují nalézt zpravidla suboptimální řešení a jednak metody založené např. na lineárním programování resp. jiných metodách matematické optimalizace.

Literatura

- [1] Anderson, D.R. – Sweeney, S.J. – Williams, T.A.: Management Science: Quantitative Approach to Decision Making, 7th ed., West Publ., New York 1994.
- [2] Berka, M.: Operační výzkum. ES VUT, Brno 1991.
- [3] Doležal, V. - Hušek, R. – Pražská, L.: Regulace zásob v obchodě. Merkur, Praha 1985.
- [4] Hanna, M.: Introduction to Management Science. Mastering Quantitative Analysis. South-Western College Publ., Cincinnati 1996.
- [5] Hillier, F.S. – Lieberman, G.J.: Introduction to Operations Research. 3rd ed., Holden Day, San Francisco 1979.
- [6] Hušek, R. - Lagová, M. – Pelikán, J.: Modely matematického programování. SNTL, Praha 1979.
- [7] Jablonský, J.: Operační výzkum. 2. vydání, VŠE, Praha 1998.
- [8] Lauber, J. - Hušek, R.: Operační výzkum. MŠMT, Praha 1990.
- [9] Lawrence, J.A. – Pasternack, B.A.: Applied Management Science. A Computer Integrated Approach for Decision Making. J. Wiley & Sons, Inc., New York 1998.
- [10] Lucey, T.: Quantitative Techniques. 3rd ed., DP Publ. Ltd, London 1989.
- [11] Mañas, M.: Optimalizační metody. SNTL, Praha 1979.
- [12] Markland, R.E., Aweigart, J.R.: Quantitative Methods. Applications to Managerial Decision Making., J. Wiley & Sons, Inc., Singapore 1987.
- [13] Pavelka, F.: Operační analýza. ES VUT, Brno 1990.
- [14] Pavelka, F.: Systémová analýza. ES VUT, Brno 1989.
- [15] Samek, J.: Lineární programování v příkladech. SPN, Praha 1976.
- [16] Sixta, J. - Žuková, H.: Systémové inženýrství a operační analýza. ES VŠST, Liberec 1986.
- [17] Taha, H.A.: Operations Research. An Introduction. 6th ed., Prentice Hall, New Jersey 1997.
- [18] Ter-Manuelianc, A.: Matematické modely řízení zásob. Institut řízení, Praha 1980.
- [19] Ter-Manuelianc, A.: Řízení a moderní metodologické disciplíny. Institut řízení, Praha 1990.
- [20] Turban, E – Meredith, J.R.: Fundamentals of Management Science. 6th ed., IRWIN, Boston 1994.
- [21] Unčovský, L.: Stochastické modely operační analýzy. ALFA, Bratislava 1980.
- [22] Vejmla, S.: Teorie sítí v ekonomice. SPN, Praha 1985.
- [23] Walter, J. - a kol.: Operační výzkum. SNTL, Praha 1973.
- [24] Walter, J.: Stochastické modely v ekonomii. SNTL, Praha 1970.

Název	Operační výzkum
Autor	RNDr. Bedřich Zimola
Vydavatel	Vysoké učení technické v Brně, Fakulta managementu a ekonomiky ve Zlíně
Vydání	druhé nezměněné
Vyšlo	2000
Náklad	200 výtisků

Publikace neprošla redakční ani jazykovou úpravou.

ISBN 80-214-1664-5